МАТЕМАТИКА

ЕГЭ 2018

ПРОФИЛЬНЫЙ 15

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

15 ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

С. А. Шестаков

НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

ФГОС

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

С. А. Шестаков

ЕГЭ 2018. Математика

Неравенства и системы неравенств

Задача 15 (профильный уровень)

Издание соответствует Федеральному государственному общеобразовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2018

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Ш51

Шестаков С. А.

Ш51 ЕГЭ 2018. Математика. Неравенства и системы неравенств. Задача 15 (профильный уровень). — М.: МЦНМО, 2018. — 352 с.

ISBN 978-5-4439-1215-8

Пособия по математике «ЕГЭ 2018. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи 15 профильного уровня.

По сравнению с прошлым годом книга существенно доработана и дополнена.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики и родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному общеобразовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включен в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

Шестаков Сергей Алексеевич

ЕГЭ 2018. Математика. Неравенства и системы неравенств.
Задача 15 (профильный уровень)

Подписано в печать 30.06.2017 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 19. Тираж 5000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–08–04

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

12+

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 745–80–31. E-mail: biblio@mccme.ru,
http://biblio.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-1215-8

Содержание

Предисловие

Эта книга посвящена методам решения основных типов неравенств школьного курса математики. Неравенства или системы неравенств являются обязательной частью ЕГЭ по математике (базового и профильного уровней) и дополнительных вступительных испытаний в те вузы страны, где эти испытания сохранились. Пособие предназначено учащимся 7–11 классов, учителям, методистам и всем непосредственно связанным со школьным математическим образованием.

Настоящее издание включает восемь глав. Первая глава содержит основные факты и утверждения, связанные с неравенствами, а также общими методами их решения: методом интервалов, методом введения новой переменной, методом знакотождественных множителей и др. Материал главы проиллюстрирован многочисленными примерами решения задач; в конце каждого её параграфа даются упражнения по всем функционально-алгебраическим линиям школьного курса математики, сгруппированные по два.

Каждая из семи следующих глав посвящена методам решения неравенств одной из таких линий: целых рациональных, дробно-рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических, а также неравенств, содержащих знак абсолютной величины (модуля). Так же как и первая, эти главы содержат большое число примеров решения неравенств и систем неравенств. Главы 2–8 имеют одинаковую структуру и состоят из двух параграфов каждая. В первом параграфе рассматриваются простейшие неравенства и системы неравенств соответствующей функционально-алгебраической линии, во втором — более сложные неравенства и системы неравенств. Перед изучением материала второго параграфа каждой из этих глав следует повторить общие методы решения неравенств по первой главе пособия. В конце каждого параграфа приводятся упражнения, сгруппированные по два, а в конце каждого параграфа глав 2–8 также предлагаются и диагностические работы. Таким образом, пособие содержит 14 диагностических работ (в двух вариантах по 12 задач каждый). Задания в диагностических работах даны с избытком: учитель может отобрать необходимые задачи в нужном количестве в соответствии с уровнем класса и образовательными целями.

Наряду со стандартными в пособии рассматриваются и методы решения неравенств, традиционно относимые к нестандартным. Эти методы основываются прежде всего на свойствах монотонных и ограниченных функций. Отметим, что эта книга позволяет получить первые представления о таких методах. Для более детальной проработки методов решения нестандартных неравенств нужно обратиться к пособию: *Шестаков С. А.* ЕГЭ 2016. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) (М.: МЦНМО, 2016).

По сравнению с прошлым годом книга существенно доработана и дополнена.

Автор признателен и благодарен О. А. Васильевой за замечания и предложения, в немалой степени способствовавшие существенному улучшению рукописи и появлению этой книги.

Глава 1. Общие методы решения неравенств

§ 1.1. Основные понятия и факты

В школьном курсе математики можно выделить шесть следующих основных числовых и функционально-алгебраических линий (в порядке их появления в учебниках), в соответствии с которыми и структурирована основная часть этого пособия:

- целые числа, степени с натуральным показателем, целые алгебраические выражения (многочлены), целые рациональные функции,
- дроби, степени с целым отрицательным показателем, алгебраические дроби, дробно-рациональные функции,
- корни, степени с дробным показателем, иррациональные алгебраические выражения, иррациональные функции,
- тригонометрические выражения, тригонометрические функции,
- степени с действительным показателем, показательные выражения, показательная функция,
- логарифмы, логарифмические выражения, логарифмическая функция.

Чтобы сделать классификацию однозначной и облегчить поиск нужных задач, условимся, что хронология изучения темы является ключевым признаком классификации, т. е. если, например, в некотором уравнении или неравенстве переменная содержится и под знаком корня, и под знаком логарифма, будем считать его логарифмическим, а не иррациональным, поскольку логарифмы изучаются позже корней.

Тем самым любое уравнение или неравенство школьного курса математики можно однозначно отнести к одному из следующих типов в соответствии с перечисленными функционально-алгебраическими линиями: целое рациональное (слово «рациональное» в дальнейшем для экономии места будем опускать), дробно-рациональное, иррациональное, тригонометрическое, показательное, логарифмическое. Прежде чем переходить к изложению общих методов решения неравенств, напомним основные понятия, определения и факты, связанные с неравенствами и уравнениями (решение уравнений часто является составной частью решения неравенств).

Значение любого алгебраического выражения $f(x)$ при любом допустимом значении переменной x либо положительно (в этом случае пишут $f(x) > 0$), либо отрицательно (в этом случае пишут $f(x) < 0$), либо равно нулю (в этом случае пишут $f(x) = 0$). Любая математическая формула является высказыванием, предложением, написанным на математическом языке. Высказывания $f(x)>0$ (читается: $f(x)$ больше нуля), $f(x)<0$ (читается: $f(x)$ меньше нуля), $f(x)\geqslant 0$ (читается: $f(x)$ больше или равно нулю или $f(x)$ не меньше нуля) и $f(x)\leqslant 0$ (читается: $f(x)$ меньше или равно нулю или $f(x)$ не больше нуля) называют неравенствами с одной переменной, а высказывание $f(x)=0$ (читается: $f(x)$ равно нулю) — уравнением с одной переменной. Неравенства $f(x)>0$ и $f(x)<0$ называются *строгими*, а неравенства $f(x)\geqslant 0$ и $f(x)\leqslant 0$ — *нестрогими*. Заметим, что правая часть неравенства (уравнения) может быть отличной от нуля. В этом случае строгое неравенство записывается в виде $f(x)>g(x)$ или $f(x)<g(x)$, нестрогое неравенство — в виде $f(x)\geqslant g(x)$ или $f(x)\leqslant g(x)$, а уравнение — в виде $f(x)=g(x)$.

Число называется решением неравенства (корнем уравнения), если при его подстановке вместо переменной в данное неравенство (уравнение) получается верное числовое неравенство (равенство). *Решить неравенство* (*уравнение*) — значит найти множество всех его решений (корней). Поэтому в ответе предпочтительнее указывать именно множества чисел, используя для записи нескольких непересекающихся множеств знак объединения «$\cup$» либо просто точку с запятой. В этом смысле использование в качестве ответа, например, записи $x>1$ менее удачно по сравнению с записью $(1;+\infty)$, поскольку $x>1$ является неравенством, а $(1;+\infty)$ — множеством его решений.

Если неравенство (уравнение) не имеет ни одного решения (корня), то множество его решений (корней) не содержит ни одного элемента (такое множество называется пустым). Подобные ситуации время от времени встречаются — в том числе и на экзаменах, к ним надо быть готовыми. В таких случаях для записи ответа используют символ пустого множества $\varnothing$ либо просто пишут: «решений нет». Ответ в форме «$x\in\varnothing$» является математически не вполне грамотным, поскольку пустое множество по определению не содержит ни одного элемента. Для записи конечных числовых множеств используют фигурные скобки $\{\ \}$, в которых через точку с запятой (не через запятую — чтобы исключить путаницу, поскольку запятой отделяются дробные части десятичных дробей) записывают числа (обычно в порядке возрастания), являющиеся решениями неравенства (корнями уравнения).

Важной частью общей математической культуры, необходимой для решения неравенств, является умение делать логический перебор, проводить доказательные рассуждения, отвечать на вопросы о знаках и числе решений неравенства даже в тех случаях, когда решать неравенство не требуется или найти решение не представляется возможным. Развитию и тренировке навыков логического перебора, умения анализировать условие и делать обоснованные умозаключения и выводы, находить стратегию решения посвящена значительная часть упражнений этого параграфа.

Пример 1. Сеня сказал, что написанное на доске неравенство имеет менее 11 целочисленных решений, а Веня — что менее 12. Учитель ответил, что прав только один из них. Сколько целочисленных решений имеет это неравенство?

Решение. Если утверждение Сени истинно и неравенство имеет менее 11 целочисленных решений, то и утверждение Вени истинно, что противоречит условию истинности только одного из утверждений. Значит, утверждение Сени ложно, а утверждение Вени истинно, т. е. неравенство имеет не менее 11, но менее 12 целочисленных решений. Единственное целое число, отвечающее такому требованию, — это 11.

Ответ: 11.

Пример 2. Неравенство $\dfrac{59}{\sqrt{4x^2+7}} > \dfrac{47}{\sqrt{5x^2+9}}$:

1) не имеет решений;
2) справедливо только при $x \neq 0$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо только при $x = 0$.

Укажите номера истинных утверждений.

Решение. Числитель дроби в левой части неравенства больше числителя дроби в правой части неравенства, а знаменатель меньше знаменателя в правой части при любом значении переменной. Поэтому дробь в левой части неравенства больше дроби в правой его части. Следовательно, истинно утверждение 3.

Ответ: 3.

Пример 3. Укажите номера тех неравенств, которые не имеют отрицательных решений:

1) $(x+2)^2(7x^{18}-9x^5-5) \geqslant 0$;
2) $2x^2-7x+6<0$;
3) $2+7x^8-18x^{17}<0$;
4) $x^2-56789x-98765 \leqslant 0$;
5) $x^2-7777x+77777<0$.

Решение. Рассмотрим последовательно каждое из пяти данных неравенств. Число $x=-2$ является, очевидно, решением неравенства 1. Следовательно, это неравенство имеет по крайней мере одно отрицательное решение. Квадратное неравенство 2 легко решить стандартным способом; его решением является промежуток (1,5; 2). Следовательно, это неравенство не имеет отрицательных решений. Неравенство 3 едва ли возможно решить школьными методами, но ответ на вопрос задачи этого и не требует. Действительно, если предположить, что какое-то отрицательное число является решением этого неравенства, то мы получим противоречие: ведь при любом отрицательном значении переменной левая часть неравенства заведомо принимает только положительные значения. Следовательно, это неравенство не имеет отрицательных решений. Решить квадратное неравенство 4, разумеется, можно, но это потребует несоразмерных ему арифметических подвигов. Поскольку находить решения вовсе необязательно, попробуем порассуждать. Графиком квадратичной функции

$$y = x^2 - 56789x - 98765$$

является парабола, ветви которой направлены вверх. Так как $y(0) = -98765 < 0$, этот график пересекает ось абсцисс в двух точках, расположенных по разные стороны от начала координат, и при любом значении переменной, заключённом между ними, лежит ниже оси абсцисс. Следовательно, неравенство 4 имеет отрицательные решения. Этот же результат можно было получить, используя формулы Виета. Воспользуемся ими для ответа на вопрос о существовании отрицательных решений у неравенства 5. Если дискриминант квадратного трёхчлена в левой части неравенства 5 неположителен, то оно не имеет решений (в том числе и отрицательных). Если дискриминант положителен, то решением неравенства является интервал, концы которого — корни квадратного трёхчлена $x^2 - 7777x + 77777$. Из формул Виета следует, что оба корня этого трёхчлена (если они существуют) положительны, поскольку их произведение и сумма положительны. Поэтому и при положительном дискриминанте левой части неравенство 5 не имеет отрицательных решений. Заметим, что и в случае неравенства 2 можно было использовать рассуждения, аналогичные предыдущим.

Ответ: 2; 3; 5.

Навыки, полученные при решении подобных задач, помогут находить оптимальные пути решения, рассматривать меньшее число случаев, анализировать полученные ответы на возможные ошибки и т. п.

Если нужно найти все значения переменной, каждое из которых является как решением неравенства $f(x) > 0$ (уравнения $f(x) = 0$), так и решением неравенства $g(x) > 0$ (уравнения $g(x) = 0$), то говорят, что задана *система неравенств* $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ (*система уравнений* $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$), а записывают и систему неравенств, и систему уравнений с помощью фигурной скобки:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{— система неравенств,}$$

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0 \end{cases} \text{— система уравнений.}$$

Знаки неравенств системы могут быть любыми из четырёх возможных, правые части неравенств (уравнений) системы могут быть отличны от нуля, система может состоять из трёх и более неравенств (уравнений), содержать наряду с неравенствами и уравнения (такие системы иногда называют *смешанными*). *Решить систему* неравенств (уравнений) — значит найти множество её решений. В большинстве случаев (но не всегда!) для этого ищут множество решений каждого из неравенств системы, а затем — пересечение (общую часть) полученных множеств. Что касается систем уравнений с одной переменной, здесь часто можно обойтись без решения всех уравнений системы, решив только одно — наиболее простое — из её уравнений и выполнив проверку найденных корней путём их подстановки в остальные уравнения системы. Разумеется, это касается только систем уравнений с одной переменной; для систем уравнений с двумя и более переменными такой приём «не работает».

Пример 4. Система неравенств $\begin{cases} x \geqslant -789, \\ 789x^{73} + 89x^{72} + 9 < 0 \end{cases}$:

1) не имеет решений;
2) не имеет положительных решений;
3) не имеет отрицательных решений;
4) имеет и отрицательные, и положительные решения;
5) выполняется при любом действительном x.

Укажите номера истинных утверждений.

Решение. Понятно, что решение второго неравенства данной системы едва ли возможно. Попробуем доказать или опровергнуть данные утверждения, подобрав, где необходимо, соответствующие примеры. Ясно, что, например, $x = -1$ является решением каждого из неравенств системы. Поэтому утверждения 1 и 3 ложны. Далее, при любом положительном значении переменной левая часть второго неравенства системы положительна. Поэтому это неравенство не имеет положительных решений. Следовательно, и вся система не имеет положительных решений. Значит, утверждения 4 и 5 ложны, а утверждение 2 истинно.

Ответ: 2.

Пример 5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^2+(x^2-5)(x^2-4) \leqslant 4, \\ x^{27}+2x^{26}+7x+13 \leqslant 0. \end{cases}$$

Решение. О втором неравенстве данной системы можно сказать только одно: оно не имеет ни одного неотрицательного решения, поскольку при любом неотрицательном значении переменной его левая часть положительна. Поэтому решениями второго неравенства системы могут быть только отрицательные числа. Решим первое неравенство, перенеся 4 в левую часть и выполнив разложение на множители:

$$x^2-4+(x^2-5)(x^2-4) \leqslant 0 \iff (x^2-4)(x^2-5+1) \leqslant 0,$$

и, значит, $(x^2-4)^2 \leqslant 0$. Если $x^2-4 \neq 0$, то $(x^2-4)^2 > 0$ и первое неравенство не имеет решений. Значит, $x^2-4=0$, откуда $x=\pm 2$. Таким образом, первое неравенство данной системы имеет ровно два решения. Поскольку никакое положительное число не может быть решением второго неравенства системы, её единственным возможным решением является $x=-2$. При $x=-2$ левая часть второго неравенства системы принимает вид

$$(-2)^{27}+2(-2)^{26}+7(-2)+13 = -2^{27}+2^{27}-14+13 = -1.$$

Значит, $x=-2$ является решением и второго неравенства системы.

Ответ: -2.

Замечание. В некоторых пособиях, преимущественно издаваемых подготовительными отделениями университетов и других вузов (но не только), можно встретить записи вида

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) = 0, \\ x \in [a; b], \end{cases}$$

т. е. записи, в которых наряду с уравнениями и неравенствами в систему включаются и другие высказывания (в приведённом примере: $x \in [a; b]$). С формальной точки зрения такую запись именно в пособиях для средней школы следует признать не вполне удачной: ведь ни в одном из учебников не вводится понятие системы высказываний, и, несмотря на то что интуитивно понятно, какой смысл вкладывается в подобные записи, их лучше избегать, заменяя высказывания вида $x \in [a; b]$ неравенствами (в данном случае неравенством $a \leqslant x \leqslant b$).

Если нужно найти все значения переменной, каждое из которых является или решением неравенства $f(x)>0$ (уравнения $f(x)=0$), или решением неравенства $g(x)>0$ (уравнения $g(x)=0$), то говорят, что задана *совокупность неравенств* (*совокупность уравнений*), а записывают и совокупность неравенств, и совокупность уравнений с помощью квадратной скобки:

$$\left[\begin{aligned} &f(x)>0,\\ &g(x)>0 \end{aligned}\right. \text{ — совокупность неравенств,}$$

$$\left[\begin{aligned} &f(x)=0,\\ &g(x)=0 \end{aligned}\right. \text{ — совокупность уравнений.}$$

Знаки неравенств совокупности могут быть любыми из четырёх возможных, правые части неравенств (уравнений) совокупности могут быть отличны от нуля, совокупность может состоять из трёх и более неравенств (уравнений), содержать наряду с неравенствами и уравнения. *Решить совокупность* неравенств (уравнений) — значит найти множество решений каждого из неравенств (уравнений) совокупности, а затем найти объединение полученных множеств. Итак, совсем коротко: система — пересечение, совокупность — объединение. Поэтому, например, высказывание $x\in[a;b]$ можно заменить системой неравенств $\begin{cases} x\geqslant a,\\ x\leqslant b,\end{cases}$ а высказывание $x\in(-\infty;a]\cup[b;+\infty)$ можно заменить совокупностью неравенств $\left[\begin{aligned} &x\leqslant a,\\ &x\geqslant b.\end{aligned}\right.$

При каждом допустимом значении переменной значение любого алгебраического выражения является числом, поэтому далее для краткости и экономии места будем иногда — если это не противоречит смыслу предложения — вместо словосочетания «значение выражения $g(x)$» использовать словосочетание «число $g(x)$». Например, при любом допустимом значении переменной из двух чисел $f(x)-5$ и $f(x)-8$ меньшим, очевидно, является число $f(x)-8$. Произведение двух чисел отрицательно в том и только том случае, если это числа разных знаков, т. е. меньшее из этих чисел отрицательно, а большее — положительно. Поэтому неравенство $(f(x)-5)(f(x)-8)<0$ можно заменить системой неравенств

$$\begin{cases} f(x)-8<0,\\ f(x)-5>0. \end{cases}$$

Произведение двух чисел положительно в том и только том случае, если это числа одного знака, т. е. если меньшее из этих чисел положительно (тогда и большее число положительно) или большее из этих чисел отрицательно (тогда и меньшее число отрицательно). Поэтому неравенство $(f(x)-5)(f(x)-8)>0$ можно заменить совокупностью неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(x)-8>0, \\ f(x)-5<0. \end{array}\right.$$

Разумеется, такие замены возможны только при допустимых значениях переменной.

Определение 1. Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения или неравенства будем называть множество всех значений переменной, при каждом из которых определены (имеют смысл) все алгебраические выражения в каждой из двух частей уравнения или неравенства. Областью допустимых значений (ОДЗ) системы уравнений или неравенств будем называть пересечение областей допустимых значений каждого из уравнений или неравенств системы, т. е. множество всех значений переменной, при каждом из которых определены (имеют смысл) все алгебраические выражения в каждой из двух частей каждого уравнения или неравенства системы.

Из шести основных типов алгебраических выражений школьного курса три дают ограничения на переменную. Эти ограничения и определяют ОДЗ уравнения, неравенства, системы или совокупности.

Таблица 1

Алгебраическое выражение	*Ограничение*
алгебраическая дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$g(x)\neq 0$
иррациональное алгебраическое выражение $\sqrt[2n]{f(x)}$ степень с дробным показателем $(f(x))^{\frac{m}{n}}$ ($n\in\mathbb{N}$, $n>1$, $m\in\mathbb{Z}$, $\dfrac{m}{n}$ — несократимая дробь)	$f(x)\geqslant 0$ $f(x)\geqslant 0$ при $\dfrac{m}{n}>0$, $f(x)>0$ при $\dfrac{m}{n}<0$
логарифмическое выражение $\log_{g(x)} f(x)$	$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ g(x)\neq 1 \end{cases}$

Замечание. Помимо основных приведённых в таблице алгебраических выражений ограничения на переменную дают ещё $\arcsin f(x)$ и $\arccos f(x)$, ОДЗ которых определяется неравенством $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$.

В некоторых задачах именно исследование ОДЗ даёт ключ к решению, и без такого исследования решить задачу попросту невозможно.

Пример 6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 13^{x-6}+\ln^2(x-7) \geqslant 13, \\ 7+\sqrt{13-x} \geqslant 7^{x-12}. \end{cases}$$

Решение. Поскольку $\ln^2(x-7)$ определён при $x>7$, а $\sqrt{13-x}$ — при $x \leqslant 13$, ОДЗ данной системы неравенств — промежуток $(7; 13]$. Если $x>7$, то $13^{x-6}>13$, а $\ln^2(x-7) \geqslant 0$. Поэтому $13^{x-6}+\ln^2(x-7)>13$, и первое неравенство данной системы выполнено при любом $x>7$. Если $x \leqslant 13$, то $\sqrt{13-x} \geqslant 0$, $7+\sqrt{13-x} \geqslant 7$, а $7^{x-12} \leqslant 7$. Поэтому второе неравенство данной системы выполнено при любом $x \leqslant 13$. Таким образом, именно ОДЗ данной системы неравенств является её решением.

Ответ: $(7; 13]$.

Пример 7. Решите неравенство

$$x^2+\sqrt{x^2-81} \leqslant 81+\sqrt{x^2-81}.$$

Решение. Левая и правая части неравенства определены при условии неотрицательности подкоренного выражения, т. е. при $x^2-81 \geqslant 0$, откуда $x^2 \geqslant 81$. При допустимых значениях переменной неравенство приводится к виду $x^2 \leqslant 81$. Приходим к системе

$$\begin{cases} x^2 \geqslant 81, \\ x^2 \leqslant 81, \end{cases}$$

откуда $x^2=81$, и $x=\pm 9$.

Ответ: $\{\pm 9\}$.

Замечание. Как видно из рассмотренного примера, в некоторых случаях можно обойтись без формального решения неравенств, задающих ОДЗ. Как правило, это применимо к задачам, в которых ОДЗ нужна преимущественно для отбора корней уравнения или — в некоторых случаях — решений неравенства.

В тех случаях, когда вариант ЕГЭ по математике содержит систему двух неравенств с одной переменной, за её верное решение обычно даётся три первичных балла: по баллу за правильное решение каждого из неравенств системы и третий балл — за правильно найденное решение всей системы. Однако существуют системы неравенств, для которых нельзя решить одно из неравенств системы (или даже нельзя найти множество решений ни одного из неравенств системы), а множество решений всей системы найти, тем не менее, удаётся.

Определение 2. Если каждое решение первого неравенства является и решением второго, то второе неравенство называется *следствием* первого. Аналогично если каждый корень первого уравнения является и корнем второго, то второе уравнение называется *следствием* первого.

Из этого определения вытекает, что множество корней данного уравнения содержится в множестве корней уравнения-следствия. Перейдя от данного уравнения к уравнению-следствию, найдя корни последнего и проверив, какие из них являются корнями данного (такая проверка осуществляется непосредственной подстановкой найденных корней в данное уравнение), можно найти все корни данного уравнения. Корни уравнения-следствия (решения неравенства-следствия), не являющиеся корнями данного уравнения (решениями данного неравенства), часто называют посторонними корнями (решениями). Таким образом, одним из методов решения уравнений является переход к уравнению-следствию, который при записи решения обозначается стрелкой «⇒». Переход к уравнению-следствию, как правило, связан с расширением ОДЗ, которое обычно происходит после какого-либо алгебраического преобразования: возведения в чётную степень, освобождения от знаменателя, логарифма или модуля. Вместо непосредственной подстановки найденных корней в данное уравнение можно подставлять корни лишь в неравенства, невыполнение которых и приводит к появлению посторонних корней.

Таблица 2

Данное уравнение	*Уравнение-следствие*	*Проверяемые неравенства*
$\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$	$f(x)=0$	$g(x)\neq 0$
$\sqrt{f(x)}=g(x)$	$f(x)=g^2(x)$	$g(x)\geqslant 0$ (неравенство $f(x)\geqslant 0$, задающее ОДЗ данного уравнения, проверять не нужно: оно выполняется для всех найденных значений переменной, поскольку при каждом из них $f(x)=g^2(x)$, а $g^2(x)\geqslant 0$)
$\log_{a(x)} f(x)=b$	$f(x)=(a(x))^b$	$a(x)>0,\quad a(x)\neq 1$ (неравенство $f(x)>0$ проверять не нужно: оно следует из того, что $a(x)>0$ и, значит, $f(x)=(a(x))^b>0$)
$\lvert f(x)\rvert=g(x)$	$f(x)=\pm g(x)$	$g(x)\geqslant 0$

Для неравенств рекомендовать аналогичный метод решения (переход к неравенству-следствию), как правило, нельзя: число корней уравнения в большинстве случаев конечно (именно это позволяет выполнить проверку и отобрать корни данного уравнения из множества корней уравнения-следствия), а число решений неравенства, как правило, бесконечно, и подобную проверку выполнить просто невозможно. Однако в некоторых случаях именно переход к неравенству-следствию помогает решить задачу. В таких случаях, как уже отмечалось, невозможно найти решение одного (а иногда и каждого) из неравенств системы, но решение всей системы найти, тем не менее, возможно, причём такую возможность даёт именно переход к неравенству-следствию.

Пример 8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^{69}-3x^{67}-\sqrt{3}x+78} \leqslant 6x^2-9, \\ \sqrt{x^{69}-3x^{67}-\sqrt{3}x+78} \geqslant x^4. \end{cases}$$

Решение. Если $a \leqslant b$ и $a \geqslant c$, то $c \leqslant b$. В нашем случае

$$a = \sqrt{x^{69}-3x^{67}-\sqrt{3}x+78}, \quad b = 6x^2-9, \quad c = x^4.$$

Следовательно, $x^4 \leqslant 6x^2-9$, откуда $x^4-6x^2+9 \leqslant 0$, т. е. $(x^2-3)^2 \leqslant 0$. Если $x^2-3 \neq 0$, то $(x^2-3)^2 > 0$. Поэтому полученное неравенство выполняется, только если $x^2=3$, откуда $x = \pm\sqrt{3}$. Таким образом, если данная система имеет решения, то этими решениями могут быть только числа из множества $\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$. Остаётся выполнить проверку. Пусть $x=\sqrt{3}$. Тогда правая часть каждого из неравенств системы равна 9. Найдём значение подкоренного выражения:

$$(\sqrt{3})^{69}-3\cdot(\sqrt{3})^{67}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+78 = (\sqrt{3})^{69}-(\sqrt{3})^{69}-3+78 = 75.$$

Поскольку $\sqrt{75} < 9$, первое неравенство системы выполнено, а второе — нет. Значит, $x=\sqrt{3}$ не является решением данной системы. Пусть $x=-\sqrt{3}$. Тогда правая часть каждого из неравенств системы равна 9. Найдём значение подкоренного выражения:

$$(-\sqrt{3})^{69}-3\cdot(-\sqrt{3})^{67}-\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})+78 = -(\sqrt{3})^{69}+(\sqrt{3})^{69}+3+78 = 81.$$

Поскольку $\sqrt{81}=9$, оба неравенства системы выполнены. Значит, $x = -\sqrt{3}$ является решением данной системы.

Ответ: $\{-\sqrt{3}\}$.

Замечание. Почленное сложение двух неравенств возможно, только если это неравенства одного знака. При таком сложении получается неравенство, являющееся следствием данных неравенств. Аналогично при почленном сложении двух уравнений получается уравнение, являющееся следствием данных. Поэтому решения неравенства (корни уравнения), полученного почленным сложением двух данных, должны быть проверены подстановкой в каждое из данных неравенств (уравнений), как это было сделано при решении примера 2, либо неравенство (уравнение), являющееся следствием данных, должно быть включено в данную систему.

Конечно, рассмотренную систему нельзя считать стандартной. При решении стандартных неравенств или их систем переход к неравенству-следствию не используется; здесь обычно применяют преобразования, которые не приводят к изменению множества решений данного неравенства или данной системы.

Определение 3. Два уравнения (неравенства) называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений (это множество, в частности, может быть пустым, т. е. уравнения, не имеющие корней, или неравенства, не имеющие решений, равносильны).

Равносильными могут быть не только два уравнения, два неравенства, две совокупности или две системы. В определении равносильности речь идёт лишь о множестве решений уравнения или неравенства. Поэтому неравенство может быть равносильно уравнению, совокупности или системе, и наоборот. Переход от данного уравнения (неравенства) к равносильному уравнению (неравенству), равносильной совокупности или равносильной системе называется *равносильным* и при записи решения обозначается двусторонней стрелкой «$\Leftrightarrow$». Такой переход не приводит ни к потере решений (корней), ни к приобретению посторонних решений (корней), и алгебраические преобразования, которые делают такой переход возможным, также называются *равносильными*. Метод равносильных преобразований не требует проверки найденных решений путём их подстановки в данное уравнение или неравенство и является одним из основных методов решения уравнений и неравенств. Для уравнений приведённую выше таблицу 2 можно теперь заменить таблицей 3 (с. 18).

Замечание. Одной из наиболее распространённых ошибок при записи решений уравнений и неравенств является использование знаков следования и равносильности при переходе от уравнения (неравенства, системы) с одной переменной к уравнению (неравенству, системе) с другой переменной (как правило, после выполнения замены переменной). Приведём пример такого ошибочного использования:

«пусть $t = \sin x$, тогда $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0$».

Таблица 3

Данное уравнение	*Равносильная система*
$\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$	$\begin{cases} g(x)\neq 0, \\ f(x)=0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)}=g(x)$	$\begin{cases} g(x)\geqslant 0, \\ f(x)=(g(x))^2 \end{cases}$
$\log_{a(x)} f(x)=b$	$\begin{cases} a(x)>0, \\ a(x)\neq 1, \\ f(x)=(a(x))^b \end{cases}$
$\lvert f(x)\rvert=g(x)$	$\begin{cases} g(x)\geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{cases}$

Ясно, что множества корней уравнений $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ и $2t^2 - 3t + 1 = 0$ различны, поэтому эти уравнения не являются равносильными. Использование знака равносильности в данном случае может быть расценено экспертами, проверяющими вариант ЕГЭ, как математическая ошибка, связанная с незнанием или непониманием определения равносильности. Неправильным в данном случае будет и использование знака следования: уравнение $2t^2-3t+1=0$ не является, очевидно, следствием уравнения $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$, поскольку множество корней тригонометрического уравнения не содержится в множестве корней квадратного. К сожалению, в огромном потоке литературы для подготовки к экзаменам подобные ошибки встречаются сплошь и рядом — даже в тех из них, где приводится определение равносильности уравнений и неравенств. Едва ли это связано с недостаточной квалифицированностью авторов, скорее, речь идёт о некритическом подходе к употреблению подобной символики и подмене знаками равносильности и следствия таких слов и словосочетаний, как «тогда», «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно», «следовательно», «поэтому» и им подобных.

Неравносильные преобразования уравнений и неравенств с одной переменной связаны в основном с сужением или расширением ОДЗ уравнения или неравенства. В случае сужения ОДЗ может произойти потеря решений (корней), в случае расширения ОДЗ — приобретение посторонних решений (корней). Поэтому при каждом преобразовании нужно внимательно следить за ОДЗ, не допуская сужения или расширения последней и руководствуясь следующими правилами.

1. *Перенос числа или одночлена из одной части уравнения или неравенства в другую с изменением знака (плюс или минус) перед этим числом или одночленом на противоположный — равносильное преобразование.*

2. *Приведение подобных слагаемых, не ведущее к изменению ОДЗ, — равносильное преобразование.*

3. *Умножение обеих частей неравенства на положительное число, а обеих частей уравнения на любое отличное от нуля число — равносильное преобразование.*

4. *Умножение обеих частей неравенства на отрицательное число с изменением знака неравенства на противоположный — равносильное преобразование.*

5. *Возведение обеих частей уравнения или неравенства в чётную степень (в частности, в квадрат) при условии неотрицательности каждой из этих частей и допустимых значениях переменной — равносильное преобразование.*

Например, если $g(x) \leqslant 0$, то неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ не имеет решений в силу неотрицательности арифметического квадратного корня. Поэтому должно выполняться условие $g(x) > 0$. Но в этом случае обе части неравенства $\sqrt{f(x)} < g(x)$ неотрицательны, и возведение в квадрат является равносильным преобразованием при допустимых значениях переменной. Таким образом,

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

Аналогично если $g(x) < 0$, то неравенство $|f(x)| \leqslant g(x)$ не имеет корней в силу неотрицательности модуля. Поэтому должно выполняться неравенство $g(x) \geqslant 0$. Но в этом случае обе части неравенства $|f(x)| \leqslant g(x)$ неотрицательны, и возведение в квадрат является равносильным преобразованием при допустимых значениях переменной. Таким образом, учитывая, что квадрат числа и квадрат модуля этого числа равны, получаем следующее равносильное преобразование:

$$|f(x)| \leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ (f(x))^2 \leqslant (g(x))^2. \end{cases}$$

Более подробно равносильные преобразования будут рассмотрены при изложении методов решения неравенств для каждой функционально-алгебраической линии школьного курса.

То, что приведение подобных слагаемых не должно вести к изменению ОДЗ, также весьма существенно. Например, если просто привести подобные слагаемые в неравенстве $x^2+\sqrt{x+2}\geqslant 4+\sqrt{x+2}$, то будут получены посторонние решения. Последнее связано с расширением ОДЗ: неравенство $x^2\geqslant 4$, в отличие от данного, не предполагает каких-либо ограничений на переменную, его решением является объединение промежутков $(-\infty; -2]\cup[2; +\infty)$. Равносильное же преобразование будет таким:

$$x^2+\sqrt{x+2}\geqslant 4+\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\geqslant 4, \\ x\geqslant -2. \end{cases}$$

С учётом второго неравенства системы получим правильный ответ: $\{-2\}\cup[2; +\infty)$.

Вообще, к изменению ОДЗ приводит не так много преобразований, поскольку входящих в школьную программу алгебраических выражений, требующих ограничений на переменную, всего три: это алгебраические дроби, иррациональные выражения с корнями чётной степени и логарифмические выражения. При преобразованиях, связанных с «освобождением» от корней чётной степени и логарифмов (т. е. с рационализацией иррациональных и логарифмических уравнений и неравенств), обычно происходит расширение ОДЗ, поэтому применение таких преобразований должно сопровождаться обязательным выписыванием соответствующих ограничений (условие неотрицательности алгебраического выражения под знаком корня чётной степени, условие положительности алгебраического выражения под знаком логарифма, условие положительности и неравенства единице алгебраического выражения в основании логарифма, условие неотрицательности обеих частей уравнения или неравенства при возведении их в квадрат или другую чётную степень).

Что касается алгебраических дробей, то их знаменатели лучше «не трогать», используя при решении уравнений условие равенства дроби нулю (дробь равна нулю, если её числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю и не теряет смысла). При решении неравенств, содержащих алгебраические дроби, грубой ошибкой является «избавление» от знаменателя: ведь его знак влияет на знак всей дроби и условия отличия знаменателя от нуля в таких случаях недостаточно: в самом деле, знак дроби $\frac{a(x)}{b(x)}$ зависит не только от знака её числителя, но и от знака её знаменателя. Переход от неравенства $\frac{a(x)}{b(x)}>0$ к неравенству $a(x)>0$ (даже при условии $b(x)\neq 0$) означает, в сущности, умножение обеих частей неравенства $\frac{a(x)}{b(x)}>0$ на $b(x)$ с сохранением знака неравенства.

Но знак неравенства сохраняется только при условии $b(x) > 0$, случай же $b(x) < 0$ при таком преобразовании попросту игнорируется. Аналогично грубой ошибкой является переход, например, от неравенства $\frac{a(x)}{b(x)} > 1$ к неравенству $a(x) > b(x)$, поскольку такое преобразование допустимо только при $b(x) > 0$, а случай $b(x) < 0$ при этом обычно даже не рассматривается, что приводит к потере решений или к появлению лишних решений. При решении дробно-рациональных неравенств обычно все алгебраические выражения переносятся в одну из частей неравенства и приводятся к общему знаменателю. Например, правильным началом решения неравенства $\frac{a(x)}{b(x)} > 1$ является следующая цепочка равносильных преобразований:

$$\frac{a(x)}{b(x)} > 1 \Leftrightarrow \frac{a(x)}{b(x)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{a(x) - b(x)}{b(x)} > 0.$$

Более подробно дробно-рациональные неравенства будут рассмотрены в соответствующей главе.

К сужению ОДЗ в основном приводят преобразования, связанные с недостаточно чётко понятыми свойствами корней и логарифмов. Так, переход от корня из произведения к произведению корней может потребовать рассмотрения двух случаев, ведь подкоренное число неотрицательно, если числа $a(x)$ и $b(x)$ оба неотрицательны либо оба неположительны. Поэтому

$$\sqrt{a(x)b(x)} = \sqrt{a(x)}\sqrt{b(x)}$$

лишь при $a(x) \geqslant 0$ и $b(x) \geqslant 0$, а при $a(x) < 0$ и $b(x) < 0$ получаем

$$\sqrt{a(x)b(x)} = \sqrt{-a(x)}\sqrt{-b(x)}.$$

Аналогично переход от логарифма произведения к сумме логарифмов может также потребовать рассмотрения двух случаев:

$$\log_c(a(x)b(x)) = \log_c a(x) + \log_c b(x)$$

при условиях $a(x) > 0$ и $b(x) > 0$ и

$$\log_c(a(x)b(x)) = \log_c(-a(x)) + \log_c(-b(x))$$

при $a(x) < 0$ и $b(x) < 0$. Уже из этих примеров ясно, что выполнение таких преобразований (подробнее о них говорится в главах, посвящённых иррациональным и логарифмическим неравенствам) требует внимательности, тщательности и аккуратности.

Наиболее общие методы решения неравенств с одной переменной, применимые к решению неравенств каждой из шести функционально-алгебраических линий школьного курса математики, будут рассмотрены в следующих параграфах этой главы.

Упражнения к § 1.1

1. а) Паша сказал, что написанное на доске неравенство имеет более 5 целочисленных решений, а Саша — что более 6. Учитель ответил, что прав только один из них. Сколько целочисленных решений имеет это неравенство?

б) Маша сказала, что написанное на доске неравенство имеет менее 8 целочисленных решений, а Даша — что менее 9. Учитель ответил, что права только одна из них. Сколько целочисленных решений имеет это неравенство?

2. а) Паша сказал, что написанное на доске неравенство имеет более 5 целочисленных решений, Саша — что более 6, а Витя — что более 7. Учитель ответил, что прав только один из них. Сколько целочисленных решений имеет это неравенство?

б) Маша сказала, что написанное на доске неравенство имеет менее 9 целочисленных решений, Даша — что менее 8, а Глаша — что менее 7. Учитель ответил, что права только одна из них. Сколько целочисленных решений имеет это неравенство?

3. а) Перед днём рождения Иры Лена сказала, что Ире подарят не меньше 9 кукол, а Вера — что не больше 7. Сколько кукол подарили Ире, если и Лена, и Вера ошиблись?

б) Перед хоккейным матчем Витя сказал, что будет заброшено не менее 12 шайб, а Ваня — что не более 10. Сколько шайб было заброшено, если и Витя, и Ваня ошиблись?

4. а) Определите, сколько шайб было заброшено в ворота команды «Алмаз», если из следующих четырёх утверждений о результате матча хоккейных команд «Рубин» и «Алмаз» три истинны, а одно — нет:

1) выиграл «Рубин»;
2) матч закончился вничью;
3) в матче было заброшено 9 шайб;
4) «Рубин» пропустил больше трёх шайб.

б) Определите, сколько шайб было заброшено в ворота команды «Рубин», если из следующих четырёх утверждений о результате матча хоккейных команд «Рубин» и «Алмаз» три истинны, а одно — нет:

1) выиграл «Алмаз»;
2) матч закончился вничью;
3) в матче было заброшено 11 шайб;
4) «Рубин» забросил больше четырёх шайб.

5. а) Определите, сколько шайб было заброшено в ворота команды «Восток», если из следующих пяти утверждений о результате матча хоккейных команд «Восток» и «Запад» четыре истинны, а одно — нет:

1) выиграл «Восток»;
2) выиграл «Запад»;
3) «Восток» забросил больше трёх шайб;
4) «Запад» забросил больше двух шайб;
5) в матче было заброшено 8 шайб.

б) Определите, сколько шайб было заброшено в ворота команды «Запад», если из следующих пяти утверждений о результате матча хоккейных команд «Восток» и «Запад» четыре истинны, а одно — нет:

1) выиграл «Восток»;
2) выиграл «Запад»;
3) «Восток» забросил больше четырёх шайб;
4) «Запад» забросил больше трёх шайб;
5) в матче было заброшено 10 шайб.

6. а) Из пяти следующих утверждений о результатах матча хоккейных команд «Угольник» и «Циркуль» три истинны, а два — нет:

1) выиграл «Угольник»;
2) «Угольник» забросил 5 шайб;
3) матч закончился вничью;
4) всего в матче было заброшено 11 шайб;
5) выиграл «Циркуль».

Определите, с каким счётом закончился матч, и укажите победителя (в том случае, если матч завершился победой одной из команд).

б) Из пяти следующих утверждений о результатах матча хоккейных команд «Угольник» и «Циркуль» три истинны, а два — нет:

1) выиграл «Угольник»;
2) «Циркуль» забросил 6 шайб;
3) матч закончился вничью;
4) всего в матче было заброшено 15 шайб;
5) выиграл «Циркуль».

Определите, с каким счётом закончился матч, и укажите победителя (в том случае, если матч завершился победой одной из команд).

7. а) Определите, сколько шайб было заброшено в ворота команды «Апельсинус», если из следующих шести утверждений о результате матча хоккейных команд «Кокосинус» и «Апельсинус» четыре истинны, а два — нет:
1) выиграл «Кокосинус»;
2) выиграл «Апельсинус»;
3) матч закончился вничью;
4) в матче было заброшено 14 шайб;
5) «Кокосинус» забросил менее семи шайб;
6) «Апельсинус» забросил менее девяти шайб.

б) Определите, сколько шайб было заброшено в ворота команды «Каштангенс», если из следующих шести утверждений о результате матча хоккейных команд «Апельсинус» и «Каштангенс» четыре истинны, а два — нет:
1) выиграл «Каштангенс»;
2) выиграл «Апельсинус»;
3) матч закончился вничью;
4) в матче было заброшено 12 шайб;
5) «Каштангенс» забросил больше четырёх шайб;
6) «Апельсинус» забросил больше шести шайб.

8. а) Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинно только одно:
1) сумма углов многоугольника больше 500°;
2) сумма углов многоугольника больше 600°;
3) сумма углов многоугольника больше 700°;
4) сумма углов многоугольника больше 800°.

б) Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинно только одно:
1) сумма углов многоугольника меньше 500°;
2) сумма углов многоугольника меньше 600°;
3) сумма углов многоугольника меньше 700°;
4) сумма углов многоугольника меньше 800°.

9. а) Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинны ровно два:
1) сумма углов многоугольника больше 300°;
2) сумма углов многоугольника больше 500°;
3) сумма углов многоугольника больше 700°;
4) сумма углов многоугольника больше 900°.

б) Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинны ровно два:

1) сумма углов многоугольника меньше 400°;
2) сумма углов многоугольника меньше 600°;
3) сумма углов многоугольника меньше 800°;
4) сумма углов многоугольника меньше 1000°.

10. а) Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинны только три:
1) сумма углов многоугольника больше 600°;
2) сумма углов многоугольника больше 700°;
3) сумма углов многоугольника больше 800°;
4) сумма углов многоугольника больше 900°.

б) Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинны только три:
1) сумма углов многоугольника меньше 300°;
2) сумма углов многоугольника меньше 500°;
3) сумма углов многоугольника меньше 700°;
4) сумма углов многоугольника меньше 900°.

11. а) Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если из следующих четырёх утверждений о нём истинны все четыре:
1) сумма углов многоугольника больше 400°;
2) сумма углов многоугольника больше 500°;
3) сумма углов многоугольника меньше 600°;
4) сумма углов многоугольника меньше 700°.

б) Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если среди следующих четырёх утверждений о нём нет ни одного истинного:
1) сумма углов многоугольника меньше 600°;
2) сумма углов многоугольника меньше 700°;
3) сумма углов многоугольника больше 800°;
4) сумма углов многоугольника больше 900°.

12. а) Найдите множество решений некоторого неравенства, если из трёх следующих утверждений два истинны, а одно — нет:
1) множеством решений этого неравенства является интервал $(7; 11)$;
2) множеством решений этого неравенства является интервал $(9; 13)$;
3) число 8 является решением этого неравенства.

б) Найдите множество решений некоторого неравенства, если из трёх следующих утверждений два истинны, а одно — нет:

1) множеством решений этого неравенства является интервал $(-7; 10)$;
2) множеством решений этого неравенства является интервал $(-8; 11)$;
3) число 10 является решением этого неравенства.

13. а) Найдите целое число a, если из двух следующих утверждений верно только одно:
1) $a > -17$; 2) $a > -18$.

б) Найдите целое число a, если из двух следующих утверждений верно только одно:
1) $a < -17$; 2) $a < -18$.

14. а) Какие целые значения может принимать переменная a, если из двух следующих утверждений верно только одно:
1) $a \in (-7; 4)$; 2) $a \in (-8; 6)$?

б) Какие целые значения может принимать переменная a, если из двух следующих утверждений верно только одно:
1) $a \in (-5; 6)$; 2) $a \in (-7; 7)$?

15. а) Какие натуральные значения может принимать переменная a, если из двух следующих утверждений верно только одно:
1) $\frac{1}{25} < \frac{1}{a} < \frac{1}{11}$; 2) $\frac{1}{23} < \frac{1}{a} < \frac{1}{12}$?

б) Какие целые значения может принимать переменная a, если из двух следующих утверждений верно только одно:
1) $-\frac{1}{12} < \frac{1}{a} < -\frac{1}{19}$; 2) $-\frac{1}{13} < \frac{1}{a} < -\frac{1}{17}$?

16. а) Укажите номера тех неравенств, которые не имеют отрицательных решений:
1) $(x+3)^2(x-2) \geqslant 0$;
2) $x^2 - 5x + 4 < 0$;
3) $6 + 5x^2 - 12x^3 < 0$;
4) $x^2 - 123x - 1234 < 0$;
5) $x^2 - x + 123 \leqslant 0$.

б) Укажите номера тех неравенств, которые не имеют положительных решений:
1) $(x-3)^2(x+2) \leqslant 0$;
2) $x^2 - 8x + 16 \leqslant 0$;
3) $11x^3 + 7x^2 + 13x + 5 \leqslant 0$;
4) $x^2 + 432x - 4321 < 0$;
5) $x^2 - x + 432 \leqslant 0$.

17. а) Неравенство $3(x-4)(x-7) \leqslant 11(x-4)(x-7)$:
1) не имеет решений;
2) справедливо только при $x = 4$ или $x = 7$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо при всех $x \in [4; 7]$;

5) справедливо при всех $x \in (-\infty; 4] \cup [7; +\infty)$.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $13(x-5)(x-6) \leqslant 6(x-5)(x-6)$:

1) не имеет решений;
2) справедливо только при $x=5$ или $x=6$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо при всех $x \in [5; 6]$;
5) справедливо при всех $x \in (-\infty; 5] \cup [6; +\infty)$.

Укажите номера истинных утверждений.

18. а) Система неравенств $\begin{cases} x \geqslant -31, \\ 17x^{17} + 12x^{12} + 4 < 0: \end{cases}$

1) не имеет решений;
2) не имеет положительных решений;
3) не имеет отрицательных решений;
4) имеет и отрицательные, и положительные решения;
5) выполняется при любом действительном x.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Система неравенств $\begin{cases} x \leqslant 21, \\ 15x^{13} - 10x^{10} - 4 > 0: \end{cases}$

1) не имеет решений;
2) не имеет положительных решений;
3) не имеет отрицательных решений;
4) имеет и отрицательные, и положительные решения;
5) выполняется при любом действительном x.

Укажите номера истинных утверждений.

19. а) Система неравенств $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 5 > 0, \\ x \leqslant 5: \end{cases}$

1) не имеет решений;
2) имеет только отрицательные решения;
3) имеет только положительные решения;
4) имеет и отрицательные, и положительные решения;
5) выполняется при любом действительном x.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Система неравенств $\begin{cases} x^3 + 2x^2 + 3 < 0, \\ x \geqslant -4: \end{cases}$

1) не имеет решений;
2) имеет только отрицательные решения;
3) имеет только положительные решения;
4) имеет и отрицательные, и положительные решения;

5) выполняется при любом действительном x.

Укажите номера истинных утверждений.

20. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}(x-3)(x-4)+x-3\leqslant 0,\\ x^{17}-3x^{16}+4x-11>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x-5)(x-6)+x-5\leqslant 0,\\ x^{19}-5x^{18}+3x-14>0.\end{cases}$

21. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}(x^2+2x-15)^2\leqslant 0,\\ x^{15}-3x^{14}+2x-5>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x^2-3x-18)^2\leqslant 0,\\ x^{13}+3x^{12}+4x+11<0.\end{cases}$

22. а) Неравенство $\dfrac{4x^2+5}{6x^2+5}>\dfrac{3x^2+4}{7x^2+6}$:

1) не имеет решений;
2) справедливо только при $x>1$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо только при $x<1$.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $\dfrac{7x^2+5}{3x^2+4}<\dfrac{5x^2+4}{4x^2+5}$:

1) не имеет решений;
2) справедливо только при $x<1$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо только при $x<1$.

Укажите номера истинных утверждений.

23. а) Неравенство $\dfrac{4}{x+9}<\dfrac{5}{x+9}$:

1) не имеет решений;
2) справедливо при всех $x\neq -9$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо только при $x>-9$;
5) справедливо только при $x<-9$.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $\dfrac{7}{x-8}<\dfrac{6}{x-8}$:

1) не имеет решений;
2) справедливо при всех $x\neq 8$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо только при $x>8$;
5) справедливо только при $x<8$.

Укажите номера истинных утверждений.

24. а) Неравенство $\dfrac{(x^2-121)(x+11)}{x-11} > 0$:

1) не имеет решений;
2) справедливо при всех x, отличных от -11 и 11;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо при всех x, отличных от -11;
5) справедливо при всех x, отличных от 11.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $\dfrac{(x^2-144)(x-12)}{x+12} \geqslant 0$:

1) не имеет решений;
2) справедливо при всех x, отличных от -12 и 12;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо при всех x, отличных от -12;
5) справедливо при всех x, отличных от 12.

Укажите номера истинных утверждений.

25. а) Неравенство $\dfrac{2x-7}{x^2-4} > \dfrac{2x-15}{x^2-4}$:

1) не имеет решений;
2) справедливо при всех x, отличных от -2 и 2;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо при всех $x \in (-2; 2)$;
5) справедливо при всех $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $\dfrac{3x-11}{x^2-9} > \dfrac{3x-7}{x^2-9}$:

1) не имеет решений;
2) справедливо при всех x, отличных от -3 и 3;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо при всех $x \in (-3; 3)$;
5) справедливо при всех $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Укажите номера истинных утверждений.

26. а) Какие из следующих неравенств имеют только положительные решения:

1) $\dfrac{7}{x^3} + \dfrac{3}{x} - 9 > 0$; 3) $\dfrac{1}{9x^5-3x^2-4} > 0$;

2) $\dfrac{(x+3)^2}{x-17} \geqslant 0$; 4) $\dfrac{15}{3x^5+5x^3-2} > -\dfrac{8}{x}$?

б) Какие из следующих неравенств имеют только отрицательные решения:

1) $\dfrac{5}{x^3} + \dfrac{3}{x} + 2 < 0$; 3) $\dfrac{1}{5x^5-3x^2-4} < 0$;

2) $\dfrac{(x-3)^2}{x+13} \leqslant 0$; 4) $\dfrac{12}{2x^5+3x^3+4} < -\dfrac{7}{x}$?

27. а) Неравенство $\dfrac{87}{\sqrt{3x^2+5}} > \dfrac{35}{\sqrt{8x^2+7}}$:

1) не имеет решений;
2) справедливо при всех $x \neq 0$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо только при $x=0$.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $\dfrac{95}{\sqrt{7x^2+3}} < \dfrac{73}{\sqrt{9x^2+5}}$:

1) не имеет решений;
2) справедливо при всех $x \neq 0$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо только при $x=0$.

Укажите номера истинных утверждений.

28. а) Неравенство $\dfrac{7}{\sqrt{x}+6} < \dfrac{6}{\sqrt{x}+7}$:

1) не имеет решений;
2) справедливо при всех $x \neq 0$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо только при $x \geqslant 0$;
5) справедливо только при $x=0$.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $\dfrac{4}{\sqrt{x}+5} < \dfrac{5}{\sqrt{x}+4}$:

1) не имеет решений;
2) справедливо при всех $x \neq 0$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо только при $x \geqslant 0$;
5) справедливо только при $x=0$.

Укажите номера истинных утверждений.

29. а) Неравенство $\dfrac{9}{\sqrt{x-9}+10} < \dfrac{10}{\sqrt{x-10}+9}$:

1) справедливо при $x \in [9;\ 10]$;
2) справедливо при $x=9$;
3) справедливо при $x=10$;
4) справедливо при любом действительном x;
5) справедливо при всех $x \geqslant 9$;
6) справедливо при всех $x \geqslant 10$.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $\dfrac{7}{\sqrt{x-7}+5} > \dfrac{5}{\sqrt{x-5}+7}$:

1) справедливо при $x \in [5;\, 7]$;
2) справедливо при $x = 7$;
3) справедливо при $x = 5$;
4) справедливо при любом действительном x;
5) справедливо при всех $x \geqslant 7$;
6) справедливо при всех $x \geqslant 5$.

Укажите номера истинных утверждений.

30. а) Неравенство $\dfrac{1}{6\sqrt{x-5}+5} \geqslant \dfrac{1}{7\sqrt{x-5}+5}$:

1) не имеет решений;
2) справедливо при всех $x \neq 5$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо при всех $x \geqslant 5$;
5) справедливо при всех $x \leqslant 5$.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $\dfrac{1}{9\sqrt{7-x}+7} \leqslant \dfrac{1}{8\sqrt{7-x}+7}$:

1) не имеет решений;
2) справедливо при всех $x \neq 7$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо при всех $x \geqslant 7$;
5) справедливо при всех $x \leqslant 7$.

Укажите номера истинных утверждений.

31. а) Какие из следующих неравенств имеют только положительные решения:

1) $\sqrt{17x-1} \geqslant x-17$;
3) $(x+17)\sqrt{x-17} \geqslant 0$;
2) $(x-17)\sqrt{x+17} \geqslant 0$;
4) $\sqrt{17-x} < x$?

б) Какие из следующих неравенств имеют только отрицательные решения:

1) $\sqrt{15x-1} \geqslant x-15$;
3) $(15-x)\sqrt{15+x} \leqslant 0$;
2) $(x-15)\sqrt{-x-15} \leqslant 0$;
4) $\sqrt{15-x} > x$?

Решите систему неравенств.

32. а) $\begin{cases} x+\sqrt{x-5} \leqslant 10+\sqrt{x-5}, \\ x+\sqrt{x+10} \leqslant 5+\sqrt{x+10}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x+\sqrt{7+x} \geqslant 4+\sqrt{7+x}, \\ x+\sqrt{4-x} \geqslant -7+\sqrt{4-x}. \end{cases}$

33. а) $\begin{cases} x^2-\sqrt{36-x^2} \geqslant 36-\sqrt{36-x^2}, \\ x^{35}+x^{33} < x^{34}+x^{32}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2-\sqrt{x^2-49}\leqslant 49-\sqrt{x^2-49}, \\ x^{49}+x^{47}<x^{48}+x^{46}. \end{cases}$

34. а) $\begin{cases} \sqrt{x^2-x-12}\leqslant 0, \\ \sqrt{x^{13}-4x^{12}+5x-19}>0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \sqrt{x^2+x-20}\leqslant 0, \\ \sqrt{-x^{17}+4x^{16}-7x-27}>0. \end{cases}$

35. а) $\begin{cases} y^2+2\sqrt{x-5}+1\geqslant y+6, \\ x+\sqrt{4-y^2}\leqslant 5; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2+3\sqrt{y-4}\geqslant x+12, \\ y+\sqrt{9-x^2}\leqslant 4. \end{cases}$

36. а) $\begin{cases} \sqrt{x^2-5x+4}\geqslant x^2-4x, \\ \sqrt{x^2-5x+4}\leqslant x-4; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \sqrt{x^2-7x+6}\geqslant x^2-6x, \\ \sqrt{x^2-7x+6}\leqslant x-6. \end{cases}$

37. а) $\begin{cases} \sqrt{x^{77}-5x^{75}-\sqrt{5}x+620}\leqslant 10x^2-25, \\ \sqrt{x^{77}-5x^{75}-\sqrt{5}x+620}\geqslant x^4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x^{89}-2x^{87}+\sqrt{2}x+14}\leqslant 4x^2-4, \\ \sqrt{x^{89}-2x^{87}+\sqrt{2}x+14}\geqslant x^4. \end{cases}$

38. а) Неравенство $\cos^8 x<\cos^{15} x$:
1) не имеет решений;
2) справедливо при всех x, для которых $\cos x\neq 0$ и $\cos x\neq 1$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо при всех x, для которых $\cos x>0$;
5) справедливо при всех x, для которых $\cos x<0$.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $\sin^{10} x>\sin^{17} x$:
1) не имеет решений;
2) справедливо при всех x, для которых $\sin x\neq 0$ и $\sin x\neq 1$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо при всех x, для которых $\sin x>0$;
5) справедливо при всех x, для которых $\sin x<0$.

Укажите номера истинных утверждений.

39. а) Неравенство $\sqrt[30]{\sin x}\leqslant \sqrt[15]{\sin x}$:
1) не имеет решений;
2) справедливо только при тех x, для которых $\sin x\neq 0$ и $\sin x\neq 1$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо только при тех x, для которых $\sin x=0$ или $\sin x=1$;
5) справедливо при всех x, для которых $\sin x\geqslant 0$.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $\sqrt[20]{\cos x} \geqslant \sqrt[10]{\cos x}$:

1) не имеет решений;
2) справедливо только при тех x, для которых $\cos x \neq 0$ и $\cos x \neq 1$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо только при тех x, для которых $\cos x = 0$ или $\cos x = 1$;
5) справедливо только при тех x, для которых $\cos x \geqslant 0$.

Укажите номера истинных утверждений.

40. а) Неравенство $\sqrt[9]{\cos x} \geqslant \cos^9 x$:

1) не имеет решений;
2) справедливо при любом действительном x;
3) справедливо при всех x, для которых $\cos x \geqslant 0$ или $\cos x = -1$;
4) справедливо при всех x, для которых $\cos x \leqslant 0$ или $\cos x = 1$;
5) справедливо только при тех x, для которых $\cos x \geqslant 0$.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $\sqrt[7]{\sin x} \leqslant \sin^7 x$:

1) не имеет решений;
2) справедливо при любом действительном x;
3) справедливо при всех x, для которых $\sin x \leqslant 0$ или $\sin x = 1$;
4) справедливо при всех x, для которых $\sin x \geqslant 0$ или $\sin x = -1$;
5) справедливо только при тех x, для которых $\sin x \geqslant 0$.

Укажите номера истинных утверждений.

Решите систему неравенств.

41. а) $\begin{cases} \sin^2(5\pi x) \leqslant 5 - x, \\ \cos^2(5\pi x) \leqslant 2x - 9; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \sin^2(7\pi x) \geqslant 16 - 2x, \\ \cos^2(7\pi x) \geqslant x - 7. \end{cases}$

42. а) $\begin{cases} \cos(\pi x) \geqslant 2x - 3, \\ \cos(\pi x) \geqslant 5 - 2x; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \sin(\pi x) \leqslant 5 - 4x, \\ \sin(\pi x) \leqslant 4x - 7. \end{cases}$

43. а) $\begin{cases} \cos(\pi x) \leqslant x, \\ \cos(\pi x) \geqslant 2x + 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \sin(\pi x) \leqslant 4x - 1, \\ \sin(\pi x) \geqslant 2x. \end{cases}$

44. а) $\begin{cases} x \leqslant 4\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) - 3, \\ x \geqslant 3\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) - 2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x \leqslant 2\cos(\pi x) + 1, \\ x \geqslant 3\cos(\pi x) + 2. \end{cases}$

45. а) $\begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-4)}{\sin(4\pi x) - 1} \geqslant 0, \\ \dfrac{(x+1)(x-4)}{\cos(\pi x) - 1} \leqslant 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{(2x-3)(x+3)}{1 + \sin(\pi x)} \leqslant 0, \\ \dfrac{(2x-3)(x+3)}{1 + \cos(4\pi x)} \geqslant 0. \end{cases}$

46. а) $\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x-3)(x-4)}{\sin(\frac{\pi x}{2})+1} \leqslant 0, \\ \dfrac{(x+2)(x-3)(x-4)}{\cos(\frac{\pi x}{2})+1} \geqslant 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{(x+4)(x+3)(x-2)}{\sin(\frac{\pi x}{2})-1} \geqslant 0, \\ \dfrac{(x+4)(x+3)(x-2)}{\cos(\frac{\pi x}{2})-1} \leqslant 0. \end{cases}$

47. а) Какие из следующих неравенств имеют хотя бы одно отрицательное решение:

1) $(3^x-1)(13^x-1)(23^x-1)<0$;
2) $(13^x-1)(14^x-1)<0$;
3) $(3^{x+2}-1)^2(2^x-1)\geqslant 0$;
4) $8^x-12^{1-x}+11<0$?

б) Какие из следующих неравенств имеют хотя бы одно положительное решение:

1) $((0{,}3)^x-1)((0{,}13)^x-1)((0{,}23)^x-1)>0$;
2) $((0{,}13)^x-1)((0{,}14)^x-1)>0$;
3) $(2^{x+3}-1)^2(3^x-1)\leqslant 0$;
4) $(0{,}8)^x-12^{1+x}+11<0$?

48. а) Неравенство $\dfrac{3^x+7}{3^x+5}<\dfrac{3^x+8}{3^x+4}$:

1) справедливо только при $x>0$;
2) справедливо только при $x<0$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) не имеет решений.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $\dfrac{6^x+8}{6^x+4}<\dfrac{6^x+7}{6^x+5}$:

1) справедливо только при $x>0$;
2) справедливо только при $x<0$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) не имеет решений.

Укажите номера истинных утверждений.

49. а) Неравенство $3^x-12x+10>0$:

1) не имеет положительных решений;
2) не имеет отрицательных решений;
3) справедливо при любом положительном x;
4) справедливо при любом отрицательном x.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $(0{,}3)^x-10x+11<0$:

1) не имеет положительных решений;
2) не имеет отрицательных решений;
3) справедливо при любом положительном x;
4) справедливо при любом отрицательном x.

Укажите номера истинных утверждений.

50. а) Неравенство $\dfrac{7}{2^x-8} > \dfrac{8}{2^x-8}$:

1) справедливо при всех $x \neq 3$;
2) справедливо только при $x > 3$;
3) справедливо только при $x < 3$;
4) справедливо при любом действительном x;
5) не имеет решений.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $\dfrac{6}{3^x-9} > \dfrac{5}{3^x-9}$:

1) справедливо при всех $x \neq 2$;
2) справедливо только при $x > 2$;
3) справедливо только при $x < 2$;
4) справедливо при любом действительном x;
5) не имеет решений.

Укажите номера истинных утверждений.

51. а) Неравенство $(5-7x)(5x-7^x) \leqslant 0$:

1) не имеет решений;
2) не имеет положительных решений;
3) не имеет отрицательных решений;
4) справедливо при любом положительном x;
5) справедливо при любом отрицательном x.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $(7-8x)(8x-7^x) \geqslant 0$:

1) не имеет решений;
2) не имеет положительных решений;
3) не имеет отрицательных решений;
4) справедливо при любом положительном x;
5) справедливо при любом отрицательном x.

Укажите номера истинных утверждений.

52. а) Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$11^{\frac{25}{(x-11)(x-15)}} > 10^{\sqrt{x-11}}.$$

б) Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$(0{,}1)^{\frac{25}{(x-13)(x-19)}} > 9^{\sqrt{x-13}}.$$

Решите неравенство.

53. а) $\sqrt{x-4}\,(5^{x-3}+6^{x-2}-40) \leqslant 0$; **б)** $\sqrt{5-x}\,(4^{x-6}+3^{x-7}-0{,}5) \geqslant 0$.

54. а) $(5\sin x+11^{x-8}-6)\sqrt{x-9} \leqslant 0$; **б)** $(7\cos x-13^{x-7}+6)\sqrt{x-8} \geqslant 0$.

55. а) $\sqrt{4^x-17\cdot 2^x+16}+\sqrt{4x-x^2}+\sqrt{x+1}\geqslant 2$;

б) $\sqrt{9^x-10\cdot 3^x+9}+\sqrt{2x-x^2}+\sqrt{x+8}\leqslant 3$.

Решите систему неравенств.

56. а) $\begin{cases} x^2+7^x+4\leqslant 57,\\ 4x+7^x\geqslant 57; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2+3^x+9\leqslant 45,\\ 6x+3^x\geqslant 45. \end{cases}$

57. а) $\begin{cases} 13^{x-6}+\sqrt{x-7}\geqslant 13,\\ 7^{x-12}-\sqrt{13-x}<7; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 11^{x-4}+\sqrt{x-5}>11,\\ 5^{x-10}-\sqrt{11-x}\leqslant 5. \end{cases}$

58. а) $\begin{cases} x^2-5x\leqslant 0,\\ \dfrac{x^2-7x+10}{7^{x-6}+6^{x-7}-2}\leqslant 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2-7x\leqslant 0,\\ \dfrac{x^2-10x+21}{9^{x-8}+8^{x-9}-2}\leqslant 0. \end{cases}$

59. а) Какие из следующих неравенств имеют хотя бы одно положительное решение:

1) $\ln(x^3-5x+4)<\lg(-x-3)$; 3) $(x+5)\log_2(x^5-7x^4+0{,}7)<0$;

2) $\sqrt{-\log_6(x+1)}>1$; 4) $\log_{73}(1-37x)>x^{37}+73$?

б) Какие из следующих неравенств имеют хотя бы одно отрицательное решение:

1) $\ln(x^3+4x^2+3)>\lg(-x-3)$; 3) $(x+6)\log_2(x^5-6x^4-0{,}6)>0$;

2) $\sqrt{\log_7(x+1)}<2$; 4) $\log_{91}(19x+1)>91-x^{19}$?

60. а) Неравенство $\log_7(6x+1)+8x>0$:

1) не имеет положительных решений;
2) не имеет отрицательных решений;
3) справедливо при любом положительном x;
4) справедливо при любом отрицательном x;
5) справедливо при всех $x>-\dfrac{1}{6}$.

Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $\log_5(1-9x)-4x>0$:

1) не имеет положительных решений;
2) не имеет отрицательных решений;
3) справедливо при любом положительном x;
4) справедливо при любом отрицательном x;
5) справедливо при всех $x<\dfrac{1}{9}$.

Укажите номера истинных утверждений.

61. а) Неравенство $\log_3((x-5)^2+3)+\log_7((x-5)^2+49)\leqslant 3$:

1) справедливо при всех $x\neq 5$;
2) справедливо только при $x=5$;

3) справедливо при любом действительном x;
4) не имеет решений.
Укажите номера истинных утверждений.

б) Неравенство $\log_5((x+6)^2+5)+\log_2((x+6)^2+8)>4$:
1) справедливо при всех $x\neq -6$;
2) справедливо только при $x=-6$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) не имеет решений.
Укажите номера истинных утверждений.

Решите неравенство.

62. а) $\log^2_{x-2}(4-x)\geqslant 0$; **б)** $\log^2_{x-3}(7-x)>0$.

63. а) $\log_{x-17}(20-x)<\log_{x-17}(20-x)+|x-19|$;

б) $\log_{x-13}(16-x)<\log_{x-13}(16-x)+|x-15|$.

Решите систему неравенств.

64. а) $\begin{cases}\sqrt{x-5}\log_7(6-x)\leqslant 0,\\ \sqrt{x-5}+\log_4(x-4)>0;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}\sqrt{x-7}\log_5(8-x)\leqslant 0,\\ \sqrt{x-7}+\log_2(x-6)>0.\end{cases}$

65. а) $\begin{cases}\sqrt{x+7}+\log_8(x+8)\geqslant 0,\\ x^2+4x-21\geqslant 0;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}\sqrt{x+5}+\log_6(x+6)\geqslant 0,\\ x^2+3x-10\geqslant 0.\end{cases}$

66. а) $\begin{cases}\log^2_6(x^2+x-11)\leqslant x-3,\\ \log^2_3(x^2+2x-14)\leqslant 3-x;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}\log^2_7(x^2-2x-7)\leqslant x-4,\\ \log^2_5(x^2+2x-23)\leqslant 4-x.\end{cases}$

67. а) $\begin{cases}10\log_3(x+6)\geqslant x^2+11,\\ 10\log_3(x+6)\leqslant 6x+2;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}17\log_2(x+3)\geqslant x^2+26,\\ 17\log_2(x+3)\leqslant 10x+1.\end{cases}$

68. а) $\begin{cases}\log^{13}_5(x-5)\cdot\log^5_{13}(13-x)>0,\\ \log^{13}_5(x-5)+\log^5_{13}(13-x)>0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\log^7_7(x-7)\cdot\log^{11}_{11}(11-x)>0,\\ \log^7_7(x-7)+\log^{11}_{11}(11-x)>0.\end{cases}$

69. а) $\begin{cases}\log^7_2(2x-7)\cdot\lg^3(3x-10)>0,\\ \log^7_2(2x-7)+\lg^3(3x-10)<0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\log^9_2(2x-9)\cdot\log^{13}_3(3x-13)>0,\\ \log^9_2(2x-9)+\log^{13}_3(3x-13)<0.\end{cases}$

70. а) $\begin{cases}(4x^2-25)\cdot\log_6(x+3)<0,\\ \log_6(x+3)+25<4x^2;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}(4x^2-49)\cdot\log_7(x+4)<0,\\ \log_7(x+4)+49<4x^2.\end{cases}$

§ 1.2. Метод интервалов

Перейдём теперь к описанию наиболее общих методов решения неравенств с одной переменной, применимых к решению неравенств каждой из семи функционально-алгебраических линий школьного курса математики. Начнём с метода интервалов.

Любое алгебраическое выражение $f(x)$ можно использовать для задания функции $y=f(x)$. Это обстоятельство позволяет иногда для краткости употреблять словосочетание «функция $f(x)$» вместо «функция $y=f(x)$» и делает возможной наглядную интерпретацию неравенства вида $f(x) \vee 0$ (здесь знаком «$\vee$» обозначен один из четырёх возможных знаков неравенств «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$»). Решить такое неравенство — значит найти все значения переменной x, при которых график функции $y=f(x)$ расположен выше (ниже, не выше, не ниже — в зависимости от знака неравенства) оси абсцисс. Так, для функции $y=f(x)$, график которой, состоящий из нескольких частей, изображён на рис. 1, множеством решений неравенства $f(x) \leqslant 0$ является множество $[x_1; x_2) \cup [x_3; x_4) \cup [x_5; x_6]$, а множеством решений неравенства $f(x)>0$ — множество

$$(-\infty; x_1) \cup (x_2; x_3) \cup (x_4; x_5) \cup (x_6; +\infty).$$

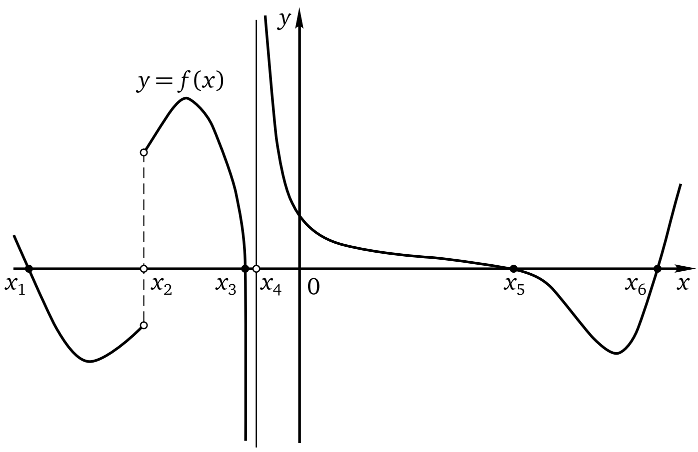


Рис. 1

Для функции $y=g(x)$, график которой (также состоящий из нескольких частей) изображён на рис. 2, множеством решений неравенства $g(x) \geqslant 0$ является множество

$$(-\infty; x_1] \cup (x_2; x_3] \cup \{x_4\} \cup [x_5; x_6) \cup [x_7; x_8) \cup [x_8; x_{10}],$$

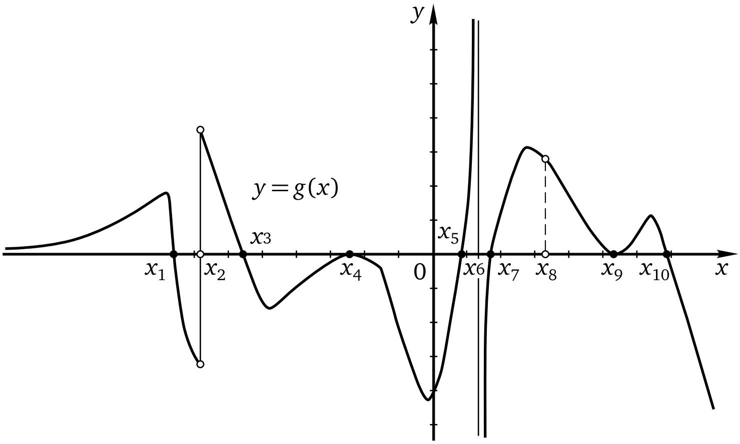


Рис. 2

а множеством решений неравенства $g(x)<0$ — множество

$$(x_1; x_2)\cup(x_3; x_4)\cup(x_4; x_5)\cup(x_6; x_7)\cup(x_{10}; +\infty).$$

Аналогичным образом, рассматривая графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, можно наглядно интерпретировать неравенство вида $f(x)\vee\vee g(x)$ (здесь знак «$\vee$» по-прежнему обозначает один из знаков «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$»). Так, для функций, графики которых изображены на рис. 3, множеством решений неравенства $f(x)\leqslant g(x)$ является объединение отрезков $[-4; -1]\cup[4; 5]$, а множеством решений неравенства $f(x)>g(x)$ является интервал $(-1; 4)$. Обратим внимание на то, что в данном случае области определения функций различны (это обстоятельство нужно обязательно учитывать при записи ответа): функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[-5; 6]$, функция $y=g(x)$ определена на отрезке $[-4; 5]$.

Весьма существенным при записи решений приведённых выше неравенств является тот факт, что каждая из функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ непрерывна в каждой части своей области определения. Понятие непрерывности довольно сложное в смысле формального описания; для решения задач школьного курса достаточно представления о непрерывной функции как о функции, график которой в каждой части области определения может быть изображён непрерывной линией. Это означает, в частности, что изменить знак функция может только двумя «способами»: либо в тех точках, в которых она не является непрерывной (в некоторых из таких точек её график как бы «перескакивает» через

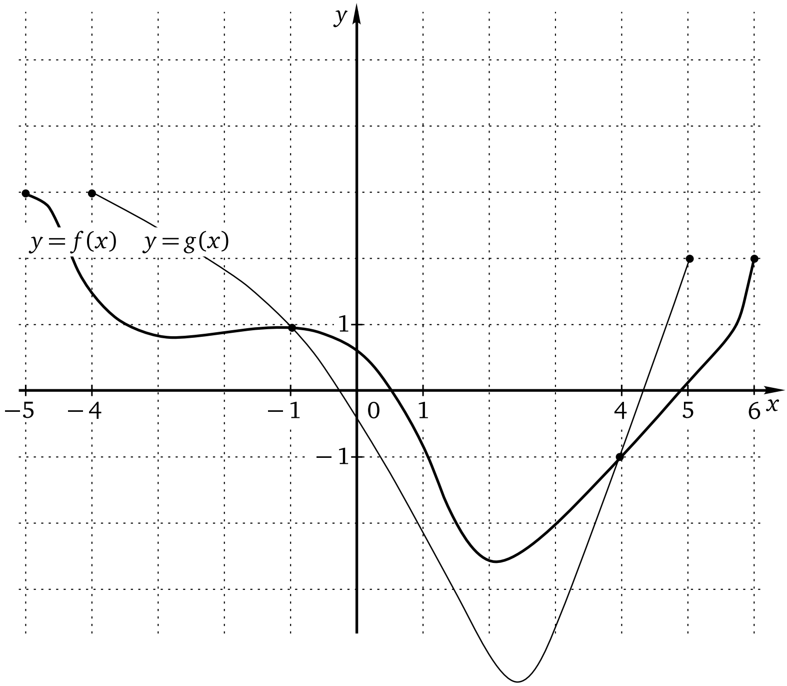


Рис. 3

ось абсцисс: на рис. 1 это точки x_2 и x_4, на рис. 2 — точки x_2 и x_6), либо в тех точках, где её график пересекает ось абсцисс (напомним, что эти точки являются корнями уравнения $f(x)=0$ и называются *нулями функции* $y=f(x)$: на рис. 1 это точки x_1, x_3, x_5, x_6, на рис. 2 — точки x_1, x_3, x_4, x_6, x_7, x_9, x_{10}). Отсюда вытекает общий для таких функций метод решения неравенств, называемый *методом интервалов*, алгоритм которого состоит из следующих шагов.

Алгоритм метода интервалов

1. Приводим, используя равносильные преобразования, данное неравенство к виду $f(x) \vee 0$, где знаком «$\vee$» обозначен один из четырёх знаков неравенств: «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$» (такой вид неравенства будем называть *стандартным*). В случае, если неравенство сразу дано в стандартном виде, этот шаг пропускается.

2. Находим область определения функции $y=f(x)$ (напомним, что область определения функции обозначается $D_{f(x)}$, D_f, $D(f(x))$ или $D(f)$ по первой букве слова «определение» на латыни или любом романском

языке) и отмечаем её на числовой прямой (числовой оси). Заметим, что часто бывает целесообразно в начале решения сразу найти ОДЗ данного неравенства, а потом уже приводить неравенство к стандартному виду, поскольку ОДЗ неравенства и D_f в данном случае являются одним и тем же множеством (разумеется, если для приведения неравенства к стандартному виду использовать равносильные преобразования).

3. Находим нули функции $y=f(x)$, т. е. корни уравнения $f(x)=0$, и отмечаем их на числовой оси. Если данное неравенство является строгим, то нули отмечаются особым образом («выкалываются») и обычно изображаются пустыми кружочками. Если неравенство является нестрогим, нули функции должны обязательно попасть в ответ, и, чтобы не забыть ни один из них, лучше изобразить их жирными — бросающимися в глаза — кружочками (как своего рода «сигнальные фонари»). Нули функции разбивают её область определения на несколько интервалов. В каждом из этих интервалов функция определена, непрерывна и не обращается в нуль, поэтому поменять знак ни в одной из точек интервала не может и, следовательно, принимает в каждом из полученных интервалов значения одного знака.

4. Решаем неравенство методом интервалов, определяя знак функции $y=f(x)$ в каждом из полученных интервалов — например, по её знаку в одной из точек интервала (такие точки иногда называют пробными). Записываем ответ.

Замечание. Если точка является нулём функции или не принадлежит области определения функции, это не означает, что в такой точке функция «автоматически» меняет знак. Так, функция, график которой изображён на рис. 2, не меняет знак ни в одной из точек x_4, x_8, x_9. Таким образом, промежутки знакоположительности и промежутки знакоотрицательности функции не обязательно чередуются. Поэтому на экзамене лучше подстраховаться и «честно» определить знак функции в каждом интервале.

Пример 1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-1} \leqslant \frac{\sqrt{x^2-4}}{x+1}.$$

Р е ш е н и е. 1. Перенесём все алгебраические выражения в левую часть неравенства:

$$\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x+1} \leqslant 0.$$

Вынесем общий множитель:

$$\sqrt{4-x^2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right) \leqslant 0.$$

Приведём разность дробей в скобках к общему знаменателю:

$$\sqrt{4-x^2}\,\frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0.$$

Выполним действия в числителе и запишем неравенство в виде

$$\frac{2\sqrt{4-x^2}}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0.$$

Обозначим левую часть полученного неравенства через $f(x)$.

2. Найдём область определения функции $y=f(x)$. Она задаётся системой неравенств

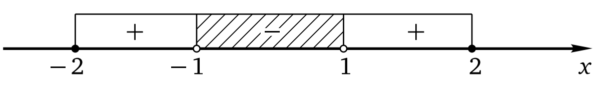
$$\begin{cases} 4-x^2 \geqslant 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Первое неравенство системы можно переписать в виде $x^2-4 \leqslant 0$, откуда $(x-2)(x+2) \leqslant 0$, т. е. $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Таким образом,

$$D_f = [-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2].$$

3. Найдём нули функции $y=f(x)$, т. е. корни уравнения $f(x)=0$. В данном случае это сделать совсем просто: нулями являются числа $x=-2$ и $x=2$.

4. Решим неравенство $\dfrac{2\sqrt{4-x^2}}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0$ методом интервалов:



Для рассматриваемого неравенства определение знака функции $f(x)$ на каждом из интервалов не представляет труда, ведь числитель $2\sqrt{4-x^2}$ дроби $\dfrac{2\sqrt{4-x^2}}{(x-1)(x+1)}$ неотрицателен в области определения, а знак знаменателя $(x-1)(x+1)$ легко определить, воспользовавшись свойствами квадратного трёхчлена или пробными точками: очевидно, что, например, при $x=1{,}5$ знаменатель положителен, при $x=0$ — отрицателен, при $x=-1{,}5$ — положителен. В ответе записываем промежуток, помеченный знаком «$-$», и не принадлежащие ему нули функции $f(x)$, выделенные жирными точками.

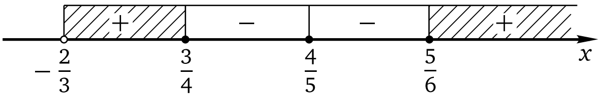
Ответ: $\{-2; 2\} \cup (-1; 1)$.

Разумеется, при решении неравенств методом интервалов не обязательно в явном виде указывать каждый шаг алгоритма решения, главное — иметь ясное представление о том, что все его шаги сделаны.

Пример 2. Решите неравенство

$$\lg(3x+2)+(4x-3)^3(5x-4)^4(6x-5)^5 \geqslant \lg(3x+2).$$

Решение. Левая и правая части неравенства определены при $x > -\frac{2}{3}$. При допустимых значениях переменной неравенство легко приводится к стандартному виду $(4x-3)^3(5x-4)^4(6x-5)^5 \geqslant 0$. Левая часть полученного неравенства (обозначим её $f(x)$) обращается в нуль при $x=\frac{3}{4}$, $x=\frac{4}{5}$, $x=\frac{5}{6}$. Эти числа разбивают луч $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ на четыре интервала. Поскольку неравенство является нестрогим, каждое из этих чисел является его решением. Для того чтобы не забыть включить эти числа в ответ, отметим соответствующие им точки числовой оси так, чтобы не «потерять» их, т. е. жирными кружочками (теми самыми «сигнальными фонарями», о которых речь шла выше). Применим метод интервалов, определив знак функции $f(x)$ в каждом из полученных интервалов.



Ясно, что при $x > \frac{5}{6}$ (например, при $x=100$) любой из множителей левой части неравенства $(4x-3)^3(5x-4)^4(6x-5)^5 \geqslant 0$ положителен, поэтому $f(100)>0$. Следовательно, $f(x)>0$ при всех $x>\frac{5}{6}$. Выбрать «хорошее» число для определения знака $f(x)$ на следующем числовом промежутке $\left(\frac{4}{5}; \frac{5}{6}\right)$ затруднительно, поскольку он не содержит ни одного целого числа. В таких случаях обычно используют рассуждения вроде следующих. Если $x \in \left(\frac{4}{5}; \frac{5}{6}\right)$, то $x<\frac{5}{6}$. Поэтому $(6x-5)^5<0$. Далее, если $x>\frac{4}{5}$, то $(5x-4)^4>0$ и $(4x-3)^3>0$. Значит, $f(x)<0$ на $\left(\frac{4}{5}; \frac{5}{6}\right)$ (как произведение трёх множителей, один из которых отрицателен, а два положительны). Дальнейшее определение знаков проводится аналогично. В ответ включаются промежутки, помеченные знаком «$+$», и не принадлежащие таким промежуткам нули функции $f(x)$

(выписываем их, смотря на «сигнальные фонари»: в данном случае это $x=\frac{4}{5}$).

Ответ: $\left(-\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right]\cup\left\{\frac{4}{5}\right\}\cup\left[\frac{5}{6};+\infty\right)$.

Замечание. С помощью рассуждений, аналогичных сделанным при решении примера 1, можно найти промежутки знакоположительности и знакоотрицательности функции, не определяя её знак в конкретной точке каждого из полученных интервалов. Это обычно возможно для тех неравенств, левая часть которых представляет собой произведение или частное нескольких (как правило, линейных) множителей. Если же эти множители не являются линейными и имеют довольно сложный вид, целесообразно сначала определить знак каждого из них, а затем уже — знак произведения или частного. В таких случаях это удобно делать с помощью одного рисунка, на котором изображены одна под другой оси с отмеченной ОДЗ неравенства и нулями для каждого из множителей и для их произведения (частного), т. е. для левой части неравенства, так, что получается своего рода «таблица». В «строчках» этой «таблицы» расставляют знаки множителей, а затем «по столбцам» определяют знак их произведения или частного. Как это делается, проиллюстрируем примером.

Пример 3. Решите неравенство

$$\frac{(|x-3|-x-13)(\sqrt{x+6}-2x+3)}{x^2-16}\leqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Неравенство дано в стандартном виде. Разложим знаменатель на множители по формуле разности квадратов и обозначим через $f(x)$ левую часть полученного неравенства

$$\frac{(|x-3|-x-13)(\sqrt{x+6}-2x+3)}{(x-4)(x+4)}\leqslant 0.$$

Область определения D_f, или — что в данном случае то же самое — ОДЗ неравенства, задаётся системой

$$\begin{cases} x\geqslant -6,\\ x\neq \pm 4.\end{cases}$$

Найдём нули функции $f(x)$. Для этого решим уравнения $|x-3|=x+13$ и $\sqrt{x+6}=2x-3$. Первое уравнение (см. таблицу 2 в § 1.1) приводится к виду

$$\begin{cases} x\geqslant -13,\\ \left[\begin{array}{l} x-3=x+13,\\ x-3=-x-13,\end{array}\right.\end{cases}$$

откуда $x=-5$. Второе уравнение (см. таблицу 2 в § 1.1) приводится к виду

$$\begin{cases} x \geqslant 1{,}5, \\ x+6=4x^2-12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1{,}5, \\ 4x^2-13x+3=0. \end{cases}$$

Корнями уравнения последней системы являются $x=\frac{1}{4}$ и $x=3$, из них только $x=3$ удовлетворяет неравенству системы. Заметим, что для $x=$ $=-5$ и $x=3$ выполняются неравенства

$$\begin{cases} x \geqslant -6, \\ x \neq \pm 4. \end{cases}$$

Следовательно, эти числа и являются нулями функции $f(x)$. Теперь можно применить метод интервалов, изобразив соответствующую «таблицу», первые три строки которой, начиная с верхней, предназначены для определения промежутков знакоположительности и знакоотрицательности алгебраических выражений $|x-3|-x-13$, $\sqrt{x+6}-2x+3$ и $(x-4)(x+4)$, а последняя (нижняя) — для определения промежутков знакоположительности и знакоотрицательности функции $f(x)$. При этом на каждой оси отмечаются не все нули, а только нули соответствующих множителей (см. рис. 4). Поскольку единственным нулём

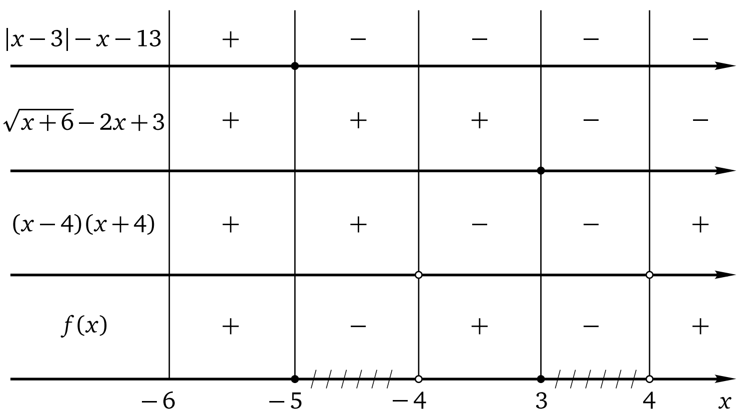


Рис. 4

алгебраического выражения $f_1(x)=|x-3|-x-13$ является $x=-5$, с помощью «пробных» точек легко определить, что $f_1(x)>0$ при $x<-5$ (например, $f_1(-6)=|-6-3|+6-13=2>0$) и $f_1(x)<0$ при $x>-5$ (например, $f_1(100)=|100-3|-100-13=-16<0$). Так как единственным нулём алгебраического выражения $f_2(x)=\sqrt{x+6}-2x+3$ является $x=3$, аналогичным образом нетрудно определить, что $f_2(x)>0$ при $x<3$ и $f_2(x)<0$ при $x>3$. Наконец, если $f_3(x)=(x-4)(x+4)$, то $f_3(x)<0$ на $(-4;\,4)$ и $f_3(x)>0$ в остальных точках области определения (эти неравенства можно получить и без «пробных точек», воспользовавшись свойствами квадратичной функции).

Теперь, воспользовавшись «столбцами» таблицы, легко определить промежутки знакоположительности и знакоотрицательности функции $f(x)$, учитывая, что $f(x)=\dfrac{f_1(x)f_2(x)}{f_3(x)}$. Заметим ещё, что $x=-6$ является граничной точкой области определения, но не нулём функции $f(x)$ (поэтому на рисунке эта точка никак не выделена). Поскольку $x=-6$ принадлежит промежутку знакоположительности функции $f(x)$, число -6 в ответ не включается. Таким образом, множеством решений данного неравенства является объединение промежутков $[-5;\,-4)\cup[3;\,4)$.

Ответ: $[-5;\,-4)\cup[3;\,4)$.

Метод интервалов по сути сводит решение неравенства стандартного вида к решению уравнения (нахождению нулей функции) с последующим определением знаков функции на промежутках её знакопостоянства. В принципе, он даёт возможность при желании отказаться от изучения «специальных» схем решения неравенств (например, иррациональных, показательных, логарифмических) и упростить подготовку к экзаменам.

Другие примеры на применение метода интервалов будут рассмотрены в каждой из следующих глав пособия.

Упражнения к § 1.2

Решите неравенство.

1. а) $(x-3)^3(x-4)^4(x-5)^5\geqslant 0$; **б)** $(x-5)^5(x-7)^7(x-8)^8\leqslant 0$.

2. а) $x(x+1)(x+2)^2(x+3)^3\leqslant 0$; **б)** $x(x+3)^3(x+4)^4(x+5)^5\leqslant 0$.

3. а) $\dfrac{(2x-13)(2-5x)^4(x-7)^2}{x^2-49}\leqslant 0$; **б)** $\dfrac{(2x-15)(4-5x)^4(x-8)^2}{x^2-64}\leqslant 0$.

4. а) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}\leqslant\dfrac{2}{x+3}$; **б)** $\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{x+5}\geqslant\dfrac{2}{x+6}$.

5. а) $(x^2-9x+14)(\sqrt{x+6}-3)(x-\sqrt{2x+3})\geqslant 0$;

б) $(x^2-8x+15)(\sqrt{x+10}-4)(x-\sqrt{5x+6})\leqslant 0$.

6. а) $\dfrac{(\sqrt{x+4}+x-8)(\sqrt{x+5}+x-7)}{x+\sqrt{x+6}-6}\leqslant 0$;

б) $\dfrac{(\sqrt{x+8}+x-4)(\sqrt{x+7}+x-5)}{x+\sqrt{x+5}-7}\leqslant 0$.

7. а) $(2x-|x-3|-7)(3x-|x+2|-8)\geqslant 0$;

б) $(4x+|3x+1|-8)(5x-|4x-1|-3)\leqslant 0$.

8. а) $\dfrac{(x-2)^2(|x-3|-3x+11)}{3x-2|x-5|+5}\leqslant 0$; **б)** $\dfrac{(x+3)^2(|x-4|+5x-8)}{5x-3|x+2|+2}\leqslant 0$.

9. а) $(2^x-16)(3^x-9)(x^2-6x+8)\leqslant 0$;

б) $((0{,}2)^x-25)((0{,}25)^x-64)(x^2+5x+6)\leqslant 0$.

10. а) $\dfrac{((0{,}5)^x-4)((0{,}05)^x-20)(x^2-4)}{x+1}\geqslant 0$;

б) $\dfrac{(2^x-0{,}25)(20^x-0{,}05)(x^2-1)}{x+2}\geqslant 0$.

11. а) $2+(\log_3(x+2)-2)(\log_2(x+3)-3)\geqslant \log_3(x+2)$;

б) $\log_3(x-3)+(\log_2(x-2)-3)(\log_3(x-3)-2)\geqslant 2$.

12. а) $\dfrac{\log_3(4x^2-3x)}{\log_7(8x^2+7x)}\leqslant 0$; **б)** $\dfrac{\log_5(3x^2+2x)}{\log_6(6x^2-5x)}\leqslant 0$.

13. а) $\dfrac{(|x-4|-x-12)(\sqrt{x+5}-2x+5)}{x^2-2x-15}\leqslant 0$;

б) $\dfrac{(|x-2|-x-14)(\sqrt{x+7}-2x+1)}{x^2+2x-15}\leqslant 0$.

14. а) $\dfrac{(x-6)^2(|x+5|+|x-5|)(\log_3(x+4)-\log_3(x-4))}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}\leqslant 0$;

б) $\dfrac{(x-7)^2(|x-6|+|x+6|)(\log_6(x-5)-\log_6(x+5))}{\sqrt{x-4}-\sqrt{x+4}}\leqslant 0$.

§ 1.3. Разложение на множители и группировка

Решение неравенств методом интервалов или иным методом во многих случаях требует некоторых предварительных действий, прежде всего приведения неравенства к стандартному виду с помощью равносильных алгебраических преобразований, перечисленных в первом параграфе этой главы. Помимо указанных одним из таких преобразований является вынесение общего множителя (не числа — на число обе части неравенства можно просто разделить, — а алгебраического выражения), обычно после переноса всех алгебраических выражений в одну из частей неравенства и (при необходимости) группировки слагаемых. Один из таких примеров был рассмотрен в предыдущем параграфе. Рассмотрим ещё два.

Пример 1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2x-3}}{3x-1}\leqslant\frac{\sqrt{2x-3}}{2x+1}.$$

Решение. Перенесём дробь из правой части неравенства в левую и вынесем общий множитель $\sqrt{2x-3}$ за скобки:

$$\sqrt{2x-3}\left(\frac{1}{3x-1}-\frac{1}{2x+1}\right) \leqslant 0.$$

Приведём разность алгебраических дробей в скобках к общему знаменателю:

$$\sqrt{2x-3}\ \frac{2x+1-(3x-1)}{(3x-1)(2x+1)} \leqslant 0,$$

откуда $\frac{\sqrt{2x-3}(2-x)}{(3x-1)(2x+1)} \leqslant 0$, или $-\frac{\sqrt{2x-3}(x-2)}{(3x-1)(2x+1)} \leqslant 0$. Разделив или умножив обе части полученного неравенства на -1, получим неравенство стандартного вида $\frac{\sqrt{2x-3}(x-2)}{(3x-1)(2x+1)} \geqslant 0$. Обозначим через $f(x)$ левую часть последнего неравенства. Область определения D_f, или — что в данном случае то же самое — ОДЗ неравенства, задаётся системой

$$\begin{cases} 2x-3 \geqslant 0, \\ 3x-1 \neq 0, \\ 2x+1 \neq 0, \end{cases}$$

откуда $x \in [1{,}5; +\infty)$. Найдём нули функции $f(x)$: $x=1{,}5$, $x=2$. Далее можно применить метод интервалов, а можно заметить, что при $x \in$ $\in [1{,}5; +\infty)$ знаменатель дроби $\frac{\sqrt{2x-3}(x-2)}{(3x-1)(2x+1)}$ положителен, поскольку положителен каждый из множителей $3x-1$ и $2x+1$. Поэтому неравенство выполняется, только если $\left[\begin{array}{l} x-2 \geqslant 0, \\ x=1{,}5, \end{array}\right.$ откуда $x \in \{1{,}5\} \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $\{1{,}5\} \cup [2; +\infty)$.

Пример 2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4x^2+9\cdot(0{,}5)^{-x} \geqslant x^2\cdot 2^x+36, \\ x^2+2x+\dfrac{2x+6}{x-4} \leqslant 3. \end{cases}$$

Решение. 1. Решим первое неравенство системы, переписав его в виде

$$x^2\cdot 2^x+36-4x^2-9\cdot 2^x \leqslant 0.$$

Перегруппируем слагаемые в левой части полученного неравенства:

$$(x^2\cdot 2^x-4x^2)-(9\cdot 2^x-36) \leqslant 0.$$

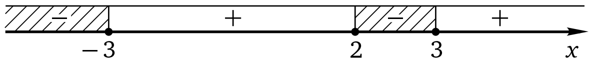
Вынесем общий множитель в каждой из скобок:

$$x^2(2^x-4)-9(2^x-4) \leqslant 0.$$

Ещё раз вынесем общий множитель: $(2^x-4)(x^2-9)\leqslant 0$, откуда

$$(2^x-4)(x-3)(x+3)\leqslant 0.$$

Применим к полученному неравенству метод интервалов, учитывая, что его левая часть определена при любом действительном значении переменной, а её нули легко найти устно:



Таким образом, множеством решений первого неравенства системы является объединение промежутков $(-\infty;-3]\cup[2;3]$.

2. Решим второе неравенство системы, переписав его в виде

$$x^2+2x-3+\frac{2x+6}{x-4}\leqslant 0.$$

Заметим, что если просто привести слагаемые в левой части полученного неравенства к общему знаменателю, то в числителе получится многочлен третьей степени. Попробуем поступить иначе, попытавшись выделить общий множитель. Для этого разложим квадратный трёхчлен x^2+2x-3 на множители. Его нулями являются числа -3 и 1, которые легко найти по формуле корней квадратного уравнения или формулам Виета. Поэтому неравенство можно переписать так:

$$(x+3)(x-1)+\frac{2(x+3)}{x-4}\leqslant 0.$$

Теперь вынесем за скобки общий множитель:

$$(x+3)\left(x-1+\frac{2}{x-4}\right)\leqslant 0.$$

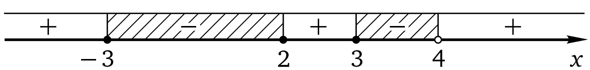
Приведём слагаемые в скобках к общему знаменателю:

$$(x+3)\frac{(x-1)(x-4)+2}{x-4}\leqslant 0 \iff \frac{(x+3)(x^2-5x+6)}{x-4}\leqslant 0.$$

Корнями квадратного трёхчлена x^2-5x+6 являются числа 2 и 3. Разложив этот квадратный трёхчлен на множители, получим неравенство

$$\frac{(x+3)(x-2)(x-3)}{x-4}\leqslant 0,$$

которое легко решается методом интервалов:



Значит, множеством решений второго неравенства системы является объединение промежутков $[-3;2]\cup[3;4)$.

3. Остаётся найти множество решений системы. В данном случае это не представляет труда — решениями системы являются всего три числа: -3; 2; 3.

Ответ: $\{-3; 2; 3\}$.

Упражнения к § 1.3

Решите неравенство (систему неравенств).

1. а) $(2x^2-7x+6)(x+2)\leqslant(x^2+x-2)(x-2)$;

б) $(2x^2+5x-3)(x-3)\leqslant(x^2-x-6)(x+3)$.

2. а) $\begin{cases}x^4-4x^3+4x^2\geqslant 9,\\ x^4-6x^3+9x^2\leqslant 16;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}x^4-8x^3+16x^2\geqslant 25,\\ x^4-10x^3+25x^2\leqslant 36.\end{cases}$

3. а) $\dfrac{x^2-9}{2x+5}\leqslant\dfrac{x^2-9}{3x+2}$; **б)** $\dfrac{x^2-4}{4x+3}\geqslant\dfrac{x^2-4}{3x+5}$.

4. а) $\begin{cases}\dfrac{x^2+4x-8}{x^2-16}\leqslant\dfrac{x+5}{x+4}+\dfrac{1}{x-2},\\ \dfrac{x^2-2x-1}{x-2}+\dfrac{x^3-3x^2+2}{x-3}\geqslant x+x^2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\dfrac{x^2+5x-10}{x^2-25}\leqslant\dfrac{x+6}{x+5}+\dfrac{2}{x-3},\\ \dfrac{x^2-3x-2}{x-3}-\dfrac{x^3-5x^2-4}{x-5}\geqslant x-x^2.\end{cases}$

5. а) $(x-5)\sqrt{x-4}\geqslant 3x-15$; **б)** $(x-7)\sqrt{x-6}\geqslant 2x-14$.

6. а) $\begin{cases}x^2\sqrt{36-x^2}\leqslant 25\sqrt{36-x^2},\\ \dfrac{\sqrt{x+6}}{x+2}\geqslant\dfrac{\sqrt{x+6}}{2x-3};\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}x^2\sqrt{16-x^2}\leqslant 9\sqrt{16-x^2},\\ \dfrac{\sqrt{x+4}}{x+2}\geqslant\dfrac{\sqrt{x+4}}{2x-1}.\end{cases}$

7. а) $2x\sin x+1\geqslant 2x+\sin x$; **б)** $2x\cos x-3\leqslant 3\cos x-2x$.

8. а) $\begin{cases}3x-\sin x\leqslant x\sin x-3,\\ x-\cos x\geqslant x\cos x-1;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}2x+\cos x\geqslant x\cos x+2,\\ x+\sin x\leqslant x\sin x+1.\end{cases}$

9. а) $11\cdot 4^x+17^x>17^{x-1}+3\cdot 4^{x+1}+4^{x+2}$;

б) $3^{x+1}+10^x<10^{x-1}+4\cdot 3^x+3^{x+2}$.

10. а) $\begin{cases}x^2\cdot 3^x+4\leqslant x^2+4\cdot 3^x,\\ x^2\cdot 5^x+20\geqslant 5x^2+4\cdot 5^x;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}x^2\cdot 5^x+9\leqslant x^2+9\cdot 5^x,\\ x^2\cdot 2^x+18\geqslant 2x^2+9\cdot 2^x.\end{cases}$

11. а) $x\log_7 x+1>x+\log_7 x$; **б)** $x\log_5 x+2>x+2\log_5 x$.

12. а) $\begin{cases} \dfrac{\log_6(x+5)}{x-2} \leqslant \dfrac{\log_6(x+5)}{x+2}, \\ \dfrac{x^2+x\log_7(2x+9)-1}{x^2-x} \leqslant 1+\dfrac{1}{x}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{\log_3(x+6)}{x-3} \leqslant \dfrac{\log_3(x+6)}{x+3}, \\ \dfrac{x^2+x\log_7(2x+11)-4}{x^2-2x} \leqslant 1+\dfrac{2}{x}. \end{cases}$

§ 1.4. Метод введения новой переменной

Метод введения новой переменной является одним из общих для каждой функционально-алгебраической линии школьного курса математики методов решения уравнений и неравенств, позволяющих свести данное уравнение или неравенство к одному или нескольким более простым по сравнению с данным. Основной идеей метода является замена повторяющегося алгебраического выражения в данном уравнении (неравенстве) некоторой (обычно латинской) буквой, играющей роль новой переменной. Решив после такой замены уравнение (неравенство) относительно новой переменной, нужно сделать обратную замену, вернувшись к данной переменной, и решить полученные уравнения (неравенства) уже относительно данной переменной. Заметим, что устоявшееся название «метод замены переменной» является терминологически не вполне точным, поскольку заменяется не переменная, а алгебраическое выражение. Правильнее называть этот метод методом введения новой переменной. Такое название используется в ряде пособий, в том числе и в этом. При решении систем неравенств с одной переменной новая переменная может вводиться как в пределах всей системы, так и в пределах одного из неравенств системы. Проиллюстрируем применение метода примерами.

Пример 1. Решите неравенство $(x^2-9x)^2+4x^2<36x+140$.

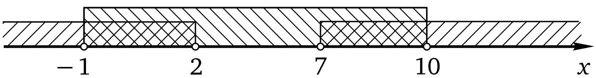
Р е ш е н и е. Перепишем неравенство в виде

$$(x^2-9x)^2+4(x^2-9x)-140<0$$

и введём новую переменную $t=x^2-9x$. Неравенство примет вид $t^2+4t-140<0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части полученного неравенства являются числа -14 и 10 (их можно найти с помощью формулы корней квадратного уравнения или с помощью формул Виета). Старший коэффициент квадратного трёхчлена положителен, поэтому решение неравенства — промежуток $(-14; 10)$. Сделаем обратную замену, перейдя к системе

$$\begin{cases} x^2-9x>-14, \\ x^2-9x<10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9x+14>0, \\ x^2-9x-10<0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена в левой части первого неравенства системы являются числа 2 и 7, старший коэффициент трёхчлена положителен, и, значит, множество решений неравенства — объединение промежутков $(-\infty; 2) \cup (7; +\infty)$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части второго неравенства системы являются числа -1 и 10, старший коэффициент трёхчлена положителен, и, значит, множество решений неравенства — промежуток $(-1; 10)$. Следовательно, множество решений системы — объединение промежутков $(-1; 2) \cup (7; 10)$.



Ответ: $(-1; 2) \cup (7; 10)$.

Если при решении систем неравенств с помощью метода введения новой переменной такая переменная вводится в пределах всей системы, можно не записывать решение каждого неравенства относительно данной переменной, а сделать это сразу для всей системы.

Пример 2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 5 \leqslant 0, \\ 2\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x - 7 \geqslant 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Введём новую переменную $z = \operatorname{tg} x$. Система примет вид

$$\begin{cases} 3z^2 - 2z - 5 \leqslant 0, \\ 2z^2 - 5z - 7 \geqslant 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена в левой части первого неравенства полученной системы являются числа -1 и $\frac{5}{3}$. Старший коэффициент квадратного трёхчлена положителен, поэтому множество решений неравенства — промежуток $\left[-1; \frac{5}{3}\right]$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части второго неравенства той же системы являются числа -1 и 3,5. Старший коэффициент квадратного трёхчлена положителен, поэтому множество решений неравенства — объединение промежутков $(-\infty; -1] \cup [3{,}5; +\infty)$. Поскольку $\frac{5}{3} < 3{,}5$, единственным решением системы

$$\begin{cases} 3z^2 - 2z - 5 \leqslant 0, \\ 2z^2 - 5z - 7 \geqslant 0 \end{cases}$$

является $z = -1$. Вернувшись к переменной x, получим $\operatorname{tg} x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Во многих случаях решение системы двух неравенств с одной переменной целесообразно проводить в три этапа: 1) решить первое неравенство системы; 2) решить второе неравенство системы; 3) решить систему, найдя пересечение решений, полученных на двух предыдущих этапах. За правильное выполнение каждого этапа при решении системы неравенств на ЕГЭ по математике даётся 1 балл, поэтому желательно фиксировать полученные на каждом этапе ответы в тексте решения. Разумеется, решать неравенства системы можно в любом порядке, а начинать нужно с того неравенства, которое кажется более простым. Кроме того, решение одного из неравенств системы иногда можно упростить, учитывая область допустимых значений или решение другого её неравенства. В следующем примере такой учёт позволяет рассматривать не два случая «раскрытия» модуля, а только один.

Пример 3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_2^2(-\log_2 x)+\log_2(\log_2^2 x) \leqslant 3, \\ -4|x^2-1|-3 \geqslant \dfrac{1}{x^2-1}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. 1. Левая часть первого неравенства системы определена, если

$$\begin{cases} x>0, \\ \log_2 x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x<1, \end{cases}$$

т. е. $x\in(0;1)$. Если $x\in(0;1)$, то $x^2<1$. Поэтому $x^2-1<0$ и $|x^2-1|=$ $=-x^2+1$. Теперь систему можно переписать так:

$$\begin{cases} \log_2^2(-\log_2 x)+\log_2(\log_2^2 x) \leqslant 3, \\ 4(x^2-1)-3 \geqslant \dfrac{1}{x^2-1}. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы, введя новую переменную $t=$ $=-\log_2 x$, где $t>0$. Неравенство примет вид $\log_2^2 t+\log_2 t^2\leqslant 3$. Заметим, что $\log_2 t^2=2\log_2 t$, поскольку $t>0$. Таким образом, приходим к неравенству $\log_2^2 t+2\log_2 t-3\leqslant 0$. Полученное неравенство является квадратным относительно $z=\log_2 t$ и имеет вид $z^2+2z-3\leqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части этого неравенства являются числа -3 и 1 (их можно найти с помощью формулы корней квадратного уравнения или с помощью формул Виета). Старший коэффициент квадратного трёхчлена положителен, поэтому множество решений неравенства — промежуток $[-3;1]$. Сделаем обратную замену, перейдя к системе неравенств с переменной t. Имеем

$$\begin{cases}\log_2 t \geqslant -3,\\ \log_2 t \leqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geqslant \frac{1}{8},\\ t \leqslant 2.\end{cases}$$

Теперь вернёмся к переменной x. Получим

$$\begin{cases}-\log_2 x \geqslant \frac{1}{8},\\ -\log_2 x \leqslant 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x \leqslant -\frac{1}{8},\\ \log_2 x \geqslant -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant \frac{1}{\sqrt[8]{2}},\\ x \geqslant \frac{1}{4}.\end{cases}$$

Итак, множеством решений первого неравенства системы является промежуток $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right]$.

2. Решим второе неравенство системы, введя новую переменную $y = x^2 - 1$, $y < 0$. Получим

$$\begin{cases}4y - 3 \geqslant \frac{1}{y},\\ y < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4y^2 - 3y \leqslant 1,\\ y < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4y^2 - 3y - 1 \leqslant 0,\\ y < 0.\end{cases}$$

Корнями трёхчлена в левой части квадратного неравенства системы являются числа $-\frac{1}{4}$ и 1, старший коэффициент трёхчлена положителен, и, значит, множество решений неравенства — промежуток $\left[-\frac{1}{4}; 1\right]$. Следовательно, множество решений системы — промежуток $\left[-\frac{1}{4}; 0\right)$. Сделаем обратную замену, перейдя к системе неравенств с переменной x. Имеем

$$\begin{cases}x^2 - 1 \geqslant -\frac{1}{4},\\ x^2 - 1 < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 \geqslant \frac{3}{4},\\ x^2 < 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2},\\ x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2},\end{array}\right.\\ -1 < x < 1.\end{cases}$$

Поэтому множество решений второго неравенства системы с учётом условия $x \in (0; 1)$ — промежуток $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$.

3. Найдём множество решений данной системы как пересечение промежутков $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right]$ и $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$. Поскольку $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{4} > \frac{1}{4}$, а $\frac{1}{\sqrt[8]{2}} < 1$, остаётся сравнить $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}$, или $\sqrt{3}$ и $\frac{2}{\sqrt[8]{2}}$, или $(\sqrt{3})^8$ и $\left(\frac{2}{\sqrt[8]{2}}\right)^8$, или

3^4 и 2^7, или 81 и 128. Поскольку $81 < 128$, получаем, что и $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$. Следовательно, множеством решений данной системы является промежуток $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right]$.

Ответ: $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right]$.

Замечание. Сравнение чисел на последнем этапе решения можно провести «от противного»: допустим, что $\frac{\sqrt{3}}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$, и получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt[8]{2}} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8 \geqslant \left(\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right)^8 \Rightarrow \frac{3^4}{2^8} \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 3^4 \geqslant 2^7 \Rightarrow 81 \geqslant 128$$

— противоречие, значит, допущение неверно, и $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$.

Упражнения к § 1.4

Решите неравенство (систему неравенств).

1. а) $(x^2-2x)^2+36x+45<18x^2$; **б)** $(x^2+8x)^2<2x^2+16x+63$.

2. а) $\begin{cases}(x^2+1)^2+3\leqslant 7x^2,\\ (x^2+3x)^2\leqslant 8x^2+24x+20;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}(x^2-2)^2+5\leqslant 6x^2,\\ (x^2-2x)^2+36x+45\geqslant 18x^2.\end{cases}$

3. а) $\frac{12}{(x^2+4x)^2}+\frac{7}{x^2+4x}+1\geqslant 0$; **б)** $\frac{45}{(x^2+6x)^2}+\frac{14}{x^2+6x}+1\geqslant 0$.

4. а) $\begin{cases}\frac{25}{x^4}-\frac{26}{x^2}+1\leqslant 0,\\ \frac{45}{(x^2-6x)^2}+\frac{14}{x^2-6x}+1\geqslant 0;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}\frac{9}{x^4}-\frac{10}{x^2}+1\leqslant 0,\\ \frac{12}{(x^2-4x)^2}+\frac{7}{x^2-4x}+1\geqslant 0.\end{cases}$

5. а) $\frac{4-3x}{2x-1}+11\sqrt{\frac{3x-4}{2x-1}}>24$; **б)** $\frac{1-2x}{4x+1}+5\sqrt{\frac{2x-1}{4x+1}}>6$.

6. а) $\begin{cases}\sqrt{\frac{3x-2}{4x-3}}+\sqrt{\frac{4x-3}{x-1}}\geqslant 2\sqrt[4]{\frac{3x-2}{x-1}},\\ \sqrt{x+17-8\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+65-16\sqrt{x+1}}\geqslant 6;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\sqrt{\frac{4x+5}{5x-4}}+\sqrt{\frac{5x-4}{x-3}}\geqslant 2\sqrt[4]{\frac{4x+5}{x-3}},\\ \sqrt{x+30-10\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+126-22\sqrt{x+5}}\geqslant 8.\end{cases}$

7. а) $3\sin^2 x-\sin x-4\geqslant 0$; **б)** $2\cos^2 x+\cos x-3\geqslant 0$.

8. а) $\begin{cases}6\sin^2 x-5\sin x+1\leqslant 0,\\ 8\sin^2 x-6\sin x+1\geqslant 0;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}8\cos^2 x+10\cos x+3\geqslant 0,\\ 6\cos^2 x+7\cos x+2\leqslant 0.\end{cases}$

9. а) $9^{\frac{1}{x}-1}-26\cdot 3^{\frac{1}{x}-2}-3\geqslant 0$; **б)** $4^{\frac{1}{x}-2}-4\cdot 2^{\frac{1}{x}-3}-8\geqslant 0$.

10. а) $\begin{cases}\dfrac{1}{5^x+31}\leqslant\dfrac{4}{5^{x+1}-1},\\ 4^x-(0{,}25)^{x-3}\geqslant 63;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}\dfrac{1}{3^x+4}\leqslant\dfrac{2}{3^{x+1}-1},\\ (2{,}5)^x-(0{,}4)^{x-2}\geqslant 5{,}25.\end{cases}$

11. а) $\log_5^2(25-x^2)-3\log_5(25-x^2)+2\geqslant 0$;

б) $\log_4^2(64-x^2)-5\log_4(64-x^2)+6\geqslant 0$.

12. а) $\begin{cases}\log_9 x-\log_x 9\geqslant 1{,}5,\\ \dfrac{4}{4+\log_2 x}+\dfrac{3}{\log_2(2x)}\left(\dfrac{3}{4+\log_2 x}-1\right)\geqslant 0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\log_8 x-\log_x 8\leqslant\dfrac{8}{3},\\ \dfrac{3}{5+\log_2 x}+\dfrac{1}{1+\log_2(2x)}\left(\dfrac{3}{5+\log_2 x}-1\right)\geqslant 0.\end{cases}$

§1.5. Применение свойств функций к решению неравенств

Существует довольно большой класс неравенств, решение которых с помощью только стандартных методов (алгебраических преобразований, замены переменной, метода интервалов и метода знакотождественных множителей) невозможно. Решение таких неравенств и их систем существенным образом опирается на некоторые свойства элементарных функций, изучаемых в школьном курсе, прежде всего монотонность (напомним, что монотонными называются возрастающие и убывающие функции) и ограниченность. В некоторых случаях приходится использовать свойства периодичности, чётности (нечётности), инвариантности, дифференцируемости, а также графические интерпретации неравенств (подробнее об этом говорится в книге: *Шестаков С. А.* ЕГЭ 2016. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень). М.: МЦНМО, 2016.)

Прежде чем переходить к решению примеров, приведём наиболее часто используемые при решении уравнений и неравенств утверждения о монотонных функциях, начав с тех, которые играют вспомогательную роль.

Утверждение 1. *Функции* $y=x^{2n-1}$, $y=\sqrt[n]{x}$, $y=a^x$ *(при* $a>1$*),* $y=\log_a x$ *(при* $a>1$*) монотонно возрастают каждая на своей области определения; функции* $y=a^x$ *(при* $0<a<1$*),* $y=\log_a x$ *(при* $0<a<1$*) монотонно убывают каждая на своей области определения (*n *— натуральное число;* $n>1$ *для* $y=\sqrt[n]{x}$*).*

Утверждение 2. *Если функции* $y=f(x)$ *и* $y=g(x)$ *монотонно возрастают (убывают) на некотором промежутке, то и функция* $y=f(x)+g(x)$ *монотонно возрастает (убывает) на том же промежутке (краткая формулировка: сумма возрастающих (убывающих) функций является возрастающей (убывающей) функцией).*

Утверждение 3. 1. *Если функция* $y=f(x)$ *монотонно возрастает на некотором промежутке и* $a>0$*, то функции* $y=af(x)+b$ *и* $y=f(ax+b)$ *монотонно возрастают на том же промежутке, а функции* $y=-af(x)+b$ *и* $y=f(-ax+b)$ *монотонно убывают на том же промежутке (*b *— любое действительное число).*

2. *Если функция* $y=f(x)$ *монотонно убывает на некотором промежутке и* $a>0$*, то функции* $y=af(x)+b$ *и* $y=f(ax+b)$ *монотонно убывают на том же промежутке, а функции* $y=-af(x)+b$ *и* $y=f(-ax+b)$ *монотонно возрастают на том же промежутке (*b *— любое действительное число).*

Как уже отмечалось, приведённые утверждения обычно играют вспомогательную роль: они позволяют обосновать монотонное возрастание или убывание функции. Для непосредственного же решения неравенств применяют следующее утверждение.

Утверждение 4. *Если функция* $y=f(x)$ *монотонно возрастает на всей числовой прямой, а функция* $y=g(x)$ *монотонно убывает на всей числовой прямой, то справедливы следующие утверждения:* а) $f(\alpha)\leqslant f(\beta)$ *в том и только том случае, когда* $\alpha\leqslant\beta$; б) $g(\alpha)\leqslant g(\beta)$ *в том и только том случае, когда* $\alpha\geqslant\beta$.

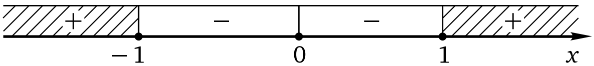
Это утверждение является, в сущности, простой переформулировкой определения возрастающей и убывающей функции.

Пример 1. Функция $y=f(t)$ монотонно убывает на всей числовой прямой. Найдите все значения x, для которых $f(x^2+x^3)\geqslant f(x^3+x^4)$.

Решение. В силу монотонного убывания функции $y=f(t)$ неравенство $f(t_1)\geqslant f(t_2)$ выполняется в том и только том случае, если $t_1\leqslant t_2$. В нашем случае $t_1=x^2+x^3$, $t_2=x^3+x^4$. Поэтому данное неравенство равносильно неравенству $x^2+x^3\leqslant x^3+x^4$, откуда $x^4-x^2\geqslant 0$. Вынесем за скобки общий множитель x^2 в левой части и разложим на множители выражение в скобках по формуле разности квадратов:

$$x^2(x-1)(x+1) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство легко решается методом интервалов:



Ответ: $(-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство

$$f(3x+4^x+5) \leqslant f(5x+4^x+3),$$

если

$$f(x) = x+3\sqrt[5]{x+5}+5\sqrt[3]{x+3}+7.$$

Р е ш е н и е. Разумеется, можно записать данное неравенство в явном виде — и горько удивиться бессмысленности совершённого. Чтобы избежать этих не слишком приятных ощущений, пойдём иным путём. Функция $y=f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой (как сумма возрастающих функций). Поэтому неравенство $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$ будет выполняться в том и только том случае, если $\alpha \leqslant \beta$. В нашем случае $\alpha = 3x+4^x+5$, $\beta = 5x+4^x+3$. Таким образом,

$$3x+4^x+5 \leqslant 5x+4^x+3,$$

откуда $2x \geqslant 2$, и, значит, $x \geqslant 1$.

Ответ: $[1; +\infty)$.

Уже эти относительно несложные примеры показывают, что для успешного решения подобных задач нужно хорошо знать свойства монотонных функций и уметь их использовать. Так, если при допустимых значениях переменных функция $y=f(t)$ монотонно возрастает, а функция $t=g(x)$ монотонно убывает, то функция $y=f(g(x))$ будет монотонно убывающей; если же при допустимых значениях переменных и функция $y=f(t)$ монотонно возрастает, и функция $t=g(x)$ монотонно возрастает, то функция $y=f(g(x))$ также будет монотонно возрастающей. Фактически именно эти утверждения, которые являются обобщением утверждения 3 и которые довольно просто получить непосредственно из определения возрастающей и убывающей функций, были неявным образом использованы при решении предыдущего примера.

Пример 3. Решите неравенство

$$(3x+1)\left(1+\sqrt{(3x+1)^2+9}\right)+2x\left(1+\sqrt{4x^2+9}\right) \leqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Перепишем данное неравенство в виде

$$(3x+1)\left(1+\sqrt{(3x+1)^2+9}\right) \leqslant -2x\left(1+\sqrt{4x^2+9}\right)$$

и рассмотрим функцию $f(t)=t\left(1+\sqrt{t^2+9}\right)$. Эта функция является возрастающей, что — в отличие от функции из примера 2 — куда менее очевидно и должно быть обосновано более подробно. В самом деле, если $t_1<0<t_2$, то $f(t_1)<f(t_2)$, поскольку в этом случае $f(t_1)<0$, а $f(t_2)>0$. Если $0\leqslant t_1<t_2$, то

$$0<1+\sqrt{t_1^2+9}<1+\sqrt{t_2^2+9}$$

и, следовательно,

$$t_1\left(1+\sqrt{t_1^2+9}\right)<t_2\left(1+\sqrt{t_2^2+9}\right),$$

т. е. $f(t_1)<f(t_2)$. Наконец, если $t_1<t_2\leqslant 0$, то $|t_1|>|t_2|\geqslant 0$, откуда $t_1^2>t_2^2\geqslant 0$ и

$$1+\sqrt{t_1^2+9}>1+\sqrt{t_2^2+9}>0.$$

Поэтому

$$t_1\left(1+\sqrt{t_1^2+9}\right)<t_2\left(1+\sqrt{t_2^2+9}\right)\leqslant 0,$$

а значит, $f(t_1)<f(t_2)$ и в этом случае. Таким образом, доказано, что для любой такой пары чисел t_1 и t_2, что $t_1<t_2$, выполняется неравенство $f(t_1)<f(t_2)$, т. е. функция $f(t)=t\left(1+\sqrt{t^2+9}\right)$ является возрастающей. Разумеется, доказательство возрастания функции $y=f(t)$ можно было провести и с помощью производной. В силу возрастания функции $y=f(t)$ неравенство $f(\alpha)\leqslant f(\beta)$ будет выполняться тогда и только тогда, когда $\alpha\leqslant\beta$. В данном случае $\alpha=3x+1$, $\beta=-2x$. Поэтому $3x+1\leqslant -2x$, откуда $x\leqslant -0{,}2$.

Ответ: $(-\infty; -0{,}2]$.

Сформулируем ещё одно утверждение о свойствах монотонных функций, которое довольно часто используется при решении неравенств.

Утверждение 5. *Если функция $y=f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, функция $y=g(x)$ монотонно убывает на всей числовой прямой и $f(x_0)=g(x_0)$, то справедливы следующие утверждения*: а) $f(x)\leqslant g(x)$ *в том и только том случае, когда* $x\in(-\infty; x_0]$; б) $f(x)\geqslant g(x)$ *в том и только том случае, когда* $x\in[x_0; +\infty)$.

Наглядный смысл утверждения 2 очевиден (см. рис. 5). Попробуйте доказать это утверждение формально, опираясь на определение возрастающей (убывающей) функции.

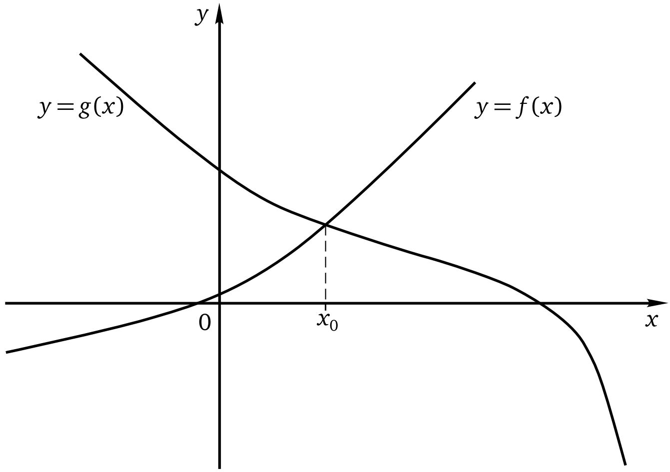


Рис. 5

Аналогичное утверждение справедливо и в том случае, если правая часть неравенства является числом. Сформулируем это утверждение.

Утверждение 6. 1. *Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, c — действительное число и $f(x_0) = c$, то $f(x) \leqslant c$ в том и только том случае, когда $x \in (-\infty; x_0]$; $f(x) \geqslant c$ в том и только том случае, когда $x \in [x_0; +\infty)$.*

2. *Если функция $y = g(x)$ монотонно убывает на всей числовой прямой и $g(x_0) = c$, то справедливы следующие утверждения:* а) $g(x) \leqslant c$ *в том и только том случае, когда $x \in [x_0; +\infty)$;* б) $g(x) \geqslant c$ *в том и только том случае, когда $x \in (-\infty; x_0]$.*

Утверждения 5 и 6 с соответствующей коррекцией справедливы и для строгих неравенств (для них число x_0 в ответ не включается).

Пример 4. Решите неравенство

$$7x^7 + 5x^5 + 3x^3 + x + 16 < 0.$$

Решение. Заметим, что функция

$$f(x) = 7x^7 + 5x^5 + 3x^3 + x + 16$$

монотонно возрастает на всей числовой прямой (как сумма возрастающих функций) и $f(-1) = 0$. Поэтому неравенство $f(x) < 0$ выполняется в том и только том случае, если $x < -1$.

Ответ: $(-\infty; -1)$.

Монотонное возрастание (убывание) функций можно использовать и при решении вполне стандартных неравенств. Иногда такое решение будет короче традиционного.

Пример 5. Решите неравенство

$$21x+3|2x+1|+7 \geqslant 4|3x-2|+2|x-1|.$$

Р е ш е н и е. Перепишем неравенство в виде

$$21x+3|2x+1|-4|3x-2|-2|x-1|+7 \geqslant 0$$

и рассмотрим функцию

$$f(x)=21x+3|2x+1|-4|3x-2|-2|x-1|+7,$$

определённую и непрерывную на всей числовой прямой. График функции представляет собой ломаную, состоящую из отрезков прямых и лучей. Каждое звено этой ломаной является частью прямой вида $y=$ $=kx+l$, где $k>0$ (поскольку $k=21\pm 3\cdot 2\pm 4\cdot 3\pm 2$, т. е. $k=21\pm 6\pm$ $\pm 12\pm 2$ и вне зависимости от «раскрытия» модулей коэффициент при x будет положителен). Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на $(-\infty;+\infty)$. Поскольку $f(0)=0$, неравенство $f(x)\geqslant 0$ будет выполнено в том и только том случае, если $x\in[0;+\infty)$.

Ответ: $[0;+\infty)$.

Заметим, что далеко не каждая функция является монотонной на всей числовой прямой. Во многих случаях приходится применять сформулированные выше утверждения, учитывая область определения функции не только при обосновании монотонности, но и при записи ответа.

Пример 6. Решите неравенство

$$\sqrt[3]{x^3-19} > \log_2(7-2x)+2.$$

Р е ш е н и е. Перебирая небольшие по модулю целые числа, довольно быстро можно установить, что левая и правая части данного неравенства равны при $x=3$. Функция $f(x)=\sqrt[3]{x^3-19}$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, а функция $g(x)=\log_2(7-2x)+2$ монотонно убывает на всей области определения. Поэтому неравенство $f(x)>g(x)$ выполняется, если $x>3$ и $x\in D(g)$, где $D(g)$ — область определения функции $y=g(x)$. Таким образом,

$$\begin{cases} x>3, \\ 7-2x>0, \end{cases}$$

откуда $3<x<3{,}5$.

Ответ: $(3;\,3{,}5)$.

Обратим внимание на то, что если функция возрастает (убывает) на каждом из двух промежутков, то на их объединении она далеко не всегда является возрастающей (убывающей). Например, утверждение о том, что функция $y=\dfrac{1}{x}$ убывает на множестве $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, является математической ошибкой. В самом деле, из того, что $13>-7$, отнюдь не следует, что $\dfrac{1}{13}<-\dfrac{1}{7}$, и, значит, функция $y=\dfrac{1}{x}$ не является убывающей на объединении промежутков. Перечислять промежутки возрастания (убывания) лучше, используя точку с запятой или союз «и», а не знак объединения множеств, а при решении неравенств рассматривать каждый из промежутков возрастания (убывания) отдельно.

Пример 7. Решите неравенство $\dfrac{4}{x}<\sqrt{x+2}$.

Решение. Областью допустимых значений неравенства является множество $[-2;0)\cup(0;+\infty)$. При любом значении переменной из промежутка $[-2;0)$ неравенство, очевидно, выполняется, поскольку его левая часть отрицательна, а правая неотрицательна. На промежутке $(0;+\infty)$ функция $f(x)=\dfrac{4}{x}$ монотонно убывает, а функция $g(x)=\sqrt{x+2}$ монотонно возрастает. Поскольку $f(2)=2=g(2)$, неравенство $f(x)<g(x)$ на промежутке $(0;+\infty)$ выполняется в том и только том случае, если $x\in(2;+\infty)$.

Ответ: $[-2;0)\cup(2;+\infty)$.

Пример 8. Решите неравенство

$$10^{4x-5}+\lg(4x-3)\leqslant 10^{2x+3}+\lg(2x+5).$$

Решение. Обратим внимание на «похожесть» левой и правой частей неравенства. Рассмотрим функцию $f(t)=10^t+\lg(t+2)$, монотонно возрастающую на всей области определения. В силу возрастания функции $y=f(t)$ неравенство $f(\alpha)\leqslant f(\beta)$ будет выполняться при допустимых α и β в том и только том случае, если $\alpha\leqslant\beta$. В нашем случае $\alpha=4x-5$, $\beta=2x+3$. Таким образом,

$$\begin{cases}4x-5\leqslant 2x+3,\\ 4x-5>-2,\\ 2x+3>-2,\end{cases}$$

откуда $0{,}75<x\leqslant 4$.

Ответ: $(0{,}75;4]$.

Пример 9. Решите неравенство

$$\sqrt[11]{2x^2+3x+8}+\sqrt[11]{2-3x^2}+\log_{11}\frac{2x^2+3x+12}{3x^2+2}\geqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Если $a>0$ и $b>0$, то $\log_{11}\frac{a}{b}=\log_{11}a-\log_{11}b$. В данном случае $a=2x^2+3x+12$ (этот квадратный трёхчлен принимает только положительные значения в силу отрицательности дискриминанта и положительности коэффициента при второй степени переменной), $b=3x^2+2$ (при любом значении переменной правая часть этого выражения является суммой неотрицательного и положительного числа и, следовательно, положительна). Поэтому данное неравенство можно переписать в виде

$$\sqrt[11]{2x^2+3x+8}+\sqrt[11]{2-3x^2}+\log_{11}(2x^2+3x+12)-\log_{11}(3x^2+2)\geqslant 0,$$

откуда

$$\sqrt[11]{2x^2+3x+8}+\log_{11}(2x^2+3x+12)\geqslant\sqrt[11]{3x^2-2}+\log_{11}(3x^2+2).$$

Заметим, что выражения под знаками корня и логарифма в каждой из частей полученного неравенства отличаются на 4. Рассмотрим функцию $f(t)=\sqrt[11]{t}+\log_{11}(t+4)$. Эта функция возрастает на всей области определения (как сумма возрастающих функций). Поэтому неравенство $f(t_1)\geqslant f(t_2)$ будет выполняться при допустимых t_1 и t_2 в том и только том случае, если $t_1\geqslant t_2$. Положив $t_1=2x^2+3x+8$, $t_2=3x^2-2$, приходим к системе

$$\begin{cases} 2x^2+3x+8\geqslant 3x^2-2,\\ 2x^2+3x+8>-4,\\ 3x^2-2>-4. \end{cases}$$

Два последних неравенства системы выполняются при любых действительных значениях переменой, а первое неравенство приводится к виду $x^2-3x-10\leqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части последнего неравенства являются числа -2 и 5, старший коэффициент положителен, поэтому множество решений неравенства — отрезок $[-2; 5]$.

Ответ: $[-2; 5]$.

Наряду со свойствами монотонных функций при решении нестандартных уравнений и неравенств часто используются свойства ограниченных функций. Напомним основные свойства, связанные с ограниченностью функций, изучаемых в школьном курсе математики, и некоторые стандартные неравенства, которые понадобятся в дальнейшем:

1) $a^2+b^2\geqslant 2ab$ для любых действительных a и b, причём $a^2+b^2=2ab$, только если $a=b$;

2) $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ для любых неотрицательных a и b, причём $a+b=2\sqrt{ab}$, только если $a=b$;

3) $a+\dfrac{1}{a} \geqslant 2$ при $a>0$, причём $a+\dfrac{1}{a}=2$, только если $a=1$;
$a+\dfrac{1}{a} \leqslant -2$ при $a<0$, причём $a+\dfrac{1}{a}=-2$, только если $a=-1$;

4) $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+c-\dfrac{b^2}{4a} \geqslant c-\dfrac{b^2}{4a}$ при $a>0$;
$ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+c-\dfrac{b^2}{4a} \leqslant c-\dfrac{b^2}{4a}$ при $a<0$;

5) $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$ при любых действительных x;

6) $|a\sin x+b\cos x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ при любых действительных a, b, x;

7) $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$; $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \dfrac{\pi}{2}$; $0 < \operatorname{arctg} x < \pi$.

Во многих случаях при решении нестандартных неравенств оказывается полезным следующее очевидное утверждение.

Утверждение 7. *Для того чтобы неравенство $f(x) \geqslant g(x)$ имело хотя бы одно решение, необходимо, чтобы выполнялось условие* $\max f(x) \geqslant \min g(x)$.

Пример 10. Решите неравенство $\sin^9 x+\cos^{11} x \geqslant 1$.

Решение. Так как $0 \leqslant |\sin x| \leqslant 1$ и $0 \leqslant |\cos x| \leqslant 1$, имеем $\sin^9 x \leqslant \sin^2 x$, $\cos^{11} x \leqslant \cos^2 x$. Поэтому левая часть данного неравенства не превосходит $\sin^2 x+\cos^2 x$, т. е. 1. Тем самым, данное неравенство будет выполнено, только когда его левая часть равна 1, что возможно в том и только том случае, если

$$\begin{cases} \sin^9 x = \sin^2 x, \\ \cos^{11} x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x(\sin^7 x - 1) = 0, \\ \cos^2 x(\cos^9 x - 1) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения последней системы получаем, что $\sin x=1$ или $\sin x=0$. Если $\sin x=1$, то $\cos x=0$, и второе уравнение системы выполнено. Следовательно, $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Если $\sin x=0$, то $\cos x=\pm1$, но второму уравнению последней системы удовлетворяет только $\cos x=1$. Значит, $x=2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Пример 11. Решите неравенство $8\sin 7x+7\cos 8x \geqslant 15$.

Решение. Так как $\sin 7x \leqslant 1$ и $\cos 8x \leqslant 1$, левая часть данного неравенства не превосходит 15. Следовательно, неравенство имеет решения в том и только том случае, если его левая часть равна 15. Равной 15 она будет тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \sin 7x = 1, \\ \cos 8x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{2\pi n}{7}, \\ x = \dfrac{\pi k}{4}, \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. Остаётся установить, существуют ли такие целые k и n, при которых последняя система имеет хотя бы одно решение. Для этого приравняем правые части уравнений системы: $\frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7} = \frac{\pi k}{4}$, откуда после умножения обеих частей полученного равенства на 28 и деления на π получим $2 + 8n = 7k$. Существует стандартный способ решения полученного уравнения в целых числах, который не входит в программу средней школы. Тем не менее, подобные задачи попадаются и в экзаменационных вариантах, и на олимпиадах разного уровня. Для их решения, как правило, достаточно использовать элементарные соображения, связанные с делимостью целых чисел, либо воспользоваться единичной окружностью, отметив на ней точками решения каждого из уравнений и выбрав совпавшие точки. Последний способ часто ведёт к необходимости отмечать большое число точек, поэтому воспользуемся соображениями делимости. Перепишем равенство $2 + 8n = 7k$ в виде $2 + n = 7k - 7n$. Очевидно, что при любых целых k и n число $7k - 7n$ делится на 7. Поэтому равенство возможно лишь в случае, если $2 + n$ делится на 7, т. е. если $2 + n = 7l$, где $l \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $n = 7l - 2$, где $l \in \mathbb{Z}$. Но тогда

$$7k = 2 + 8n = 2 + 8(7l - 2) = 56l - 14,$$

откуда $k = 8l - 2$. Таким образом, найдены целые k и n, при которых выполняется система

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{2\pi n}{7}, \\ x = \dfrac{\pi k}{4}. \end{cases}$$

Осталось правую часть любого из уравнений этой системы выразить через l. Получим $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

Пример 12. Решите неравенство

$$\log_2(16x^4-8x^2+9) \leqslant 2\sin(3\pi x)+1.$$

Решение. Сразу понятно, что стандартные приёмы и методы здесь не помогут. Попробуем использовать ограниченность синуса:

$$-1 \leqslant \sin(3\pi x) \leqslant 1.$$

Поэтому правую часть неравенства можно оценить так:

$$-1 \leqslant 2\sin(3\pi x)+1 \leqslant 3.$$

Что касается левой части неравенства, то здесь сначала нужно выделить полный квадрат:

$$16x^4-8x^2+9=(4x^2-1)^2+8.$$

Поскольку $(4x^2-1)^2+8 \geqslant 8$, получим, что

$$\log_2(16x^4-8x^2+9)=\log_2((4x^2-1)^2+8) \geqslant \log_2 8,$$

откуда $\log_2(16x^4-8x^2+9) \geqslant 3$. Таким образом, левая часть неравенства не меньше 3, а правая его часть не больше 3. Поэтому данное неравенство будет выполнено, только если и левая, и правая его части равны 3, что возможно в том и только том случае, когда

$$\begin{cases}\sin(3\pi x)=1,\\ (4x^2-1)^2=0.\end{cases}$$

Корнями второго уравнения системы являются $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{2}$. Проверкой легко убедиться, что только $x=-\frac{1}{2}$ является и корнем первого уравнения системы.

Ответ: $-0{,}5$.

Используя свойства ограниченных функций, можно в некоторых случаях решать и неравенства с двумя неизвестными.

Пример 13. Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых

$$2y+11 \geqslant y^2+x^2+\frac{36}{x^2}.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$-y^2+2y+11 \geqslant x^2+\frac{36}{x^2}.$$

Выделим в левой части полученного неравенства полный квадрат:

$$-y^2+2y+11=12-(y-1)^2.$$

Следовательно, $-y^2+2y+11 \leqslant 12$. Оценим правую часть неравенства, воспользовавшись тем, что $a^2+b^2 \geqslant 2ab$. В нашем случае $a=|x|$, $b=\dfrac{6}{|x|}$. Поэтому $x^2+\dfrac{36}{x^2} \geqslant 2\cdot|x|\cdot\dfrac{6}{|x|}$, откуда $x^2+\dfrac{36}{x^2} \geqslant 12$. Таким образом, левая часть неравенства не больше 12, а правая его часть не меньше 12. Поэтому данное неравенство будет выполнено, только если и левая, и правая его части равны 12, что возможно в том и только том случае, когда

$$\begin{cases} 12-(y-1)^2 = 12, \\ |x| = \dfrac{6}{|x|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x = \pm\sqrt{6}. \end{cases}$$

Ответ: $(-\sqrt{6}; 1)$; $(\sqrt{6}; 1)$.

Пример 14. Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых

$$8\cos x - y^3 \geqslant \sqrt{y-3x^2-2}.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в виде

$$8\cos x \geqslant y^3 + \sqrt{y-3x^2-2}$$

и попытаемся оценить левую и правую части полученного неравенства. С левой частью все понятно: $-8 \leqslant 8\cos x \leqslant 8$. Для правой части единственной зацепкой является то, что она определена только при условии $y-3x^2-2 \geqslant 0$, откуда $y \geqslant 3x^2+2$ и, следовательно, $y \geqslant 2$. Но тогда $y^3 \geqslant 8$. Таким образом, правая часть неравенства не меньше 8, а левая — не больше 8. Поэтому неравенство будет выполняться, только если и левая, и правая его части равны 8. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ y = 2, \\ \sqrt{y-3x^2-2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 2)$.

Упражнения к § 1.5

Решите неравенство (систему неравенств).

1. а) $x^{11}+11x<12$; **б)** $x^9+9x<10$.

2. а) $x^{10}+4x^6+3x^2<8$; **б)** $x^{14}+14x^{10}+2x^2>17$.

3. а) $\begin{cases} 3x^7+7x^3 \geqslant 10, \\ x^2-5x+4 \geqslant 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5x^9+9x^5 \leqslant 14, \\ x^2+4x-5 \geqslant 0. \end{cases}$

4. а) Функция $y=f(t)$ монотонно убывает на всей числовой прямой. Найдите все значения x, для которых $f(x^4+x^5)\geqslant f(x^5+x^6)$.

б) Функция $y=f(t)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой. Найдите все значения x, для которых $f(x^6+x^7)\leqslant \leqslant f(x^7+x^8)$.

5. Решите неравенство:

а) $11x+5|x-3|\geqslant|3x-2|+|2x-3|+23$;

б) $14x+6|x-2|\leqslant|3x-4|+|4x-3|+21$.

6. а) Найдите все пары $(x;\,y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых $6y\geqslant y^2+x^2+\dfrac{16}{x^2}+1$.

б) Найдите все пары $(x;\,y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых $10y\geqslant y^2+x^2+\dfrac{81}{x^2}+7$.

Решите неравенство.

7. а) $\sqrt{x+5}\leqslant 7-x$; **б)** $\sqrt{x+11}\leqslant 9-x$.

8. а) $x^3+3x+2\sqrt[5]{x-4}\geqslant 34$; **б)** $x^5+2x+3\sqrt[3]{x-3}\leqslant 33$.

9. а) $\dfrac{9}{x}<\sqrt{x+6}$; **б)** $\dfrac{12}{x}<\sqrt{x+5}$.

10. а) $\sqrt[7]{x-8}+\sqrt{x-5}\leqslant 11-\dfrac{(x-1)^3}{64}$; **б)** $\sqrt[5]{x-4}+\sqrt{x-1}<9-\dfrac{(x+1)^3}{36}$.

11. а) Найдите все пары $(x;\,y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых $|x|\geqslant\sqrt{25-x^2-y^2}+|y|+5$.

б) Найдите все пары $(x;\,y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых $|y|+x^2+\sqrt{y^2-x^2-9}\leqslant 3$.

Решите неравенство.

12. а) $(5x-2)\left(2+\sqrt{(5x-2)^2+16}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+16}\right)\geqslant 0$;

б) $(6x+5)\left(3+\sqrt{(6x+5)^2+7}\right)+4x\left(3+\sqrt{16x^2+7}\right)\leqslant 0$.

13. а) $7\sqrt{6-5x}+|5x-3|\leqslant 7x+|5\sqrt{6-5x}-3|$;

б) $6\sqrt{12-x}+|5x-4|\leqslant 6x+|5\sqrt{12-x}-4|$.

14. а) $9\sqrt{5x+24}+3|2x+5|+9x\leqslant 3|2\sqrt{5x+24}-5|$;

б) $7\sqrt{2x+15}+2|3x+5|+7x\leqslant 2|3\sqrt{2x+15}-5|$.

15. а) $\sin^5 x+\cos^7 x\geqslant 1$; **б)** $\sin^7 x+\cos^9 x\geqslant 1$.

16. а) $\sin^9 2x+\cos^{11} 2x\geqslant 1$; **б)** $\sin^6 3x+\cos^7 3x\geqslant 1$.

17. а) $6\sin 5x+5\cos 6x\leqslant -11$; **б)** $12\sin 11x+11\cos 12x\geqslant 23$.

18. а) $7\cos 8x - 9\sin 10x \geqslant 16$; **б)** $9\sin 10x + 11\cos 12x \leqslant -20$.

19. а) $\sin 18x \cdot \cos 16x \leqslant -1$; **б)** $\cos 33x \cdot \cos 39x \geqslant 1$.

20. а) $3\cos(2\sqrt{5}\pi x) + 2\cos(2\pi x) \geqslant 5$;

б) $2\cos(2\sqrt{3}\pi x) + 5\cos(4\pi x) \geqslant 7$.

21. а) Найдите все пары $(x;\, y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых $9\cos x \geqslant y^2 + \sqrt{y - 2x^2 - 3}$.

б) Найдите все пары $(x;\, y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых $16\cos x \geqslant y^2 + \sqrt{y - 5x^2 - 4}$.

22. а) Найдите все тройки $(x;\, y;\, z)$ действительных чисел x, y, z, для каждой из которых

$$\left(|\cos 4x| + \frac{1}{4|\cos 4x|}\right)(6 + \operatorname{tg}^2 5y)(7 + \sin 6z) \leqslant 36.$$

б) Найдите все тройки $(x;\, y;\, z)$ действительных чисел x, y, z, для каждой из которых

$$\left(4|\sin 4x| + \frac{1}{|\sin 4x|}\right)(4 + \operatorname{ctg}^2 3y)(3 + \cos 2z) \leqslant 32.$$

Решите неравенство.

23. а) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \leqslant 2\sqrt{\frac{x}{x^2+4}} + 1$;

б) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{6}(x+y)\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{6}(x+y)\right) \leqslant 2\sqrt{\frac{3x}{x^2+36}} + 1$.

24. а) $6^x + 8^x \geqslant 10^x$; **б)** $5^x + 12^x \leqslant 13^x$.

25. а) Найдите все пары $(x;\, y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых $3^{|x-7|+2} \leqslant 4\sin y + 5$.

б) Найдите все пары $(x;\, y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых $4^{|y+3|+2} \leqslant 9 - 7\cos x$.

Решите неравенство.

26. а) $f(3x + 5\sqrt[5]{x} + 7) \leqslant f(7x + 5\sqrt[5]{x} + 3)$, если

$$f(x) = 5\sqrt[3]{x+5} + 3\cdot 5^{x+3} + 5\cdot 3^{x+5} + 3\sqrt[5]{x+3};$$

б) $f(5x + 7\sqrt[7]{x} + 9) \geqslant f(9x + 7\sqrt[7]{x} + 5)$, если

$$f(x) = 7\sqrt[7]{x+7} + 9\cdot 7^{x+7} + 7\cdot 9^{x+9} + 9\sqrt[9]{x+9}.$$

27. а) $2^{-x} \geqslant \log_2(x+3) + 4$; **б)** $6^{-x} \geqslant \log_6(x+7) + 5$.

28. а) $2\sqrt[7]{x+4} > \log_7(4-x) + 1$; **б)** $\sqrt[3]{6-x} > \log_5(x+7) + 1$.

29. а) $2\sqrt[3]{x^3-7}>\log_5(9-2x)+1$; **б)** $\log_2(5x-11)<1+\sqrt[3]{28-x^3}$.

30. а) $(0{,}2)^{7-2x}+\log_{0,2}(7-x)\geqslant(0{,}2)^{x-5}+\log_{0,2}(2x-5)$;

б) $(0{,}5)^{7-x}+\log_{0,2}(5-x)\geqslant(0{,}5)^{x+3}+\log_{0,2}(x+1)$.

31. а) $7^{4x-5}+\log_7(4x-3)\geqslant7^{5x-6}+\log_7(5x-4)$;

б) $6^{5x-7}+\log_6(5x-8)\leqslant6^{3x+8}+\log_6(3x+7)$.

32. а) $1+\cos^2 3x\geqslant\log_3(x^2+9)$; **б)** $3+2\sin^2 5x\leqslant\log_2(8-x^2)$.

33. а) $(2-\sqrt{3}|x|)\log_2(4-5x^2)\geqslant4$; **б)** $(3-\sqrt{2}|x|)\log_3(9-7x^2)\geqslant6$.

34. а) $7^{-|x-4|}\cdot\log_2(8x-x^2-8)\geqslant3$; **б)** $6^{-|x-5|}\cdot\log_3(10x-x^2-16)\geqslant2$.

35. а) $1+\log_3(x^4-8x^2+19)\leqslant2\sin\dfrac{3\pi x}{4}$;

б) $2+\log_5(x^4-18x^2+86)\leqslant3\sin\dfrac{\pi x}{2}$.

36. а) $\cos^2(x+2)\log_3(5-4x-x^2)\geqslant2$;

б) $\cos^2(x-3)\log_5(16+6x-x^2)\geqslant2$.

37. а) $(8x-x^2-15)\log_5(2\cos^2\pi x+3)\geqslant1$;

б) $(4x-x^2-3)\log_7(3\cos^2\pi x+4)\geqslant1$.

38. а) $\sqrt[7]{3x^2+2x+3}+\sqrt[7]{5-4x^2}+\log_7\dfrac{3x^2+2x+9}{4x^2+1}\geqslant0$;

б) $\sqrt[5]{6x^2+x+2}+\sqrt[5]{4-7x^2}+\log_5\dfrac{6x^2+x+9}{7x^2+3}\geqslant0$.

39. а) $(2x^2-6x+5)\log_{\sqrt{2}}\left(\cos^2\pi x+\cos x+2\sin^2\dfrac{x}{2}+3\right)\leqslant2$;

б) $(4x^2+4x+5)\log_{\sqrt{3}}(2+2\cos^2 x-\cos2x+3\cos^2\pi x)\leqslant8$.

40. а) $\log_\pi\left(|x|+\dfrac{\pi}{3}\right)+\log_{|x|+\frac{\pi}{3}}\pi\leqslant\dfrac{2}{\sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right)-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)+2}$;

б) $\log_\pi\left(|x|+\dfrac{2\pi}{5}\right)+\log_{|x|+\frac{2\pi}{5}}\pi\leqslant\dfrac{4}{\cos^2\left(\frac{x+y}{3}\right)-2\cos\left(\frac{x+y}{3}\right)+3}$.

§ 1.6. Метод знакотождественных множителей

Метод, о котором пойдёт речь в этом параграфе, позволяет решать многие из неравенств вида

$$a_1(x)\cdot a_2(x)\cdot\ldots\cdot a_n(x)\vee0 \qquad (1)$$

или
$$\frac{a_1(x)\cdot a_2(x)\cdot\ldots\cdot a_n(x)}{a_{n+1}(x)\cdot a_{n+2}(x)\cdot\ldots\cdot a_{n+m}(x)} \vee 0 \tag{2}$$
(здесь знаком «$\vee$» обозначен один из четырёх возможных знаков неравенств «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$»; n и m — натуральные числа).

Основан он на очевидном утверждении: при замене любого множителя в числовом неравенстве вида (1) или (2) числом того же знака, что и заменяемое, знак неравенства не меняется, т. е. такая замена приводит к верному неравенству. Ключевая идея метода — замена одного или нескольких множителей (алгебраических выражений) в левой части неравенства более простыми алгебраическими выражениями «того же знака», что, как понятно, даёт возможность упростить и решение самого неравенства. Словосочетание «того же знака» заключено в кавычки, поскольку, разумеется, нуждается в более формальном определении.

Определение 1. Два алгебраических выражения $a(x)$ и $b(x)$ называются *знакотождественными*, если они имеют соответственно одни и те же промежутки знакоположительности, знакоотрицательности и нули.

Тот факт, что алгебраические выражения $a(x)$ и $b(x)$ являются знакотождественными, будем обозначать так: $\operatorname{sign}(a(x)) = \operatorname{sign}(b(x))$ (от латинского signum — знак).

Если алгебраические выражения $a(x)$ и $b(x)$ знакотождественны, то справедливы следующие равносильные переходы:
$$a(x)c(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow b(x)c(x)\geqslant 0,\quad \frac{a(x)}{c(x)}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{b(x)}{c(x)}\geqslant 0,\quad \frac{c(x)}{a(x)}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{c(x)}{b(x)}\geqslant 0$$
и аналогичные им для неравенств противоположного знака и строгих неравенств. В самом деле, если число x_0 является, например, решением неравенства $a(x)c(x)\geqslant 0$, это означает, что $a(x_0)c(x_0)\geqslant 0$. Но в силу знакотождественности алгебраических выражений $a(x)$ и $b(x)$ числа $a(x_0)$ и $b(x_0)$ либо одного знака, либо оба равны нулю. Поэтому и $b(x_0)c(x_0)\geqslant 0$, т. е. x_0 — решение неравенства $b(x)c(x)\geqslant 0$. Столь же просто показать, что справедливо и обратное утверждение, а значит, неравенства $a(x)c(x)\geqslant 0$ и $b(x)c(x)\geqslant 0$ равносильны. Доказательство равносильности двух других неравенств совершенно аналогично.

Итак, любое алгебраическое выражение в левой части неравенства вида (1) или (2) можно заменить любым другим знакотождественным выражением. Заметим, что такая замена возможна только для неравенств указанного вида; если, например, правая часть неравенства отлична от нуля, то делать такую замену уже нельзя, поскольку полученное неравенство не будет равносильно данному. Ясно и то, что при решении неравенств указанного вида менять алгебраическое выражение на знакотождественное целесообразно только в том случае, если знакотождественное выражение имеет более простой вид. Найти пары знакотождественных выражений $a(x)$ и $b(x)$ можно, основываясь на свойствах числовых неравенств. Приведём такие пары в таблице 4 (n и m — натуральные числа, l и c — действительные числа, $u(x)$ и $v(x)$ — произвольные алгебраические выражения).

Таблица 4

1	$a(x)=(u(x))^{2n+1}\pm(v(x))^{2n+1}$	$b(x)=u(x)\pm v(x)$
2	$a(x)=(u(x))^{2n}-(v(x))^{2n}$	$b(x)=(u(x))^2-(v(x))^2$
3	$a(x)=\|u(x)\|-\|v(x)\|$	$b(x)=(u(x))^2-(v(x))^2$
4	$a(x)=\sqrt[2n+1]{u(x)}\pm\sqrt[2n+1]{v(x)}$	$b(x)=u(x)\pm v(x)$
5	$a(x)=\sqrt[2n]{u(x)}-\sqrt[2n]{v(x)}$	$b(x)=u(x)-v(x)$ (при условиях $u(x)\geqslant 0$ и $v(x)\geqslant 0$)
6	$a(x)=l^{u(x)}-l^{v(x)}$ при $l>1$	$b(x)=u(x)-v(x)$
7	$a(x)=l^{u(x)}-l^{v(x)}$ при $0<l<1$	$b(x)=v(x)-u(x)$
8	$a(x)=\log_c u(x)-\log_c v(x)$ при $c>1$	$b(x)=u(x)-v(x)$ (при условиях $u(x)>0$, $v(x)>0$)
9	$a(x)=\log_c u(x)-\log_c v(x)$ при $0<c<1$	$b(x)=v(x)-u(x)$ (при условиях $u(x)>0$, $v(x)>0$)
10	$a(x)=\log_c u(x)$ при $c>1$	$b(x)=u(x)-1$ (при условии $u(x)>0$)
11	$a(x)=\log_c u(x)$ при $0<c<1$	$b(x)=1-u(x)$ (при условии $u(x)>0$)
12	$a(x)=\log_{c(x)} u(x)$	$b(x)=\dfrac{u(x)-1}{c(x)-1}$ (при условиях $u(x)>0$, $c(x)>0$)

Обоснование знакотождественности этих пар не представляет труда. В самом деле, докажем, например, знакотождественность разности модулей двух выражений и разности квадратов этих выражений. Если $a(x)=|u(x)|-|v(x)|$, то $a(x)>0$ тогда и только тогда, когда

$$|u(x)|-|v(x)|>0 \Leftrightarrow |u(x)|>|v(x)| \Leftrightarrow u^2(x)>v^2(x) \Leftrightarrow u^2(x)-v^2(x)>0,$$

т. е. $b(x)>0$. Отсюда следует совпадение промежутков знакоположительности выражений $a(x)$ и $b(x)$. Совпадение промежутков знакоотрицательности и совпадение нулей обосновывается аналогично.

Заметим, что в общем случае если $u(x) \geqslant 0$ и $v(x) \geqslant 0$, то

$$\operatorname{sign}(u(x) - v(x)) = \operatorname{sign}((u(x))^2 - (v(x))^2)$$

(т. е. разность двух неотрицательных при любом значении переменной алгебраических выражений и разность их квадратов знакотождественны).

Остальные утверждения о знакотождественных парах можно доказать аналогично, используя свойства соответствующих функций. То, что разность одинаковых нечётных степеней (либо разность двух корней одной и той же нечётной степени) двух алгебраических выражений знакотождественна разности этих выражений, достаточно очевидно. Поясним, почему соответствующее утверждение верно и для сумм указанных выражений, на примере корней. Действительно, зная, что разность корней одной нечётной степени можно заменить разностью подкоренных выражений, можно преобразовать сумму корней одной нечётной степени так:

$$a(x) = \sqrt[2n+1]{u(x)} + \sqrt[2n+1]{v(x)} = \sqrt[2n+1]{u(x)} - \sqrt[2n+1]{-v(x)},$$

откуда и следует, что

$$\operatorname{sign}\left(\sqrt[2n+1]{u(x)} + \sqrt[2n+1]{v(x)}\right) = \operatorname{sign}(u(x) - (-v(x))) = \operatorname{sign}(u(x) + v(x)).$$

Точно так же достаточно понимать, что разность двух логарифмов по основанию, большему 1, можно заменить разностью выражений под знаками логарифмов, добавив условия положительности этих выражений. Тогда 10-я и 12-я строки таблицы будут простыми следствиями такой замены. В самом деле, $\log_c u(x) = \log_c u(x) - \log_c 1$, и, следовательно, $\operatorname{sign}(\log_c u(x)) = \operatorname{sign}(u(x) - 1)$ при условиях $c > 1$, $u(x) > 0$. Кроме того, если одним из множителей в неравенствах вида (1) или (2) является логарифм с переменным основанием, то и его можно заменить знакотождественным множителем (последняя строка таблицы). Для такой замены нужно сначала использовать формулу перехода к новому основанию, выбрав в качестве последнего любое действительное число $m > 1$. Выполним тождественные преобразования:

$$\log_{c(x)} u(x) = \frac{\log_m u(x)}{\log_m c(x)} = \frac{\log_m u(x) - \log_m 1}{\log_m c(x) - \log_m 1}.$$

Отсюда и следует, что

$$\operatorname{sign}(\log_{c(x)} u(x)) = \operatorname{sign}\left(\frac{u(x) - 1}{c(x) - 1}\right)$$

при условиях $c(x) > 0$, $u(x) > 0$. Заметим, что условие $c(x) \neq 1$ будет учтено как бы «автоматически»: ведь неравенства (1) и (2) после замены множителей знакотождественными решаются обычно методом интервалов, и при наличии множителя $\dfrac{u(x)-1}{c(x)-1}$ значения переменной, при которых $c(x)=1$, должны быть «выколоты». Для показательных и логарифмических выражений с основанием, меньшим 1 (строки 7, 9, 11), знакотождественные выражения можно, вообще говоря, не запоминать, а перейдя к основаниям, бóльшим 1, использовать строки 6, 8, 10.

Таким образом, для успешного решения неравенств методом знакотождественных множителей достаточно помнить о четырёх основных парах таких множителей:

1) разность модулей двух выражений (и вообще, разность двух выражений, неотрицательных при всех допустимых значениях переменной) и разность квадратов этих выражений;

2) разность двух корней одной степени и разность подкоренных выражений (при условии неотрицательности последних в случае корней чётной степени);

3) разность двух показательных выражений с одним и тем же числовым основанием, бóльшим 1, и разность показателей;

4) разность двух логарифмов с одним и тем же числовым основанием, бóльшим 1, и разность выражений под знаками логарифмов (при условии положительности этих выражений).

Прежде чем переходить к примерам, сформулируем ещё одно утверждение, из которого легко вывести знакотождественность большинства приведённых в таблице пар.

Утверждение 1. *Если функция $y=a(t)$ монотонно возрастает на всей области определения, то для любых t_1 и t_2, принадлежащих этой области,* $\operatorname{sign}(a(t_1)-a(t_2))=\operatorname{sign}(t_1-t_2)$.

Доказательство легко следует из определения монотонно возрастающей функции. Действительно, если, например, $t_1-t_2>0$, то $t_1>t_2$ и $a(t_1)>a(t_2)$ (в силу возрастания функции $y=a(t)$), а значит, $a(t_1)-a(t_2)>0$. Обратно, если $a(t_1)-a(t_2)>0$, то $a(t_1)>a(t_2)$. Но тогда $t_1>t_2$ и $t_1-t_2>0$ (если допустить, что $t_1\leqslant t_2$, то в силу возрастания функции $y=a(t)$ получим, что и $a(t_1)\leqslant a(t_2)$, т. е. $a(t_1)-a(t_2)\leqslant 0$, что невозможно). Таким образом, промежутки знакоположительности выражений $a(t_1)-a(t_2)$ и t_1-t_2 одни и те же. Для промежутков знакоотрицательности и нулей доказательство аналогично.

В сущности, доказанное утверждение означает, что выражения $a(t_1)-a(t_2)$ и t_1-t_2 знакотождественны в области определения возрастающей функции $y=a(t)$. Поскольку функции $a(t)=t^{2n+1}$, $a(t)=\sqrt[n]{t}$, $a(t)=l^t$ (при $l>1$), $a(t)=\log_c t$ (при $c>1$) монотонно возрастают каждая в своей области определения, это позволяет для каждой из них при решении неравенств (1) и (2) менять любое выражение вида $a(t_1)-a(t_2)$ на знакотождественное выражение t_1-t_2, добавляя при необходимости соответствующие ограничения (условия принадлежности t_1 и t_2 области определения функции $y=a(t)$). При этом t_1 и t_2 могут быть любыми алгебраическими выражениями с переменной x.

Ясно, что для монотонно убывающей функции будет справедливо аналогичное утверждение: если функция $y=a(t)$ монотонно убывает на всей области определения, то для любых t_1 и t_2, принадлежащих этой области, $\operatorname{sign}(a(t_1)-a(t_2))=\operatorname{sign}(t_2-t_1)$.

Для решения некоторых неравенств оказывается полезным следующее утверждение, являющееся следствием предыдущего.

Утверждение 2. *Если функция* $y=f(x)$ *монотонно возрастает на всей области определения и* $f(x_0)=0$, *то* $\operatorname{sign}(f(x))=\operatorname{sign}(x-x_0)$; *если функция* $y=f(x)$ *монотонно убывает на всей области определения и* $f(x_0)=0$, *то* $\operatorname{sign}(f(x))=\operatorname{sign}(x_0-x)$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решите неравенство

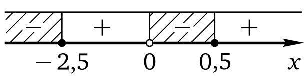
$$\frac{4^{x^2+3x-2}-(0{,}5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1}\leqslant 0.$$

Решение. Перейдём в числителе дроби к основанию 2, а в знаменателе — к основанию 5, после чего применим метод знакотождественных множителей:

$$\frac{2^{2x^2+6x-4}-2^{-2x^2-2x+1}}{5^x-5^0}\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+6x-4-(-2x^2-2x+1)}{x-0}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2+8x-5}{x}\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2{,}5)(x-0{,}5)}{x}\leqslant 0.$$

Последнее неравенство легко решается методом интервалов:



Ответ: $(-\infty;\ -2{,}5]\cup(0;\ 0{,}5]$.

Пример 2. Решите неравенство

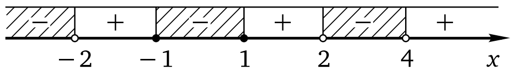
$$\frac{|3x-2|-|2x-3|}{|x^2+x-8|-|x^2-x|}\leqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Заменим разности модулей разностями квадратов. Получим равносильное неравенство

$$\frac{(3x-2)^2-(2x-3)^2}{(x^2+x-8)^2-(x^2-x)^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(3x-2-2x+3)(3x-2+2x-3)}{(x^2+x-8-x^2+x)(x^2+x-8+x^2-x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(5x-5)}{(2x-8)(2x^2-8)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x-4)(x-2)(x+2)} \leqslant 0.$$

Последнее неравенство легко решается методом интервалов:



Ответ: $(-\infty; -2) \cup [-1; 1] \cup (2; 4)$.

Пример 3. Решите неравенство

$$\frac{|2x^2-11x+10|-x^2}{|6x^2-11x+4|-1} \leqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Поскольку $x^2 = |x^2|$; $1 = |1|$, справедливы следующие равносильные преобразования:

$$\frac{|2x^2-11x+10|-x^2}{|6x^2-11x+4|-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{|2x^2-11x+10|-|x^2|}{|6x^2-11x+4|-|1|} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x^2-11x+10)^2-(x^2)^2}{(6x^2-11x+4)^2-1^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-10)(x-2)\left(x-\frac{5}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)\left(x-\frac{5}{6}\right)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-10)(x-2)\left(x-\frac{5}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{6}\right)} \geqslant 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Последнюю систему решаем методом интервалов:

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{6}; 1\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{3}; 2\right] \cup [10; \infty)$.

Пример 4. Решите неравенство

$$\frac{||x^2-x|-1|-1}{||4x+3|-2|-1} \geqslant 0.$$

Р е ш е н и е. В силу метода знакотождественных множителей

$$\frac{|a|-|b|}{|c|-|d|} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)(a+b)}{(c-d)(c+d)} \geqslant 0.$$

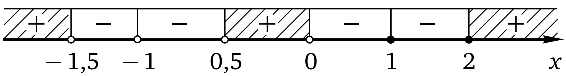
Поэтому можно сразу перейти к неравенству

$$\frac{(|x^2-x|-2)\cdot|x^2-x|}{(|4x+3|-3)(|4x+3|-1)} \geqslant 0.$$

Вновь воспользовавшись тем же преобразованием, получим неравенство

$$\frac{(x^2-x-2)(x^2-x+2)\cdot|x^2-x|}{4x(4x+6)(4x+2)(4x+4)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)\cdot|x^2-x|}{x(x+1{,}5)(x+0{,}5)(x+1)} \geqslant 0.$$

Последнее неравенство решим методом интервалов:



Ответ: $(-\infty; -1{,}5) \cup (-0{,}5; 0) \cup \{1\} \cup [2; \infty)$.

Пример 5. Решите неравенство

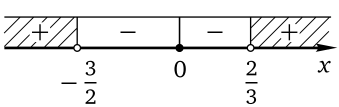
$$\frac{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{3x^2+4x-2}+\sqrt[3]{3x^2+x-4}} \geqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Заметим, что числитель и знаменатель дроби определены при любых действительных значениях переменной (для числителя это следует из отрицательности дискриминантов каждого из квадратных трёхчленов и положительности коэффициента при второй степени переменной). Перепишем неравенство, представив знаменатель дроби в виде разности корней, после чего воспользуемся методом знакотождественных множителей:

$$\frac{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{3x^2+4x-2}-\sqrt[3]{-3x^2-x+4}} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+x+1-x^2-x-1}{3x^2+4x-2-(-3x^2-x+4)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{6x^2+5x-6} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)} \geqslant 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов:



Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \{0\} \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$.

Пример 6. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{3x-2}}-\sqrt{x+\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}}<0.$$

Решение. Для решения этого неравенства воспользуемся тем, что

$$x-2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-1)^2\geqslant 0,\quad x+3-4\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-2)^2\geqslant 0.$$

Применим метод знакотождественных множителей, заменив несколько раз разность корней разностью подкоренных выражений:

$$\frac{x+\sqrt{3x-2}-x-\sqrt{2x-3}}{x-2\sqrt{x-1}-x-3+4\sqrt{x-1}}<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-3}}{2\sqrt{x-1}-3}<0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-3}}{\sqrt{4x-4}-\sqrt{9}}<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3x-2-2x+3}{4x-4-9}<0,\\ x\geqslant\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+1}{4x-13}<0,\\ x\geqslant\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\leqslant x<\frac{13}{4}.$$

Ответ: $\left[\frac{3}{2};\frac{13}{4}\right)$.

При решении следующего примера применим тождества $|a|=\sqrt{a^2}$, $a=\sqrt[3]{a^3}$ и $|a|^2=a^2$.

Пример 7. Решите неравенство

$$\frac{|x+1|-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-x}\leqslant 0.$$

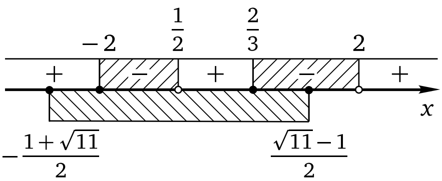
Решение. Справедлива следующая цепочка равносильных преобразований:

$$\frac{|x+1|-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-x}\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-\sqrt[3]{x^3}}\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+1-5+2x+2x^2}{x^3+2x^2-5x+2-x^3}\leqslant 0,\\ 2x^2+2x-5\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3x^2+4x-4}{2x^2-5x+2}\leqslant 0,\\ 2x^2+2x-5\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}\leqslant 0,\\ -\dfrac{1+\sqrt{11}}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\sqrt{11}-1}{2}.\end{cases}$$

Решив последнюю систему методом интервалов, получим ответ.



Ответ: $\left[-2;\ \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{3};\ \frac{\sqrt{11}-1}{2}\right]$.

Пример 8. Решите неравенство

$$\frac{\log_2(3x+2)}{\log_3(2x+3)} \leqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Традиционный способ решения подобных неравенств состоит в рассмотрении двух случаев. Применим метод знакотождественных множителей, предварительно представив числитель и знаменатель дроби в виде разностей логарифмов:

$$\frac{\log_2(3x+2)-\log_2 1}{\log_3(2x+3)-\log_3 1} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+2-1}{2x+3-1} \leqslant 0, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+1}{2x+2} \leqslant 0, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+1}{x+1} \leqslant 0, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x \leqslant -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left(-\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3}\right]$.

Пример 9. Решите неравенство

$$\frac{\log_{0,2}\frac{1}{2x-1}+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_{0,2}\frac{1}{3-2x}} \geqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Приведём логарифмы к основанию 5, сложим их и воспользуемся тем же приёмом, что и при решении предыдущего примера:

$$\frac{\log_5(2x-1)+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_5(3-2x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5 < x < 1{,}5, \\ \dfrac{\log_5(-2x^2+5x-2)}{\log_5(-4x^2+8x-3)} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5 < x < 1{,}5, \\ \dfrac{\log_5(-2x^2+5x-2)-\log_5 1}{\log_5(-4x^2+8x-3)-\log_5 1} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5 < x < 1{,}5, \\ \dfrac{-2x^2+5x-2-1}{-4x^2+8x-3-1} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5 < x < 1{,}5, \\ \dfrac{-2x^2+5x-3}{-4x^2+8x-4} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5 < x < 1{,}5, \\ \dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-2x+1} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5 < x < 1{,}5, \\ \dfrac{(x-1)(x-1{,}5)}{(x-1)^2} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5 < x < 1{,}5, \\ \dfrac{x-1{,}5}{x-1} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0{,}5 < x < 1.$$

Ответ: $(0{,}5; 1)$.

Теперь рассмотрим пример, в котором приходится «заменить» сразу три разности.

Пример 10. Решите неравенство

$$\frac{(\log_2(2x+1)-\log_2(x+2))(|x|-|x-2|)}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}} \leqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Данное неравенство равносильно следующему:

$$\begin{cases} \dfrac{((2x+1)-(x+2))(x^2-(x-2)^2)}{(3x-2)-(2x-1)} \leqslant 0, \\ x \geqslant \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)\cdot 4(x-1)}{x-1} \leqslant 0, \\ x \geqslant \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x-1} \leqslant 0, \\ x \geqslant \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leqslant x < 1.$$

Ответ: $\left[\frac{2}{3}; 1\right)$.

В ряду стандартных неравенств особое место занимают логарифмические неравенства, содержащие переменную в основании логарифма, поскольку решение таких неравенств вызывает определённые трудности у школьников и абитуриентов. Наиболее распространённый способ решения этих неравенств заключается в рассмотрении двух случаев: 1) основание больше единицы; 2) основание положительно и меньше единицы. Другим методом решения является метод интервалов (см. § 1.2), заключающийся в приведении неравенства к виду $f(x) \vee 0$ (где символом «$\vee$» обозначен один из знаков $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$), разбиении области определения $D(f)$ нулями функции $f(x)$ на несколько интервалов и определении знака функции $f(x)$ на каждом интервале по её знаку в одной из точек соответствующего интервала. Третий метод — метод знакотождественных множителей.

Рассмотрим вначале неравенство вида $\log_{h(x)} f(x) < b$. Воспользуемся формулой перехода к новому основанию, свойствами логарифмов и методом знакотождественных множителей:

$$\log_{h(x)} f(x) < b \Leftrightarrow \frac{\log_2 f(x)}{\log_2 h(x)} - b < 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 f(x) - b\log_2 h(x)}{\log_2 h(x)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 f(x) - \log_2 h^b(x)}{\log_2 h(x) - \log_2 1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - h^b(x)}{h(x) - 1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

Важнейшими частными случаями являются неравенства вида $\log_{h(x)} f(x) < b$ при $b \in \{0; 1; 2\}$:

$$1)\ \log_{h(x)} f(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - 1}{h(x) - 1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0; \end{cases}$$

$$2)\ \log_{h(x)} f(x) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - h(x)}{h(x) - 1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0; \end{cases}$$

$$3)\ \log_{h(x)} f(x) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - (h(x))^2}{h(x) - 1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

Конечно же, запоминать эти системы не надо. Следует помнить лишь об основной идее решения подобных неравенств, заключающейся в переходе к основанию, большему 1, и замене разности логарифмов разностью алгебраических выражений под знаками логарифмов при естественных ограничениях на каждое из них.

Пример 11. Решите неравенство $\log_{2x-5}(5x-2) \geqslant 1$.

Р е ш е н и е. Перейдём к произвольному основанию, большему 1 (например, к основанию 2), и применим метод знакотождественных множителей:

$$\log_{2x-5}(5x-2) \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2)}{\log_2(2x-5)} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2) - \log_2(2x-5)}{\log_2(2x-5)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2) - \log_2(2x-5)}{\log_2(2x-5) - \log_2 1} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(5x-2)-(2x-5)}{(2x-5)-1} \geqslant 0, \\ 5x-2 > 0, \\ 2x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+3}{2x-6} \geqslant 0, \\ x > 2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-3} \geqslant 0, \\ x > 2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Ответ: $(3; +\infty)$.

Для экономии места при решении всех следующих примеров некоторые очевидные преобразования будут опускаться.

Пример 12. Решите неравенство

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \leqslant 2.$$

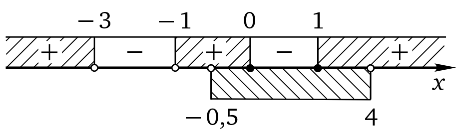
Р е ш е н и е. Применим теперь уже стандартные для решения неравенств такого типа преобразования:

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{\log_2(4+7x-2x^2)}{\log_2|x+2|} - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(4+7x-2x^2) - \log_2|x+2|^2}{\log_2|x+2| - \log_2 1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(4+7x-2x^2)-(x+2)^2}{|x+2|-1} \leqslant 0, \\ 4+7x-2x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3x^2+3x}{(x+2)^2-1^2} \leqslant 0, \\ 2x^2-7x-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x+3)} \geqslant 0, \\ -0{,}5 < x < 4. \end{cases}$$

Последняя система легко решается методом интервалов:



Ответ: $(-0{,}5; 0] \cup [1; 4)$.

При решении неравенства были использованы тождество $|a|^2 = a^2$ и замена алгебраического выражения $|u(x)| - |v(x)|$ знакотождественным выражением $u^2(x) - v^2(x)$. В дальнейшем будем опускать переход от «одиночного» логарифма к разности этого логарифма и логарифма числа 1 по тому же основанию, сразу меняя соответствующий множитель на знакотождественный (т. е. на разность алгебраического выражения под знаком логарифма и 1 при условии положительности этого алгебраического выражения).

Пример 13. Решите неравенство

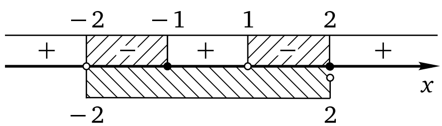
$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Применим метод знакотождественных множителей, перейдя к произвольному основанию, большему 1. Для более компактной записи будем здесь и далее использовать переход к основанию 10:

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\lg(x+2)}{\lg(2-x)}\cdot\frac{\lg(3-x)}{\lg(x+3)}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x+1)(2-x)}{(1-x)(x+2)}\leqslant 0,\\ -2<x<2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}\leqslant 0,\\ -2<x<2.\end{cases}$$

Последняя система легко решается методом интервалов:



Ответ: $(-2;-1]\cup(1;2)$.

Для решения неравенств вида $\log_{h(x)} f(x)<\log_{h(x)} g(x)$ будем использовать обычные преобразования:

$$\log_{h(x)} f(x)<\log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow \frac{\lg f(x)}{\lg h(x)}-\frac{\lg g(x)}{\lg h(x)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg f(x)-\lg g(x)}{\lg h(x)}<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{f(x)-g(x)}{h(x)-1}<0,\\ f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ h(x)>0.\end{cases}$$

Эти преобразования, разумеется, остаются в силе как для неравенств противоположного знака, так и для нестрогих неравенств.

Пример 14. Решите неравенство

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1)\geqslant\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2).$$

Решение. Имеем

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1) \geqslant \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2) \Leftrightarrow \frac{\lg(2x^2+x-1)}{\lg\frac{3x-1}{x+2}} - $$

$$- \frac{\lg(11x-6-3x^2)}{\lg\frac{3x-1}{x+2}} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\lg(2x^2+x-1)-\lg(11x-6-3x^2)}{\lg\frac{3x-1}{x+2}} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2x^2+x-1)-(11x-6-3x^2)}{\frac{3x-1}{x+2}-1} \geqslant 0, \\ 2x^2+x-1>0, \\ 11x-6-3x^2>0, \\ \dfrac{3x-1}{x+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{2x-3} \geqslant 0, \\ \dfrac{2}{3}<x<3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ 1{,}5<x<3. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1\}\cup(1{,}5;3)$.

Последняя группа стандартных логарифмических неравенств, содержащих неизвестную в основании логарифма, — неравенства, левая и правая части которых представляют собой логарифмы с разными основаниями от одного и того же алгебраического выражения. Равносильная система и в этом случае получается с помощью преобразований, аналогичных рассмотренным ранее:

$$\log_{f(x)} h(x) < \log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow \frac{\lg h(x)}{\lg f(x)} - \frac{\lg h(x)}{\lg g(x)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg h(x)\cdot\left(\frac{1}{\lg f(x)} - \frac{1}{\lg g(x)}\right) < 0 \Leftrightarrow \lg h(x)\cdot\frac{\lg g(x)-\lg f(x)}{\lg f(x)\cdot\lg g(x)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(h(x)-1)(g(x)-f(x))}{(f(x)-1)(g(x)-1)} < 0, \\ f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ h(x)>0. \end{cases}$$

Разумеется, эти преобразования применимы и в случае неравенства противоположного знака, и в случае нестрогих неравенств. Последнее особенно важно, поскольку случай равенства $h(x)$ единице будет учтён в соответствующей системе, что позволит избежать потери решения, которая часто происходит при традиционном решении путём перехода к основанию $h(x)$.

Пример 15. Решите неравенство

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geqslant \log_{2x^2-5x+3}(3-x).$$

Решение. Имеем

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geqslant \log_{2x^2-5x+3}(3-x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\lg(3-x)}{\lg(12x^2-41x+35)} - \frac{\lg(3-x)}{\lg(2x^2-5x+3)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\lg(3-x)\cdot(\lg(2x^2-5x+3)-\lg(12x^2-41x+35))}{\lg(12x^2-41x+35)\cdot\lg(2x^2-5x+3)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2-x)(-10x^2+36x-32)}{(12x^2-41x+34)(2x^2-5x+2)} \geqslant 0, \\ 3-x>0, \\ 12x^2-41x+35>0, \\ 2x^2-5x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2\left(x-\frac{8}{5}\right)}{\left(x-\frac{17}{12}\right)(x-2)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \geqslant 0, \\ x<3, \\ \left(x-\dfrac{5}{3}\right)\left(x-\dfrac{7}{4}\right)>0, \\ (x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)>0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства последней системы — объединение промежутков $\left(\frac{1}{2}; \frac{17}{12}\right) \cup \left[\frac{8}{5}; 2\right) \cup (2; \infty)$. Пересечением решений трёх оставшихся неравенств является множество $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 3\right)$. Следовательно, решение всей системы: $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{8}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 2\right) \cup (2; 3)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{8}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 2\right) \cup (2; 3)$.

Очевидно, что в ряде случаев метод знакотождественных множителей позволяет решать логарифмические неравенства с переменным основанием быстрее и эффективнее по сравнению с другими методами, предоставляя возможность сэкономить время и силы на экзамене для решения других заданий.

Метод знакотождественных множителей получил широкое распространение в последние годы. В одной из самых первых статей о методе, написанной автором этого пособия много лет назад, использовалось название «метод замены функций»; в ряде публикаций его называют «методом замены множителей» или «методом рационализации». Последнее название уже совсем не выдерживает критики: ведь решение иррационального, показательного или логарифмического неравенства любым другим методом в итоге сводится к решению одного или нескольких рациональных неравенств, т. е. к «рационализации» данных неравенств. На взгляд автора, терминологически наиболее точным является название, приведённое в заголовке этого параграфа. Это название будет использоваться и в дальнейшем.

Упражнения к § 1.6

Решите неравенство.

1. а) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{3x^2-x-4}<0$; **б)** $\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{3x^2-13x+10}<0$.

2. а) $\dfrac{|\sqrt{x}-1|-\sqrt{x}}{|2x-1|-x}>0$; **б)** $\dfrac{|\sqrt{x}-2|-\sqrt{x}}{2|x-2|-x}>0$.

3. а) $\dfrac{3^{x^2}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2-4x}}{|2x+3|-1}\leqslant 0$; **б)** $\dfrac{7^{x^2}-\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{8+8x}}{|2x-5|-1}\leqslant 0$.

4. а) $\dfrac{2|3x-1|-|4x-3|}{|2x^2+x-4|-|2x^2-x|}\leqslant 0$; **б)** $\dfrac{|9x-2|-3|2x-1|}{|9x^2+3x-8|-3|3x^2-x|}\leqslant 0$.

5. а) $\dfrac{625^{2x^2+3x-1}-(0{,}2)^{8x^2+4x-1}}{6^x-1}\leqslant 0$; **б)** $\dfrac{16^{9x^2+9x-2}-(0{,}5)^{36x^2+12x-2}}{11^x-1}\leqslant 0$.

6. а) $\dfrac{|4x^2-11x+5|-2x^2}{|24x^2-22x+4|-1}\geqslant 0$; **б)** $\dfrac{2|x^2-11x+20|-x^2}{|3x^2-11x+8|-2}\geqslant 0$.

7. а) $\dfrac{|2x^2-x-3|-x^2-2x-1}{|3x^2+x-2|-x^2-2x-1}\leqslant 0$; **б)** $\dfrac{|8x^2-2x-3|-4x^2-4x-1}{2|6x^2+x-1|-4x^2-4x-1}\geqslant 0$.

8. а) $\dfrac{|2|2x^2-x|-1|-1}{||8x+3|-2|-1}\geqslant 0$; **б)** $\dfrac{|3|3x^2-x|-1|-1}{|3|4x+1|-2|-1}\geqslant 0$.

9. а) $\dfrac{\sqrt{18x^2+3x+1}-\sqrt{9x^2+3x+1}}{\sqrt[3]{27x^2+12x-2}+\sqrt[3]{27x^2+3x-4}}\geqslant 0$;

б) $\dfrac{\sqrt{8x^2+2x+1}-\sqrt{4x^2+2x+1}}{\sqrt[3]{12x^2+8x-2}+\sqrt[3]{12x^2+2x-4}}\geqslant 0$.

10. а) $\dfrac{x+\sqrt[3]{x^3-16}}{\log_2(2^{-x}-2)+x+1}>0$; **б)** $\dfrac{x+\sqrt[3]{x^3-54}}{\log_2(2^{-x}-4)+x+1}>0$.

11. а) $\dfrac{\sqrt{3x+\sqrt{9x-2}}-\sqrt{3x+\sqrt{6x-3}}}{\sqrt{3x-2\sqrt{3x-1}}-\sqrt{3x+3-4\sqrt{3x-1}}}<0$;

б) $\dfrac{\sqrt{2x+\sqrt{6x-2}}-\sqrt{2x+\sqrt{4x-3}}}{\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}-\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}}}<0$.

12. а) $\dfrac{|3x+1|-\sqrt{5-6x-18x^2}}{\sqrt[3]{27x^3+18x^2-15x+2}-3x}\leqslant 0$; **б)** $\dfrac{|2x+1|-\sqrt{5-4x-8x^2}}{\sqrt[3]{8x^3+8x^2-10x+2}-2x}\leqslant 0$.

13. а) $\dfrac{\log_5(5x+6)}{\log_6(6x+5)}\leqslant 0$; **б)** $\dfrac{\log_7(8x+7)}{\log_8(7x+8)}\leqslant 0$.

14. а) $\dfrac{\log_2(2x^2-13x+20)-1}{\log_3(x+7)} \leqslant 0$; б) $\dfrac{\log_2(2x^2-17x+35)-1}{\log_7(x+6)} \leqslant 0$.

15. а) $\dfrac{\log_3(x-1)}{\log_3(3x-1)} < 1$; б) $\dfrac{\log_2(x+1)}{\log_2(3x+5)} < 1$.

16. а) $\dfrac{2x^2-7x+3}{\log_2|x-1|} \geqslant 0$; б) $\dfrac{2x^2-11x+12}{\log_5|x-2|} \geqslant 0$.

17. а) $\dfrac{\log_3(10x+3)\cdot\log_3(3x+10)}{\log_3(10x)\cdot\log_3 x} \geqslant 0$; б) $\dfrac{\log_7(5x+7)\cdot\log_7(7x+5)}{\log_7(5x)\cdot\log_7 x} \geqslant 0$.

18. а) $\dfrac{\log_{0,4}\frac{1}{6x-1}+\log_{2,5}(2-3x)}{\log_{2,5}(6x-1)+\log_{0,4}\frac{1}{3-6x}} \geqslant 0$; б) $\dfrac{\log_{0,8}\frac{1}{4x-1}+\log_{1,25}(2-2x)}{\log_{1,25}(4x-1)+\log_{0,8}\frac{1}{3-4x}} \geqslant 0$.

19. а) $\dfrac{(\log_7(6x+1)-\log_7(3x+2))(3|x|-|3x-2|)}{\sqrt{9x-2}-\sqrt{6x-1}} \leqslant 0$;

б) $\dfrac{(\log_6(10x+1)-\log_6(5x+2))(5|x|-|5x-2|)}{\sqrt{15x-2}-\sqrt{10x-1}} \leqslant 0$.

20. а) $\log_{6x-5}(15x-2) \geqslant 1$; б) $\log_{14x-5}(35x-2) \geqslant 1$.

21. а) $\log_{|5x+2|}(4+35x-50x^2) \leqslant 2$; б) $\log_{|3x+2|}(4+21x-18x^2) \leqslant 2$.

22. а) $\log_{2-7x}(7x+2)\cdot\log_{7x+3}(3-7x) \leqslant 0$;

б) $\log_{2-5x}(5x+2)\cdot\log_{5x+3}(3-5x) \leqslant 0$.

23. а) $\log_{\frac{9x-1}{3x+2}}(18x^2+3x-1) \geqslant \log_{\frac{9x-1}{3x+2}}(33x-6-27x^2)$;

б) $\log_{\frac{6x-1}{2x+2}}(8x^2+2x-1) \geqslant \log_{\frac{6x-1}{2x+2}}(22x-6-12x^2)$.

24. а) $\log_{48x^2-82x+35}(3-2x) \geqslant \log_{8x^2-10x+3}(3-2x)$;

б) $\log_{12x^2-17x+6}(2-x) \geqslant \log_{2x^2-x}(2-x)$.

Глава 2. Целые неравенства и системы неравенств

Эта глава посвящена методам решения целых неравенств и систем неравенств. Целыми рациональными неравенствами (или просто целыми неравенствами) называют неравенства вида $f(x) \vee 0$, где $f(x)$ — многочлен, а знаком «$\vee$» здесь и далее обозначен один из четырёх возможных знаков неравенств «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$». Степенью неравенства $f(x) \vee 0$ называется степень многочлена $f(x)$. Неравенства вида $p(x) \vee \vee\, q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены, также называют целыми: они сводятся к неравенству $f(x) \vee 0$, где $f(x) = p(x) - q(x)$. Часто для того, чтобы в левой или правой частях неравенства получить многочлен той или иной степени, надо выполнить некоторые предварительные действия. Как правило, это алгебраические преобразования, связанные с раскрытием скобок, применением формул сокращённого умножения и приведением подобных слагаемых. В некоторых случаях определить степень неравенства можно, не совершая указанные действия, а сделав предварительный устный анализ того, какие алгебраические выражения получатся после выполнения таких действий.

В первом параграфе главы разбираются простейшие целые неравенства — линейные и квадратные, а также их системы, во втором — более сложные неравенства и системы неравенств.

§ 2.1. Линейные и квадратные неравенства

Линейные неравенства

Напомним, что функция $y = ax + b$ называется линейной. Неравенства вида $ax + b \vee 0$ при $a \neq 0$ (знаком «$\vee$» обозначен, как обычно, один из четырёх возможных знаков неравенств «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$») также называются линейными. При $a \neq 0$ алгебраическое выражение $f(x) = ax + b$ является многочленом первой степени. Соответственно, линейные неравенства — это целые неравенства первой степени.

Для придания наглядного смысла решению линейных неравенств воспользуемся графической интерпретацией.

Графиком линейной функции $y = ax + b$ является прямая, пересекающая ось абсцисс в точке, ордината которой равна нулю, т. е. $ax + b = 0$, откуда $x = -\dfrac{b}{a}$. Если $a > 0$, то линейная функция принимает положительные значения при всех $x \in \left(-\dfrac{b}{a}; +\infty\right)$, отрицательные значения —

при всех $x \in \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right)$ и обращается в нуль при $x = -\dfrac{b}{a}$ (рис. 1а). Если $a < 0$, то линейная функция принимает положительные значения при всех $x \in \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right)$, отрицательные значения — при всех $x \in \left(-\dfrac{b}{a}; +\infty\right)$ и обращается в нуль при $x = -\dfrac{b}{a}$ (рис. 1б).

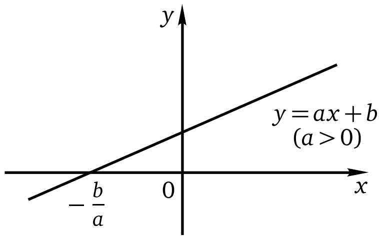


Рис. 1а

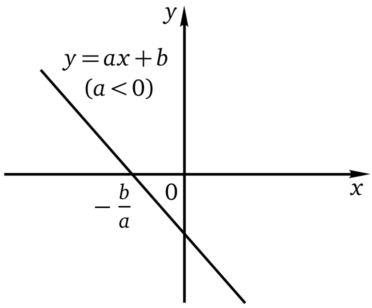


Рис. 1б

Разумеется, при решении линейных неравенств графики обычно не используют, а приводят неравенство к виду $ax \vee -b$, после чего делят обе части последнего неравенства на число a. Стандартная ошибка в решениях линейных неравенств связана именно с этим делением: если число a отрицательно, знак неравенства нужно изменить на противоположный, о чем многие забывают. При решении неравенств вида $ax + b \vee cx + d$ удобно все слагаемые, содержащие переменную, перенести в левую часть, а все числа — в правую: $ax - cx \vee d - b$, откуда $(a - c)x \vee d - b$. Если $a \neq c$, то остаётся сделать последний шаг — разделить обе части неравенства на число $a - c$ (с изменением знака неравенства на противоположный в случае, если это число отрицательно). Если $a = c$, получаем неравенство вида $0 \cdot x \vee d - b$, которое — в зависимости от знака неравенства и числа в правой части — либо не имеет решений, либо справедливо при любом действительном значении переменной.

Пример 1. Решите неравенство $3x + 7 < 7x + 3$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $3x - 7x < 3 - 7$, откуда $-4x < -4$. Разделим обе части последнего неравенства на число -4, поменяв знак неравенства на противоположный. Получим $x > 1$.

Ответ: $(1; +\infty)$.

Следующая задача — неравенство первой степени с иррациональными коэффициентами, требующее для решения определённой арифметической культуры.

Пример 2. Решите неравенство $x\sqrt{2} \geqslant x\sqrt[3]{3} + \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $x\sqrt{2} - x\sqrt[3]{3} \geqslant \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$, откуда $(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3})x \geqslant \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$. Определить знак числа в скобках можно разными способами, например, записав уменьшаемое и вычитаемое в виде корней одной степени:

$$\sqrt{2} - \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} - \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{8} - \sqrt[6]{9} < 0.$$

Следовательно, число $\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}$ отрицательно, и при делении обеих частей неравенства на это число знак неравенства нужно изменить на противоположный. Получим $x \leqslant \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}}$.

Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}}\right]$.

Решение систем целых неравенств первой степени с одной переменной состоит в решении каждого неравенства системы с последующим нахождением пересечения найденных множеств решений.

Пример 3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 7(6x+5) - 5(6x+7) \leqslant 12x + 21, \\ \dfrac{x+2}{3} + \dfrac{x+3}{2} \geqslant \dfrac{x+5}{4} + \dfrac{x+4}{5}. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Раскроем скобки в левой части этого неравенства:

$$42x + 35 - 30x - 35 \leqslant 12x + 21.$$

После упрощений получим $12x \leqslant 12x + 21$, откуда $12x - 12x \leqslant 21$, или $0 \cdot x \leqslant 21$. Решением последнего неравенства является любое действительное число. Следовательно, множеством решений всей системы будет множество решений её второго неравенства.

Решим второе неравенство данной системы. Чтобы избавиться от дробей, умножим обе части этого неравенства на общий знаменатель всех дробей, т. е. на $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Получим

$$20(x+2) + 30(x+3) \geqslant 15(x+5) + 12(x+4).$$

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые в каждой части полученного неравенства:

$$20x + 40 + 30x + 90 \geqslant 15x + 75 + 12x + 48,$$

откуда

$$50x + 130 \geqslant 27x + 123.$$

Перенесём все слагаемые, содержащие переменную, в левую часть неравенства, а все числа — в правую:

$$50x - 27x \geqslant 123 - 130,$$

откуда $23x \geqslant -7$. Осталось обе части последнего неравенства разделить на 23, после чего получим $x \geqslant -\frac{7}{23}$.

Ответ: $\left[-\frac{7}{23}; +\infty\right)$.

Замечания. 1. Решение неравенств с дробными коэффициентами обычно связано с большим числом ошибок. Для того чтобы снизить вероятность таких ошибок, рекомендуется по возможности сначала получить неравенство с целыми коэффициентами, умножив обе его части на общий знаменатель дробей, как это было сделано при решении примера 3.

2. В некоторых случаях в процессе решения линейных и более сложных неравенств после приведения подобных слагаемых получается неравенство, не содержащее переменной. Такие ситуации ставят в тупик многих учеников и выпускников, хотя ничего сложного в интерпретации полученных неравенств нет. Для этого достаточно ответить на вопрос: «при каких значениях переменной выполняется полученное неравенство?» Так, например, неравенство $0 > 5$ не выполняется ни при каких допустимых значениях переменной, а неравенство $0 \leqslant 21$ выполняется при любом действительном значении переменной. При решении примера 3 неравенство $0 \leqslant 21$ для большей наглядности было записано в виде $0 \cdot x \leqslant 21$; использовать такую запись рекомендуется в тех случаях, когда ответ на вопрос о решениях неравенств, подобных приведённым выше, вызывает определённые затруднения.

Перейдём теперь к квадратным неравенствам, вспомнив основные определения и факты, связанные с ними.

Квадратные неравенства

Напомним, что функция $y = ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$ называется квадратичной. Неравенства вида $ax^2 + bx + c \vee 0$ при $a \neq 0$ (знаком «$\vee$» обозначен, как обычно, один из четырёх возможных знаков неравенств «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$») называются квадратными. При $a \neq 0$ алгебраическое выражение $f(x) = ax^2 + bx + c$ является многочленом второй степени. Соответственно, квадратные неравенства — это целые неравенства второй степени.

Для придания наглядного смысла решению квадратных неравенств вновь воспользуемся графической интерпретацией.

Сначала рассмотрим случай $a>0$. В этом случае графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Абсцисса x_0 вершины параболы находится по формуле $x_0=-\frac{b}{2a}$. Расположение графика квадратичной функции относительно оси абсцисс существенным образом связано со знаком дискриминанта $D=b^2-4ac$ квадратного трёхчлена ax^2+bx+c.

Если $D>0$, то график функции $y=ax^2+bx+c$ пересекает ось абсцисс в двух точках x_1 и x_2. Числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$; условимся, что здесь и далее x_1 — меньший корень, x_2 — больший корень этого уравнения, т. е. $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, а $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$. Таким образом, если $a>0$ и $D>0$, то квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ принимает положительные значения при всех $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$, отрицательные значения — при всех $x\in(x_1;x_2)$ и обращается в нуль в точках $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ (рис. 2а).

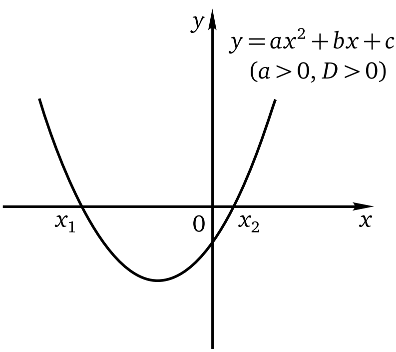


Рис. 2а

Если $D=0$, то $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}=x_0$, т. е. график функции $y=ax^2+bx+c$ имеет с осью абсцисс единственную общую точку — вершину параболы. Таким образом, если $a>0$ и $D=0$, то квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ принимает положительные значения при всех $x\in(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$, обращается в нуль в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$, а отрицательных значений не принимает (рис. 2б).

Если $D<0$, то квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ действительных корней не имеет и, следовательно, график функции $y=ax^2+bx+c$ не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки, т. е. целиком расположен выше оси абсцисс. Таким образом, если $a > 0$ и $D < 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает только положительные значения (рис 2в).

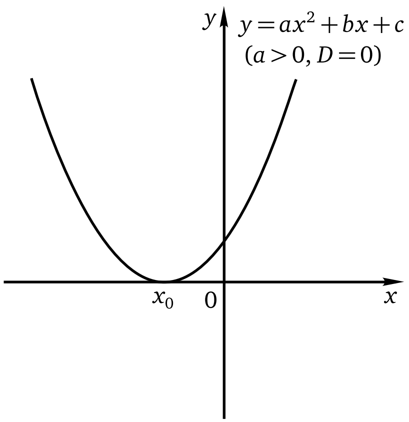


Рис. 2б

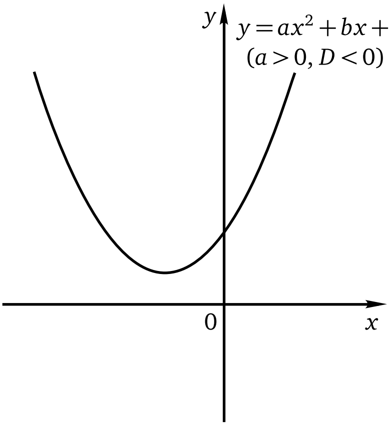


Рис. 2в

Случай $a < 0$ рассматривается аналогично. В этом случае графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, ветви которой направлены вниз.

Если $D > 0$, то график функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в двух точках x_1 и x_2. Таким образом, при $a < 0$ и $D > 0$ квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения при всех $x \in (x_1; x_2)$, отрицательные значения — при всех $x \in (-\infty; x_1) \cup \cup (x_2; +\infty)$ и обращается в нуль в точках $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ (рис. 3а).

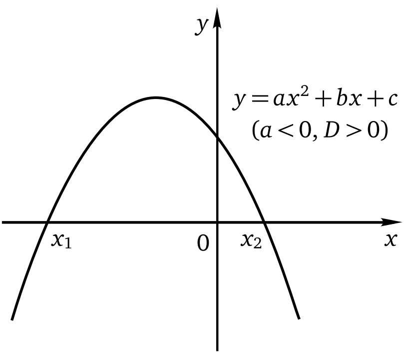


Рис. 3а

Если $D=0$, то график функции $y=ax^2+bx+c$ имеет с осью абсцисс единственную общую точку — вершину x_0 параболы. Таким образом, если $a<0$ и $D=0$, то квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ принимает отрицательные значения при всех $x\in(-\infty;\,x_0)\cup(x_0;\,+\infty)$, обращается в нуль в точке $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, а положительных значений не принимает (рис. 3б).

Если $D<0$, то квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ действительных корней не имеет и, следовательно, график функции $y=ax^2+bx+c$ не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки, т. е. целиком расположен ниже оси абсцисс. Таким образом, если $a<0$ и $D<0$, то квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ принимает только отрицательные значения (рис. 3в).

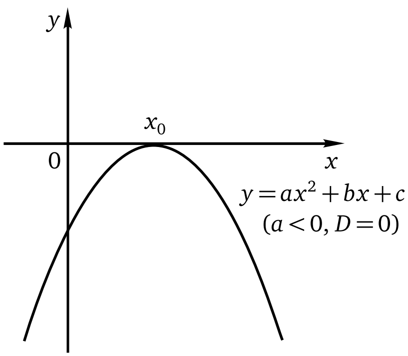


Рис. 3б

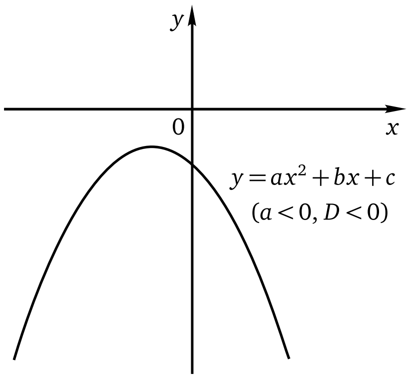


Рис. 3в

Итак, решение квадратного неравенства $ax^2+bx+c\vee 0$ определяется, в сущности, знаком старшего коэффициента a и знаком дискриминанта $D=b^2-4ac$.

Замечание. Получив неравенство $ax^2+bx+c\vee 0$, в котором $a<0$, целесообразно сразу умножить обе части неравенства на -1, поменяв знак неравенства на противоположный. Это нехитрое правило позволит решать квадратные неравенства только с положительным старшим коэффициентом и настоятельно рекомендуется к применению: число ошибок при решении квадратных неравенств с отрицательным старшим коэффициентом на ЕГЭ и ОГЭ по математике выходит за границы разумного, причём ошибки (как в определении знаков корней квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, так и в выписывании самих решений) совершают в большом количестве даже сильные школьники и выпускники.

Квадратное неравенство $ax^2+bx+c \vee 0$ с положительным старшим коэффициентом будем в дальнейшем называть базовым. Поскольку наиболее распространённым типом квадратных неравенств являются неравенства с положительным дискриминантом, найдя нули квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ (или, что то же самое, корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c), т. е. корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, можно, основываясь на свойствах квадратичной функции, сразу выписать множество решений неравенства. При положительном дискриминанте для базовых квадратных неравенств вида $ax^2+bx+c<0$ или $ax^2+bx+c\leqslant 0$ этим множеством является промежуток «между корнями» трёхчлена, т. е. $(x_1; x_2)$ или $[x_1; x_2]$ соответственно; для базовых квадратных неравенств вида $ax^2+bx+c>0$ или $ax^2+bx+c\geqslant 0$ множеством решений является объединение промежутков «за корнями» трёхчлена, т. е. $(-\infty; x_1)\cup(x_2; +\infty)$ или $(-\infty; x_1]\cup[x_2; +\infty)$ соответственно.

Другой способ решения квадратных неравенств связан с разложением квадратного трёхчлена на линейные множители и применением метода интервалов. Напомним, что если дискриминант $D=b^2-4ac$ квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ положителен, а $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ — корни трёхчлена, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Точки x_1 и x_2 разбивают числовую прямую на три промежутка, в каждом из которых знак функции $f(x)$ легко определить по её знаку в одной из точек промежутка, после чего остаётся записать ответ. При решении неполных квадратных неравенств, т. е. неравенств вида $ax^2+bx\vee 0$ или $ax^2+c\vee 0$, обычно используют разложение на линейные множители путём вынесения общего множителя или применения формулы разности квадратов.

Замечание. Можно определить промежутки знакопостоянства выражения $a(x-x_1)(x-x_2)$ при $a>0$ ещё и следующим образом. Так как $a>0$, при любом значении переменной x число $a(x-x_1)(x-x_2)$ будет иметь тот же знак, что и число $(x-x_1)(x-x_2)$. Поскольку $x_1<x_2$, получаем, что $x-x_1>x-x_2$ при любом значении x. Произведение двух чисел отрицательно в том и только том случае, если меньшее из них отрицательно, а большее положительно:

$$\begin{cases} x-x_1>0, \\ x-x_2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>x_1, \\ x<x_2, \end{cases}$$

т. е. $x_1<x<x_2$, или $x\in(x_1; x_2)$. Произведение двух чисел положительно в том и только том случае, если меньшее из них положительно (тогда

и большее положительно) или большее отрицательно (тогда и меньшее отрицательно):

$$\left[\begin{array}{l} x - x_1 < 0, \\ x - x_2 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_1, \\ x > x_2, \end{array}\right.$$

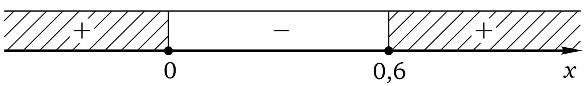
т. е. $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Итак, если привести квадратное неравенство к базовому виду и найти корни соответствующего квадратного трёхчлена, то можно практически сразу записать ответ: в случае существования двух различных корней x_1 и x_2 решением неравенства будет либо промежуток между ними, либо объединение двух числовых лучей с началами в точках x_1 и x_2.

Прежде чем переходить к разбору примеров, подчеркнём, что неважно, какой способ решения квадратного неравенства будет использован: главное, чтобы это решение было хотя бы в минимальной степени обосновано — либо ссылкой на свойства квадратичной функции, либо ссылкой на метод интервалов.

Пример 4. Решите неравенство $5x^2 \geqslant 3x$.

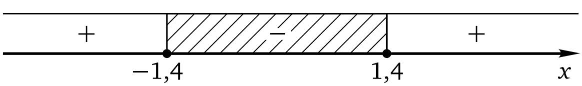
Решение. Приведём неравенство к базовому виду: $5x^2 - 3x \geqslant 0$, откуда $5x(x - 0{,}6) \geqslant 0$. Решим полученное неравенство методом интервалов:



Ответ: $(-\infty; 0] \cup [0{,}6; +\infty)$.

Пример 5. Решите неравенство $49 - 25x^2 \geqslant 0$.

Решение. Приведём неравенство к базовому виду, умножив обе его части на -1 и перегруппировав слагаемые: $-49 + 25x^2 \leqslant 0$, откуда $25x^2 - 49 \leqslant 0$. Разложим по формуле разности квадратов левую часть полученного неравенства на множители: $(5x - 7)(5x + 7) \leqslant 0$. Решим последнее неравенство методом интервалов:



Ответ: $[-1{,}4; 1{,}4]$.

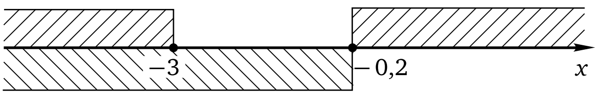
Пример 6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} -0{,}3x + 0{,}2 \geqslant 0{,}2x + 0{,}3, \\ x^2 + 3x + 1 \geqslant 0{,}2(2 - x). \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Для того чтобы избавиться от дробей, умножим обе части этого неравенства на число 10. Получим $-3x+2 \geqslant 2x+3$, откуда $-5x \geqslant 1$ и $x \leqslant -0{,}2$. Множество решений первого неравенства данной системы — промежуток $(-\infty; -0{,}2]$. Решим второе неравенство данной системы. И здесь избавимся от дроби, умножив обе части неравенства на число 5. Получим

$$5x^2+15x+5 \geqslant 2-x.$$

Перенесём все слагаемые в левую часть неравенства и приведём подобные слагаемые: $5x^2+16x+3 \geqslant 0$. Старший коэффициент в левой части полученного неравенства положителен, нулями квадратичной функции $y=5x^2+16x+3$ являются числа -3 и $-0{,}2$ (их можно найти с помощью формулы корней квадратного уравнения или с помощью формул Виета). Поэтому множество решений неравенства: $(-\infty; -3] \cup$ $\cup [-0{,}2; +\infty)$. Следовательно, множество решений данной системы: $(-\infty; -3] \cup \{-0{,}2\}$.



Ответ: $(-\infty; -3] \cup \{-0{,}2\}$.

О формулах Виета для неприведенного квадратного трёхчлена

При решении квадратных неравенств часто оказываются полезными формулы Виета: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$ (здесь x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$). Эти формулы позволяют, подобрав два числа по их произведению и сумме, записать решение квадратного неравенства почти сразу, поскольку найденные числа и являются корнями трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$. Однако (за исключением случая $a=1$) в указанном виде эти формулы использовать неудобно, так как сумма и произведение искомых чисел являются дробями и «подобрать» такие числа сложно. Помогут здесь следующие простые рассуждения. Запишем формулы Виета в виде системы:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Если умножить обе части первого уравнения системы на a, а обе части второго уравнения на a^2, то получим систему, которую можно записать так:

$$\begin{cases} (ax_1)+(ax_2)=-b, \\ (ax_1)(ax_2)=ac. \end{cases}$$

Таким образом, если найти два числа, произведение которых равно ac, а сумма равна $-b$, то это будут числа ax_1 и ax_2, после чего останется каждое из найденных чисел разделить на a и получить корни данного квадратного трёхчлена. При определённом навыке такие вычисления легко проводятся устно: на «роль» ax_1 и ax_2 претендуют делители числа ac, и, перебирая «по возрастанию» возможные делители этого числа (начиная с простейшего — единицы), можно довольно быстро получить ответ.

Пример 7. Решите неравенство $9x^2-73x+8\leqslant 0$.

Решение. Найдём сначала два числа, произведение которых равно $9\cdot 8=72$, а сумма равна 73. Поскольку произведение этих чисел положительно, это числа одного знака. Поскольку их сумма положительна, это положительные числа. Уже простейший делитель числа 72 позволяет найти искомые числа: $1\cdot 72=72$, $1+72=73$. Осталось разделить найденные числа на 9 и получить корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства: $\frac{1}{9}$ и $\frac{72}{9}=8$. Поскольку старший коэффициент трёхчлена положителен, множеством решений неравенства является отрезок $\left[\frac{1}{9};8\right]$.

Ответ: $\left[\frac{1}{9};8\right]$.

Пример 8. Решите неравенство $4x^2-15x+9>0$.

Решение. Найдём два числа, произведение которых равно $4\cdot 9=36$, а сумма равна 15. Поскольку произведение этих чисел положительно, это числа одного знака. Поскольку их сумма положительна, это положительные числа. Перебирая пары делителей числа 36 «по возрастанию» меньшего делителя (1 и 36, 2 и 18, 3 и 12), уже на третьем «шаге» находим числа, сумма которых равна 15: это 3 и 12. Разделив каждое из них на 4, получим корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства: $\frac{3}{4}=0{,}75$ и $\frac{12}{4}=3$. В силу положительности старшего коэффициента этого трёхчлена множеством решений неравенства является объединение промежутков $(-\infty;0{,}75)\cup(3;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;0{,}75)\cup(3;+\infty)$.

Пример 9. Решите неравенство $6x^2+5x-4<0$.

Решение. Найдём сначала два числа, произведение которых равно $6\cdot(-4)=-24$, а сумма равна -5. Поскольку произведение двух этих чисел отрицательно, одно из них является положительным, другое — отрицательным. Сумма этих чисел также отрицательна, поэтому меньший по модулю делитель числа -24 будем брать со знаком «плюс», а больший — со знаком «минус»: 1 и -24, 2 и -12, ... На третьем «шаге» получаем два числа, сумма которых равна -5: это 3 и -8. Разделив каждое из этих чисел на 6, найдём корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства: $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ и $\frac{-8}{6}=-\frac{4}{3}$. Поскольку старший коэффициент трёхчлена положителен, множеством решений неравенства является интервал $\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{2}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{2}\right)$.

Разумеется, рассмотренный приём применим только в тех случаях, когда корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства рациональны.

Пример 10. а) Решите неравенство

$$2x^2-\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{3}\right)x+3+\sqrt{15}<0.$$

б) Найдите все целые решения неравенства.

Р е ш е н и е. а) Найдём дискриминант D квадратного трёхчлена в левой части неравенства:

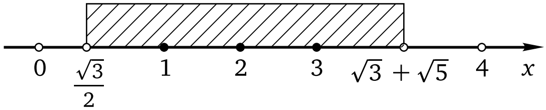
$$D=\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{3}\right)^2-4\cdot2\cdot\left(3+\sqrt{15}\right)=20+12\sqrt{15}+27-24-8\sqrt{15}=$$
$$=23+4\sqrt{15}.$$

Дискриминант представляет собой числовое выражение вида $p+q\sqrt{r}$. Обычно в такого рода задачах это выражение является полным квадратом, т. е. квадратом суммы каких-то двух чисел. Для того чтобы найти эти числа, используют рассуждения, аналогичные следующим. Пусть дискриминант является квадратом суммы чисел a и b: $(a+b)^2=$ $=23+4\sqrt{15}$. Предположим, что сумма квадратов этих чисел равна 23, а их удвоенное произведение $2ab$ равно $4\sqrt{15}$. Тогда $ab=2\sqrt{15}$. Наиболее вероятными «претендентами» на роль a и b являются либо 1 и $2\sqrt{15}$, либо 2 и $\sqrt{15}$, либо $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$, либо $2\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}$. Поскольку сумма квадратов искомых чисел равна 23, это числа $2\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}$. Следовательно, $D=\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$, откуда $\sqrt{D}=2\sqrt{5}+\sqrt{3}$. Тогда по формуле корней квадратного уравнения находим

$$x_1=\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{3}-2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$x_2=\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

Поскольку старший коэффициент в левой части данного неравенства положителен, по свойствам квадратичной функции множеством решений неравенства будет промежуток $(x_1;x_2)$, т. е. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$.

б) Для ответа на второй вопрос задачи нужно определить, между какими двумя последовательными целыми числами заключено каждое из чисел $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $x_2 = \sqrt{3}+\sqrt{5}$. Ясно, что $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{4}}{2}$, откуда $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. Также очевидно, что $1 < \sqrt{3} < 2$, а $2 < \sqrt{5} < 3$. Поэтому $1+2 < \sqrt{3}+\sqrt{5} < 2+3$, откуда $3 < \sqrt{3}+\sqrt{5} < 5$. Остаётся сравнить числа $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ и 4. Допустим, что $\sqrt{3}+\sqrt{5} \geqslant 4$. Следовательно, $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2 \geqslant 16$, откуда $3+2\sqrt{15}+5 \geqslant 16$ и, далее, $2\sqrt{15} \geqslant 8$, т. е. $\sqrt{15} \geqslant 4$, или $\sqrt{15} \geqslant \sqrt{16}$. Мы пришли к противоречию, поэтому допущение неверно, и $\sqrt{3}+\sqrt{5} < 4$. Таким образом, $3 < \sqrt{3}+\sqrt{5} < 4$. Значит, целыми решениями данного неравенства являются числа 1; 2; 3.



Ответ: а) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$; б) 1; 2; 3.

Замечание. Пример 10 показывает, что задача на обычное квадратное неравенство в некоторых случаях может оказаться достаточно сложной. Обратим внимание на сравнение чисел $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ и 4, а также оформление такого сравнения в тексте решения. С необходимостью сравнения иррациональных чисел приходится сталкиваться при решении самых разных неравенств (например, задачи 15 ЕГЭ профильного уровня по математике) и уравнений (например, задачи 13 ЕГЭ профильного уровня по математике). Оформить такое сравнение на чистовике можно либо от противного (как это было сделано при разборе примера), либо записав в чистовике последовательность действий, обратную проделанной в черновике: ведь доказывать неравенство можно только опираясь на очевидное верное неравенство. В последнем случае в чистовике следует привести такое доказательство:

$$15 < 16 \Rightarrow \sqrt{15} < 4 \Rightarrow 2\sqrt{15} < 8 \Rightarrow 3+2\sqrt{15}+5 < 16 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2 < 16 \Rightarrow \sqrt{3}+\sqrt{5} < 4.$$

Пример 11. а) Решите неравенство

$$x^2 > 1{,}25x + 1{,}5. \qquad (1)$$

б) Решите неравенство

$$x + 1 \leqslant \frac{4}{9}x^2. \qquad (2)$$

в) Найдите все решения неравенства (2), не являющиеся решениями неравенства (1).

Р е ш е н и е. а) Решим неравенство (1). Чтобы избавиться от дробей, умножим обе части этого неравенства на число 4. Получим $4x^2 > 5x + 6$. Приведём неравенство к базовому виду: $4x^2 - 5x - 6 > 0$. Найдём корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства, воспользовавшись формулами Виета. Для этого сначала найдём два числа, произведение которых равно $4 \cdot (-6) = -24$, а сумма равна 5. Поскольку произведение двух этих чисел отрицательно, одно из них является положительным, другое — отрицательным. Сумма этих чисел положительна, поэтому меньший по модулю делитель числа -24 будем брать со знаком «минус», а больший — со знаком «плюс»: -1 и 24, -2 и 12, -3 и 8. На третьем «шаге» получаем искомые числа, сумма которых равна 5: это -3 и 8. Разделив каждое из этих чисел на 4, найдём корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства: $\frac{-3}{4} = -0{,}75$ и $\frac{8}{4} = 2$. В силу положительности старшего коэффициента этого трёхчлена множество решений неравенства: $(-\infty; -0{,}75) \cup (2; +\infty)$.

б) Решим неравенство (2). Чтобы избавиться от дробей, умножим обе части этого неравенства на число 9. Получим $9x + 9 \leqslant 4x^2$, откуда $-4x^2 + 9x + 9 \leqslant 0$. Приведём неравенство к базовому виду, умножив обе его части на -1 и поменяв знак неравенства на противоположный: $4x^2 - 9x - 9 \geqslant 0$. Найдём корни квадратного трёхчлена в левой части, вновь воспользовавшись формулами Виета. Для этого сначала найдём два числа, произведение которых равно $4 \cdot (-9) = -36$, а сумма равна 9. Поскольку произведение двух этих чисел отрицательно, одно из них является положительным, другое — отрицательным. Сумма этих чисел положительна, поэтому меньший по модулю делитель числа -36 будем брать со знаком «минус», а больший — со знаком «плюс»: -1 и 36, -2 и 18, -3 и 12. На третьем «шаге» получаем искомые числа, сумма которых равна 9: это -3 и 12. Разделив каждое из этих чисел на 4, найдём корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства: $\frac{-3}{4} = -0{,}75$ и $\frac{12}{4} = 3$. В силу положительности старшего коэффициента этого трёхчлена множество решений неравенства: $(-\infty; -0{,}75] \cup [3; +\infty)$.

в) Найдём все решения неравенства (2), не являющиеся решениями неравенства (1). Для этого нужно найти все числа из множества $(-\infty; -0{,}75] \cup [3; +\infty)$, не принадлежащие множеству $(-\infty; -0{,}75) \cup (2; +\infty)$. В данном случае это сделать совсем просто: единственным таким числом является $-0{,}75$.

Ответ: а) $(-\infty; -0{,}75) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; -0{,}75] \cup [3; +\infty)$; в) $-0{,}75$.

Пример 11 моделирует — на довольно простом уровне — достаточно типичную ситуацию, возникающую при решении некоторых задач ЕГЭ: условие задачи требует ответа на три вопроса, за правильный ответ на каждый из которых начисляется один первичный балл.

Упражнения к § 2.1

Решите неравенство.

1. а) $5x-7\geqslant 7x-5$; **б)** $3x-8\geqslant 8x-3$.

2. а) $3(2x-3)-2(3x-2)\leqslant 1-4x$; **б)** $4(3x-4)-3(4x-3)\leqslant 1-5x$.

3. а) $(2-x)\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)>0$; **б)** $(1-x)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)>0$.

4. а) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{10}\right)x<\dfrac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}$; **б)** $\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)x<\dfrac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.

5. а) $(2x-3)(5x+2)\geqslant(2x-3)(5x-2)$;

б) $(3x-1)(4x+3)\leqslant(3x-1)(4x-3)$.

6. а) Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$5x-6<2(3-x)-3x.$$

б) Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$3x+4>-5(3+x)-x.$$

Решите неравенство.

7. а) $\dfrac{4+5x}{2}>3x+1$; **б)** $\dfrac{3+7x}{4}>2x+1$.

8. а) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{3-x}{5}\geqslant\dfrac{x+12}{15}-\dfrac{9}{5}$; **б)** $\dfrac{x}{5}+\dfrac{x+2}{3}\geqslant\dfrac{4x+5}{15}-\dfrac{2}{3}$.

9. а) $(x+7)^2\leqslant(x-3)^2$; **б)** $(x-6)^2\leqslant(x-4)^2$.

10. а) Найдите все значения n, при каждом из которых сумма чисел $\dfrac{4+10n}{9}$ и $\dfrac{4(3-n)}{3}$ положительна.

б) Найдите все значения n, при каждом из которых сумма чисел $\dfrac{10+17n}{16}$ и $\dfrac{5(2-n)}{4}$ отрицательна.

Решите систему неравенств.

11. а) $\begin{cases}4x+9\leqslant 9x+4,\\ 1{,}7x\leqslant 51;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}5x+8\leqslant 8x+5,\\ 2{,}3x\leqslant 46.\end{cases}$

12. а) $\begin{cases}5(4x+3)-4(5x+3)>3x,\\ \frac{2}{3}x<\frac{3}{2}x+5;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}3(2x+5)-2(3x+5)>5x,\\ \frac{4}{5}x<\frac{5}{4}x+9.\end{cases}$

13. а) $\begin{cases} -0{,}7x \leqslant 2{,}1, \\ 2{,}1x < 0{,}7; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} -0{,}6x \leqslant 2{,}4, \\ 2{,}4x < 0{,}6. \end{cases}$

14. а) $\begin{cases} \dfrac{2x+5}{5} > \dfrac{5x+2}{2}, \\ \dfrac{x+2}{5} < \dfrac{x+5}{2}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{3x+2}{2} < \dfrac{2x+3}{3}, \\ \dfrac{x+2}{3} < \dfrac{x+3}{2}. \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} (x+6)^2 < (x+4)^2, \\ 6x+13 > 5x-7; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} (x+5)^2 < (x+3)^2, \\ 5x+12 > 4x-9. \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} \frac{5}{3}x < 0{,}6x+16, \\ 0{,}7x > -0{,}56; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \frac{10}{3}x < 0{,}3x+91, \\ 0{,}9x > -0{,}63. \end{cases}$

Решите двойное неравенство.

17. а) $2x-3 \leqslant 5x-2 \leqslant 3-2x$; **б)** $3x-4 \leqslant 7x-2 \leqslant 4-3x$.

18. а) $6x-5 \leqslant 6-5x \leqslant 5-6x$; **б)** $5x-4 \leqslant 5-4x \leqslant 4-5x$.

19. а) $1{,}7x-2{,}6 < 0{,}7x-0{,}6 \leqslant 2{,}7x-1{,}6$;

б) $2{,}3x-3{,}4 < 1{,}3x-1{,}4 \leqslant 3{,}3x-2{,}4$.

20. а) $2 < 3-\frac{2}{3}x < 4$; **б)** $3 < 4-\frac{3}{4}x < 5$.

Решите систему неравенств.

21. а) $\begin{cases} (3-2x)\big(\sqrt{5}-3\big) > 0, \\ 0{,}3x < 3; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} (4-3x)\big(\sqrt{3}-2\big) > 0, \\ 0{,}4x < 4. \end{cases}$

22. а) $\begin{cases} \big(3-\sqrt{11}\big)x < \dfrac{4}{3+\sqrt{11}}, \\ x^2+25 > (x+5)^2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \big(2-\sqrt{7}\big)x < \dfrac{6}{2+\sqrt{7}}, \\ x^2+36 > (x+6)^2. \end{cases}$

Решите двойное неравенство.

23. а) $9x^2-2 < (3x+2)^2 \leqslant 9x^2+2$; **б)** $4x^2-3 < (2x+3)^2 \leqslant 4x^2+3$.

24. а) $(4x+3)^2 < 16x^2 \leqslant (4x-3)^2$; **б)** $(2x+7)^2 < 4x^2 \leqslant (2x-7)^2$.

Решите неравенство.

25. а) $10x^2+7x \leqslant 0$; **б)** $3x^2-8x \leqslant 0$.

26. а) $36x^2-25 \geqslant 0$; **б)** $49x^2-16 \geqslant 0$.

27. а) $9 \geqslant \dfrac{x^2}{25}$; **б)** $4 \geqslant \dfrac{x^2}{64}$.

28. а) $\dfrac{3x^2}{4} \geqslant \dfrac{4x}{5}$; **б)** $\dfrac{7x^2}{4} \geqslant \dfrac{4x}{5}$.

29. а) $\dfrac{x^2}{\sqrt{2}} < \sqrt{162}$; **б)** $\dfrac{x^2}{\sqrt{2}} < \sqrt{98}$.

30. а) $x^2-19x+18\geqslant 0$; **б)** $x^2-17x+16\geqslant 0$.

31. а) $2x^2-9x-5<0$; **б)** $5x^2+9x-2<0$.

32. а) $3x^2-x-24>0$; **б)** $6x^2+x-15>0$.

33. а) $(3x-7)^2\geqslant(7x-3)^2$; **б)** $(5x-4)^2\geqslant(4x-5)^2$.

34. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}7(3x+2)-3(7x+2)>2x,\\(x-4)(x+8)<0;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}7(5x+4)-5(7x+4)>4x,\\(x-2)(x+4)<0.\end{cases}$

Решите двойное неравенство.

35. а) $3x^2-4x+3\leqslant 3x^2-5x+5\leqslant 2x^2-3x+4$;

б) $5x^2-6x-1\leqslant 5x^2-7x+2\leqslant 4x^2-3x-2$.

36. а) $-9<7-x^2<8$; **б)** $-8<17-x^2<18$.

37. а) **а)** $3x^2-2x-6\leqslant 2x^2-2x+3\leqslant 3x^2-2x-1$;

б) $4x^2-5x-14\leqslant 3x^2-5x+2\leqslant 4x^2-5x-7$.

Решите систему неравенств.

38. а) $\begin{cases}x^2+9x+8\leqslant 0,\\-0{,}3x\geqslant 2{,}4;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}x^2+7x+6\leqslant 0,\\-0{,}7x\geqslant 4{,}2.\end{cases}$

39. а) $\begin{cases}3x^2-14x+8<0,\\5x+2>2x+5;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}4x^2-11x+6<0,\\4x+3>3x+4.\end{cases}$

40. а) $\begin{cases}(x+2)^2+(x-6)^2\geqslant 40,\\x^2\leqslant 4x;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}(x+3)^2+(x-5)^2\geqslant 34,\\x^2\leqslant 2x.\end{cases}$

Диагностическая работа 1

Вариант 1

1. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{5}{7}x>5\frac{5}{7}$.

Решите неравенство.

2. $2x+3(x-3)\leqslant 1+2(1{,}5x-2)$.

3. $3\left(\sqrt{2}-x\right)+\sqrt{2}(3-x)+3\left(3-\sqrt{2}\right)>0$.

4. $9x\geqslant 5x^2$.

5. $25<49x^2$.

6. $5x^2-101x+20<0$.

7. Решите двойное неравенство $2x+3\leqslant 5x^2-9x+5\leqslant 7x+2$.

Решите систему неравенств.

8. $\begin{cases} 6(5x+4)-4(5x+6)\leqslant 10x+11, \\ \dfrac{x+2}{5}+\dfrac{x+5}{2}\geqslant\dfrac{x+3}{4}+\dfrac{x+4}{3}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x>x^2, \\ 25x^2<16. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x^2-5x+2\leqslant 0, \\ 2x^2-7x+6\geqslant 0. \end{cases}$

11. а) Решите неравенство $2x^2-\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{7}\right)x+2+\sqrt{14}<0$.

б) Найдите все целые решения неравенства.

12. а) Решите неравенство

$$x^2+2{,}2x < 2{,}4. \tag{1}$$

б) Решите неравенство

$$1{,}6 \geqslant x^2+1{,}2x. \tag{2}$$

в) Найдите все решения неравенства (2), не являющиеся решениями неравенства (1).

Вариант 2

1. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{4}{9}x<4\frac{4}{9}$.

Решите неравенство.

2. $x+4(0{,}6x-4)\leqslant 1+3(0{,}8x-3)$.

3. $4\left(\sqrt{3}-x\right)+\sqrt{3}(4-x)+4\left(4-\sqrt{3}\right)<0$.

4. $11x\geqslant 4x^2$.

5. $49<36x^2$.

6. $2x^2-101x+50<0$.

7. Решите двойное неравенство $3x+2\leqslant 5x^2-9x+6\leqslant 13x-2$.

Решите систему неравенств.

8. $\begin{cases} 5(4x+3)-3(4x+5)\leqslant 8x+9, \\ \dfrac{x+2}{4}+\dfrac{x+4}{2}\geqslant\dfrac{x+3}{5}+\dfrac{x+5}{3}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x>x^2, \\ 16x^2<9. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x^2-5x+1\leqslant 0, \\ 4x^2-7x+3\geqslant 0. \end{cases}$

11. а) Решите неравенство $2x^2 - \left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}\right)x + 5 + \sqrt{35} < 0$.

б) Найдите все целые решения неравенства.

12. а) Решите неравенство

$$x^2 + 0{,}5x \leqslant 10{,}5. \tag{1}$$

б) Решите неравенство

$$3{,}5 > x^2 + 2{,}5x. \tag{2}$$

в) Найдите все решения неравенства (1), не являющиеся решениями неравенства (2).

§ 2.2. Более сложные целые неравенства

Перейдём теперь к более сложным целым неравенствам, проиллюстрировав методы их решения примерами. Вычисление корней квадратных трёхчленов в этом параграфе и далее опускается для экономии места.

Метод интервалов

Метод интервалов (см. § 1.2) является одним из основных методов решения целых неравенств. Обычно он применяется после приведения неравенства к виду

$$p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \ldots \cdot p_n(x) \vee 0,$$

который будем называть стандартным. Многочлены $p_1(x)$, $p_2(x)$, … …, $p_n(x)$, как правило, являются многочленами первой или второй степени. Последние в случае положительности дискриминанта следует представить в виде произведения линейных множителей по формуле

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

разложения квадратного трёхчлена на линейные множители; в случае неположительности дискриминанта квадратный трёхчлен принимает только неотрицательные или только неположительные значения, что и нужно учитывать при решении неравенства. Перед применением метода интервалов можно обе части неравенства разделить на полученное после разложения на множители произведение старших коэффициентов квадратных трёхчленов.

Пример 1. Решите неравенство

$$(3x^2 - 8x + 4)(5x^2 - 8x - 4) \leqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Корнями квадратного трёхчлена $3x^2-8x+4$ являются числа $\frac{2}{3}$ и 2. По формуле разложения квадратного трёхчлена на линейные множители получим, что

$$3x^2-8x+4=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-2).$$

Корнями квадратного трёхчлена $5x^2-8x-4$ являются числа $-\frac{2}{5}$ и 2. По формуле разложения квадратного трёхчлена на линейные множители получим, что

$$5x^2-8x-4=5\left(x+\frac{2}{5}\right)(x-2).$$

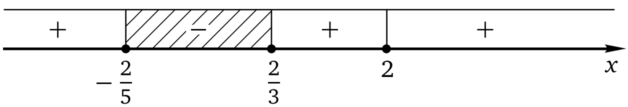
Следовательно, данное неравенство приводится к виду

$$3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-2)\cdot 5\left(x+\frac{2}{5}\right)(x-2)\leqslant 0,$$

откуда

$$\left(x+\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-2)^2\leqslant 0.$$

Применим метод интервалов:



Ответ: $\left[-\frac{2}{5};\frac{2}{3}\right]\cup\{2\}$.

Пример 2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}(2x^2+9x+4)(4x^2+9x+2)(9x^2+2x+4)\leqslant 0,\\(1-16x^2)(5x^2+2x)(4x^2+20x+25)\geqslant 0.\end{cases}$$

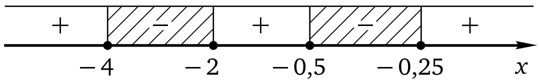
Р е ш е н и е. Решим первое неравенство данной системы. Корнями квадратного трёхчлена $2x^2+9x+4$ являются числа -4 и $-0{,}5$. Корнями квадратного трёхчлена $4x^2+9x+2$ являются числа -2 и $-0{,}25$. Дискриминант квадратного трёхчлена $9x^2+2x+4$ отрицателен, а старший коэффициент положителен. Следовательно, при любом действительном значении переменной этот трёхчлен принимает только положительные значения. Поэтому обе части неравенства можно разделить на $9x^2+2x+4$. Таким образом, первое неравенство данной системы приводится к виду

$$2(x+4)(x+0{,}5)\cdot 4(x+2)(x+0{,}25)\leqslant 0,$$

откуда

$$(x+4)(x+0{,}5)(x+2)(x+0{,}25) \leqslant 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений неравенства: $[-4; -2] \cup [-0{,}5; -0{,}25]$.

Решим второе неравенство данной системы. Разложим на множители каждый из многочленов в скобках:

$$1-16x^2 = -16(x+0{,}25)(x-0{,}25), \quad 5x^2+2x = 5x(x+0{,}4),$$

а квадратный трёхчлен $4x^2+20x+25$ является полным квадратом (те, кто «не видит» этого, могут вычислить дискриминант — он равен нулю):

$$4x^2+20x+25 = 4(x+2{,}5)^2.$$

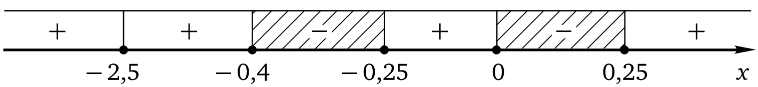
Следовательно, второе неравенство данной системы примет вид

$$-16(x+0{,}25)(x-0{,}25)\cdot 5x(x+0{,}4)\cdot 4(x+2{,}5)^2 \geqslant 0.$$

Разделим обе части неравенства на $-16\cdot 5\cdot 4$, изменив знак неравенства на противоположный:

$$(x+0{,}25)(x-0{,}25)x(x+0{,}4)(x+2{,}5)^2 \leqslant 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений неравенства: $\{-2{,}5\} \cup [-0{,}4; -0{,}25] \cup [0; 0{,}25]$.

Для того чтобы решить данную систему, найдём пересечение полученных множеств: $\{-2{,}5\} \cup [-0{,}4; -0{,}25]$.

Ответ: $\{-2{,}5\} \cup [-0{,}4; -0{,}25]$.

Замечание. Умножение или деление обеих частей неравенства на выражение, содержащее переменную, возможно в одном-единственном случае: если при любом значении переменной это выражение принимает только положительные значения (это и было сделано при решении примера 2) или только отрицательные значения (в этом случае знак неравенства следует изменить на противоположный). Во всех остальных случаях такое умножение или деление является грубой ошибкой, поскольку проводится с сохранением знака неравенства, что для значений переменной, при которых данное выражение отрицательно, неверно.

Равносильные преобразования

Разумеется, далеко не каждое целое неравенство сразу даётся в стандартном виде. Куда чаще встречаются задачи, в которых для приведения неравенства к стандартному виду надо проделать определённые преобразования. Прежде всего это раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых, вынесение общего множителя, разложение на множители (в том числе и с помощью формул сокращённого умножения). Поскольку областью допустимых значений любого целого неравенства является вся числовая прямая, указанные преобразования будут равносильными (см. § 1.1).

Пример 3. Решите неравенство

$$(16x^2+14x+3)(2x-1) \geqslant (8x^2-2x-1)(2x+1).$$

Р е ш е н и е. При раскрытии скобок получим в левой и правой частях неравенства многочлены третьей степени с соответственно различными старшими коэффициентами и свободными членами, т. е. придём в итоге к неравенству третьей степени. Попробуем привести неравенство к стандартному виду иным способом. Корнями квадратного трёхчлена $16x^2+14x+3$ являются числа $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{3}{8}$. Разложим левую часть неравенства на множители:

$$16\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{8}\right)(2x-1) \geqslant (8x^2-2x-1)(2x+1).$$

Для упрощения дальнейших преобразований избавимся от дробей в скобках:

$$(2x+1)(8x+3)(2x-1) \geqslant (8x^2-2x-1)(2x+1).$$

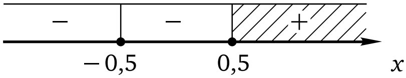
Перемножим выражения во вторых и третьих скобках в левой части неравенства, перенесём выражение из правой части неравенства в левую и вынесем общий множитель $(2x+1)$. Получим

$$(2x+1)(16x^2-2x-3-8x^2+2x+1) \geqslant 0,$$

откуда $(2x+1)(8x^2-2) \geqslant 0$. Вынесем за скобки коэффициенты при переменной:

$$2(x+0{,}5)\cdot 8(x^2-0{,}25) \geqslant 0.$$

Разделив обе части неравенства на 16 и применив формулу разности квадратов, придём к неравенству $(x-0{,}5)(x+0{,}5)^2 \geqslant 0$. Применим метод интервалов:



Ответ: $\{-0{,}5\} \cup [0{,}5; +\infty)$.

Одним из наиболее часто встречающихся преобразований алгебраических выражений является разложение на множители. Если в предыдущем примере для этого было достаточно проделать только техническую работу, то для решения следующего уже надо проявить определённую наблюдательность.

Пример 4. Решите неравенство

$$x^4+10x^3+25x^2-36>0.$$

Р е ш е н и е. Заметим, что сумма первых трёх слагаемых в левой части неравенства является полным квадратом:

$$x^4+10x^3+25x^2=(x^2+5x)^2.$$

Теперь неравенство можно переписать в виде

$$(x^2+5x)^2-6^2>0$$

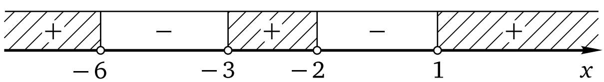
и применить формулу разности квадратов:

$$(x^2+5x-6)(x^2+5x+6)>0.$$

Корнями квадратного трёхчлена в первых скобках являются числа -6 и 1; корнями квадратного трёхчлена во вторых скобках являются числа -3 и -2. Теперь левую часть последнего неравенства можно разложить на множители:

$$(x+6)(x-1)(x+3)(x+2)<0.$$

Осталось применить метод интервалов:



Множество решений неравенства: $(-\infty;\,-6)\cup(-3;\,-2)\cup(1;\,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\,-6)\cup(-3;\,-2)\cup(1;\,+\infty)$.

Пример 5. Решите неравенство

$$(x^2+1{,}3x+0{,}9)^2+(x^2+3{,}3x-0{,}7)^2\leqslant$$
$$\leqslant(x^2+1{,}5x+0{,}74)^2+(x^2+3{,}1x-0{,}54)^2.$$

Р е ш е н и е. Уныние, которое может вызвать подобный пример, — чувство не слишком продуктивное, а на экзамене так и вообще недопустимое. Понятно, что раскрытие скобок в данном случае будет поступком, конечно, героическим, но малоперспективным из-за очевидно больших затрат времени и вероятных ошибок. Ясно, что решение примера предполагает иные действия, прежде всего анализ условия.

Поскольку неравенство является целым, каким-то образом придётся привести его к стандартному виду. Инструментов для этого не так много, и все они указаны выше. Прежде всего это разложение на множители. Наличие квадратов наводит на мысль о возможном применении формулы разности квадратов. Остаётся заметить, что разность первого квадратного трёхчлена в правой части неравенства и первого квадратного трёхчлена в левой части неравенства равна разности второго квадратного трёхчлена в левой части неравенства и второго квадратного трёхчлена в правой части неравенства. Применив формулу разности квадратов, получим

$$(x^2+1{,}5x+0{,}74)^2-(x^2+1{,}3x+0{,}9)^2 = (0{,}2x-0{,}16)(2x^2+2{,}8x+1{,}64),$$

$$(x^2+3{,}3x-0{,}7)^2-(x^2+3{,}1x-0{,}54)^2 = (0{,}2x-0{,}16)(2x^2+6{,}4x-1{,}24).$$

Теперь данное неравенство можно переписать так:

$$(0{,}2x-0{,}16)(2x^2+6{,}4x-1{,}24) \leqslant (0{,}2x-0{,}16)(2x^2+2{,}8x+1{,}64).$$

Перенесём выражение из правой части в левую, вынесем общий множитель и приведём подобные слагаемые:

$$(0{,}2x-0{,}16)(3{,}6x-2{,}88) \leqslant 0.$$

Вынесем за скобки коэффициенты при переменной:

$$0{,}2(x-0{,}8)\cdot 3{,}6(x-0{,}8) \leqslant 0,$$

откуда $(x-0{,}8)^2 \leqslant 0$. Единственным решением полученного неравенства является $x=0{,}8$.

Ответ: $\{0{,}8\}$.

Метод введения новой переменной

Напомним, что основной идеей решения неравенств с помощью метода введения новой переменной (см. § 1.4) является замена повторяющегося алгебраического выражения некоторой (обычно латинской) буквой, играющей роль новой переменной. Такая замена позволяет свести решение данного неравенства к последовательному решению нескольких неравенств меньшей степени (обычно квадратных) либо разложить на множители левую часть и, сделав обратную замену, воспользоваться методом интервалов (этот способ часто оказывается более коротким). В некоторых случаях замена является только вспомогательным средством, позволяющим упростить алгебраические преобразования с целью получения менее сложного по сравнению с данным неравенства.

Пример 6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 25x^4-41x^2+16 \leqslant 0, \\ 7(2x^2-x-1)+1 \geqslant (2x^2-x)^2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Решим первое неравенство данной системы. Введём новую переменную $t=x^2$. Неравенство примет вид

$$25t^2-41t+16 \leqslant 0.$$

Корнями квадратного трёхчлена в левой части полученного неравенства являются числа 1 и $\frac{16}{25}$. Поэтому неравенство можно переписать в виде

$$25\left(t-\frac{16}{25}\right)(t-1) \leqslant 0.$$

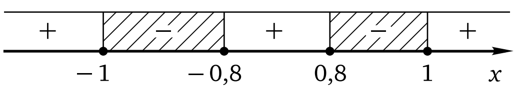
Разделим обе части последнего неравенства на 25 и сделаем обратную замену:

$$\left(x^2-\frac{16}{25}\right)(x^2-1) \leqslant 0,$$

откуда

$$(x-0{,}8)(x+0{,}8)(x-1)(x+1) \leqslant 0.$$

Применим метод интервалов:



Множеством решений первого неравенства данной системы является объединение отрезков $[-1;\,-0{,}8]\cup[0{,}8;\,1]$.

Решим второе неравенство данной системы. Пусть

$$z=2x^2-x.$$

Неравенство примет вид

$$7(z-1)+1 \geqslant z^2.$$

Приведём неравенство к базовому виду:

$$z^2-7z+6 \leqslant 0.$$

Корнями квадратного трёхчлена в левой части полученного неравенства являются числа 1 и 6. Разложив левую часть последнего неравенства на множители, получим

$$(z-1)(z-6) \leqslant 0.$$

Сделаем обратную замену:

$$(2x^2-x-1)(2x^2-x-6)\leqslant 0.$$

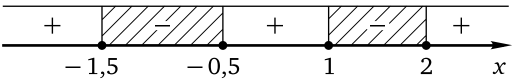
Корнями квадратного трёхчлена в первых скобках в левой части неравенства являются числа $-0{,}5$ и 1, корнями квадратного трёхчлена во вторых скобках являются числа $-1{,}5$ и 2. Разложив на множители каждый из этих трёхчленов, придём к неравенству

$$2(x+0{,}5)(x-1)\cdot 2(x+1{,}5)(x-2)\leqslant 0,$$

откуда

$$(x+0{,}5)(x-1)(x+1{,}5)(x-2)\leqslant 0.$$

Вновь применим метод интервалов:



Множеством решений второго неравенства данной системы является объединение отрезков $[-1{,}5;\,-0{,}5]\cup[1;\,2]$.

Множество решений данной системы найдём как пересечение числовых множеств $[-1;\,-0{,}8]\cup[0{,}8;\,1]$ и $[-1{,}5;\,-0{,}5]\cup[1;\,2]$. В данном случае это легко сделать и без чертежа, ведь отрезок $[-1;\,-0{,}8]$ целиком содержится в отрезке $[-1{,}5;\,-0{,}5]$, а не пересекающиеся с ними отрезки $[0{,}8;\,1]$ и $[1;\,2]$ имеют единственную общую точку 1. Следовательно, множество решений данной системы: $[-1;\,-0{,}8]\cup\{1\}$.

Ответ: $[-1;\,-0{,}8]\cup\{1\}$.

Замечание. При решении каждого из неравенств данной системы новая переменная использовалась только для нахождения корней квадратного трёхчлена в левой части полученного после её введения базового квадратного неравенства и последующего разложения на множители с целью применения метода интервалов. Другой путь состоит в формальном решении полученного после замены неравенства с целью сведения данного неравенства к нескольким более простым. Так, решением неравенства $25t^2-41t+16\leqslant 0$ является отрезок $\left[\dfrac{16}{25};\,1\right]$. То, что $t\in\left[\dfrac{16}{25};\,1\right]$, можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} t\geqslant \dfrac{16}{25},\\ t\leqslant 1.\end{cases}$$

Далее, сделав обратную замену, получим

$$\begin{cases} x^2\geqslant \dfrac{16}{25},\\ x^2\leqslant 1.\end{cases}$$

Останется решить каждое из квадратных неравенств системы. Аналогично решением неравенства $z^2 - 7z + 6 \leqslant 0$ является отрезок $[1; 6]$. После обратной замены получим

$$\begin{cases} 2x^2 - x \geqslant 1, \\ 2x^2 - x \leqslant 6. \end{cases}$$

Опять останется решить каждое из квадратных неравенств системы. Какой способ использовать — разложение на множители с последующим применением метода интервалов или последовательное решение нескольких квадратных неравенств, — совершенно неважно, здесь можно руководствоваться своими предпочтениями.

В следующем примере вводятся уже две новые переменные, — правда, только для того, чтобы упростить преобразования данного неравенства. Такая ситуация, как уже отмечалось, время от времени встречается в самых разных задачах.

Пример 7. Решите неравенство

$$(6x^5 + 5x^3 - 4x - 3)(6x^5 + 4x^3 + 5x^2 + x - 3) \leqslant$$
$$\leqslant (6x^5 + 5x^3 - 5x - 3)(6x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 3).$$

Р е ш е н и е. Обозначим выражение в первых скобках левой части буквой a, а во вторых скобках — буквой b. Тогда неравенство можно записать в виде

$$ab \leqslant (a - x)(b + x),$$

откуда

$$ab \leqslant ab + (a - b)x - x^2.$$

После упрощений и вынесения общего множителя получим

$$x(a - b - x) \geqslant 0.$$

Поскольку

$$a - b - x = x^3 - 5x^2 - 6x,$$

приходим к неравенству

$$x(x^3 - 5x^2 - 6x) \geqslant 0.$$

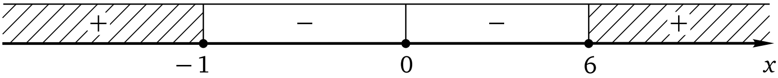
Вынесем общий множитель за скобки:

$$x^2(x^2 - 5x - 6) \geqslant 0.$$

Корнями квадратного трёхчлена в левой части последнего неравенства являются числа -1 и 6. Разложив левую часть этого неравенства на множители, получим

$$x^2(x + 1)(x - 6) \geqslant 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений неравенства: $(-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [6; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [6; +\infty)$.

Метод знакотождественных множителей

Метод знакотождественных множителей (см. § 1.6) для целых неравенств заключается в замене одного или нескольких множителей (целых алгебраических выражений) в левой части неравенства вида

$$a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot \ldots \cdot a_n(x) \vee 0$$

знакотождественным выражением. Для рассматриваемых неравенств таких пар знакотождественных выражений всего две:

1) $a(x) = u^{2n+1}(x) - v^{2n+1}(x)$ и $b(x) = u(x) - v(x)$ (разность одинаковых нечётных степеней двух выражений можно заменять разностью этих выражений);

2) $a(x) = u^{2n}(x) - v^{2n}(x)$ и $b(x) = u^2(x) - v^2(x)$ (разность одинаковых чётных степеней двух выражений можно заменять разностью квадратов этих выражений).

То, что указанные пары знакотождественны, следует из монотонного возрастания степенной функции: на всей числовой оси для нечётных степеней, на множестве неотрицательных чисел — для чётных степеней. В силу монотонного возрастания функции $y = t^{2n+1}$ (здесь $n \in \mathbb{N}$) разности $t_1^{2n+1} - t_2^{2n+1}$ и $t_1 - t_2$ являются числами одного знака при любом значении переменной; аналогично в силу неотрицательности t_1^2 и t_2^2 и возрастания функции $y = t^n$ при $t \geqslant 0$ (для любого $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$) разности $t_1^{2n} - t_2^{2n}$ и $t_1^2 - t_2^2$ являются числами одного знака при любом значении переменной.

Пример 8. Решите неравенство $(3x+2)^6 \leqslant (2x+3)^3$.

Р е ш е н и е. Перенесём выражение из правой части неравенства в левую и запишем полученную разность в виде разности кубов:

$$((3x+2)^2)^3 - (2x+3)^3 \leqslant 0.$$

Применив метод знакотождественных множителей, придём к неравенству

$$(3x+2)^2 - (2x+3) \leqslant 0,$$

откуда после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим квадратное неравенство $9x^2 + 10x + 1 \leqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части неравенства являются числа -1 и $-\frac{1}{9}$. В силу положительности старшего коэффициента этого трёхчлена множество решений неравенства имеет вид $\left[-1; -\frac{1}{9}\right]$.

Ответ: $\left[-1; -\frac{1}{9}\right]$.

Пример 9. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}(x^{14}-(x+2)^7)(x^{10}+(x-6)^5) \leqslant 0,\\ (x^2-x-5)^8 \geqslant (x^2+x-3)^8.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Решим первое неравенство данной системы. Выражение в первых скобках представляет собой разность седьмых степеней: $(x^2)^7-(x+2)^7$. Выражение во вторых скобках можно представить в виде разности пятых степеней:

$$x^{10}+(x-6)^5=(x^2)^5-(-x+6)^5.$$

Поскольку разность одинаковых нечётных степеней двух многочленов и разность этих многочленов являются знакотождественными, первое неравенство системы можно переписать в виде

$$(x^2-(x+2))(x^2-(-x+6)) \leqslant 0,$$

откуда

$$(x^2-x-2)(x^2+x-6) \leqslant 0.$$

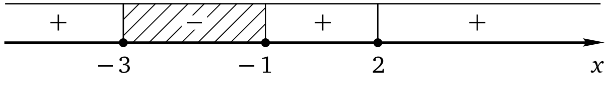
Корнями квадратного трёхчлена в первых скобках в левой части полученного неравенства являются числа -1 и 2. Корнями квадратного трёхчлена во вторых скобках являются числа -3 и 2. Разложив на множители каждый из этих трёхчленов, придём к неравенству

$$(x+1)(x-2)(x+3)(x-2) \leqslant 0,$$

откуда

$$(x+3)(x+1)(x-2)^2 \leqslant 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений первого неравенства системы: $[-3; -1] \cup \{2\}$.

Решим второе неравенство данной системы, записав его в виде

$$(x^2-x-5)^8-(x^2+x-3)^8 \geqslant 0.$$

Используем знакотождественность разности одинаковых чётных степеней двух многочленов и разности квадратов этих многочленов. Получим неравенство

$$(x^2 - x - 5)^2 - (x^2 + x - 3)^2 \geqslant 0.$$

Применим формулу разности квадратов:

$$(x^2 - x - 5 - x^2 - x + 3)(x^2 - x - 5 + x^2 + x - 3) \geqslant 0,$$

откуда

$$(-2x - 2)(2x^2 - 8) \geqslant 0.$$

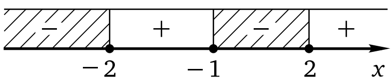
Вынесем общие множители за скобки:

$$-2(x + 1) \cdot 2(x^2 - 4) \geqslant 0.$$

Разделим обе части неравенства на число -4, изменив знак неравенства на противоположный, после чего разложим на множители выражение во вторых скобках:

$$(x + 1)(x - 2)(x + 2) \leqslant 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений второго неравенства данной системы: $(-\infty; -2] \cup [-1; 2]$.

Множество решений данной системы: $[-3; -2] \cup \{-1; 2\}$.

Ответ: $[-3; -2] \cup \{-1; 2\}$.

Применение свойств функций

Наряду с неравенствами, решение которых связано с теми или иными алгебраическими преобразованиями, введением новой переменной, применением метода интервалов или метода знакотождественных множителей, встречаются неравенства, решение которых с помощью перечисленных стандартных методов невозможно. При решении этих неравенств существенным образом используются такие свойства функций, как ограниченность, монотонность, периодичность (см. § 1.5). Поскольку — за некоторыми исключениями — решение этих задач связано (пусть и в небольшой степени) с выдвижением и проверкой гипотез, логическим перебором и т. п., их обычно относят к нестандартным неравенствам.

Пример 10. Решите неравенство

$$(x^2+2x+3)(x^2+2x+4)(x^2+2x+5)(x^2+2x+6) \leqslant 120.$$

Р е ш е н и е. Ясно, что можно ввести новую переменную, например, обозначив какой-то буквой выражение в первых скобках в левой части неравенства. Но тогда получится неравенство четвёртой степени. Попробуем иной способ, попытавшись использовать ограниченность квадратичной функции. Для этого выделим полные квадраты:

$$((x+1)^2+2)((x+1)^2+3)((x+1)^2+4)((x+1)^2+5) \leqslant 120.$$

Поскольку $(x+1)^2 \geqslant 0$, получим, что при любом значении переменной значение выражения $(x+1)^2+2$ не меньше 2, значение выражения $(x+1)^2+3$ не меньше 3, значение выражения $(x+1)^2+4$ не меньше 4, значение выражения $(x+1)^2+5$ не меньше 5. Следовательно, произведение в левой части неравенства не меньше $2\cdot3\cdot4\cdot5=120$. Поэтому неравенство будет выполнено, только если его левая часть равна 120, что возможно лишь в случае $(x+1)^2=0$, откуда $x=-1$.

Ответ: $\{-1\}$.

Пример 11. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}(x^7+2x^3+9x+12)(x^3+3x-14) \leqslant 0,\\ x^6+2x^2 \geqslant 3.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Решим первое неравенство данной системы. Функции

$$f(x) = x^7+2x^3+9x+12$$

и

$$g(x) = x^3+3x-14$$

монотонно возрастают каждая на всей числовой прямой. Заметим, что $f(-1)=0$, $g(2)=0$. Поэтому выражения $x^7+2x^3+9x+12$ и $x+1$, а также $x^3+3x-14$ и $x-2$ являются знакотождественными (см. утверждение 2 из § 1.6). Значит, первое неравенство системы можно переписать в виде $(x+1)(x-2) \leqslant 0$. Множество решений неравенства — отрезок $[-1; 2]$.

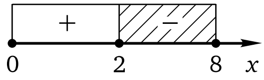
Решим второе неравенство данной системы. Обозначим x^2 через t и перепишем неравенство в виде $t^3+2t-3 \geqslant 0$. Функция $y=t^3+2t-3$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, и $y(1)=0$. Следовательно, выражения t^3+2t-3 и $t-1$ знакотождественны. Поэтому неравенство $t^3+2t-3 \geqslant 0$ равносильно неравенству $t-1 \geqslant 0$. Сделаем обратную замену: $x^2-1 \geqslant 0$, откуда $(x-1)(x+1) \geqslant 0$. Множеством решений последнего неравенства, а значит, и второго неравенства данной системы является объединение промежутков $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. Множество решений данной системы: $\{-1\} \cup [1; 2]$.

Ответ: $\{-1\} \cup [1; 2]$.

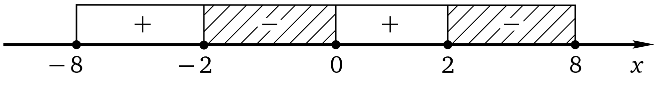
Последний пример этого параграфа связан со свойствами чётности/нечётности и периодичности. Нестандартным этот пример можно считать только из-за достаточно редкой для школьных учебников формулировки; само же его решение является вполне стандартным.

Пример 12. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечётной периодической с периодом, равным 16. Решите неравенство $f(x) \geqslant 0$, если $f(x) = 10x^2 - 16x - x^3$ для всех $x \in [0; 8]$.

Решение. Поскольку функция $y = f(x)$ является периодической, нужно сначала найти все решения данного неравенства на любом отрезке числовой прямой, длина которого равна периоду функции. В данном случае функция является ещё и нечётной. Поэтому можно решить неравенство на отрезке, длина которого равна половине периода функции и одним из концов которого является число 0, а затем воспользоваться нечётностью функции. Найдём вначале все решения неравенства $f(x) \geqslant 0$, т.е. неравенства $10x^2 - 16x - x^3 \geqslant 0$, принадлежащие отрезку $[0; 8]$. Приведём неравенство к виду $x^3 - 10x^2 + 16x \leqslant 0$. Вынесем общий множитель: $x(x^2 - 10x + 16) \leqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена $x^2 - 10x + 16$ являются числа 2 и 8. Разложив этот трёхчлен на множители, получим неравенство $x(x-2)(x-8) \leqslant 0$. Применим метод интервалов:



Найдём множество решений неравенства на отрезке, длина которого равна длине периода, т.е. на отрезке $[-8; 8]$, воспользовавшись нечётностью функции (её график симметричен относительно начала координат, поэтому в симметричных относительно нуля точках она принимает значения противоположных знаков):



Теперь с учётом того, что период функции равен 16, находим множество решений неравенства: $[16n - 2; 16n] \cup [16n + 2; 16n + 8]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $[16n - 2; 16n] \cup [16n + 2; 16n + 8]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Упражнения к § 2.2

Решите неравенство.

1. а) $(x-2)(x-1)^2 \geqslant 0$; **б)** $(x-6)(x+2)^2 \geqslant 0$.

2. а) $(x+1)(x+2)(x+3)^2(x+4)^3 \leqslant 0$;

б) $(x+1)(x+4)^3(x+5)^4(x+6)^5 \leqslant 0$.

3. а) $(x^2-6x+5)(x+3)^2 \leqslant 0$; **б)** $(x^2-5x+4)(x+2)^2 \leqslant 0$.

4. а) $|3x^2-11x+6|(6x^2-11x+3) \geqslant 0$;

б) $|5x^2-12x+4|(4x^2-12x+5) \geqslant 0$.

5. а) $x^2(x^2+9) \leqslant 9(x^2+9)$; **б)** $x^2(x^2+4) \leqslant 4(x^2+4)$.

6. а) $(2x-3)(x^2-x-2) \leqslant (2x-3)(10x^2+11x+2)$;

б) $(3x-1)(x^2+x-2) \leqslant (3x-1)(5x^2+5x-1)$.

7. а) $(4x^2-9)(3x^2-5x-8) \geqslant (4x^2-9)(2x^2-5x-8)$;

б) $(25x^2-4)(3x^2-2x-5) \geqslant (25x^2-4)(2x^2-2x-5)$.

8. а) $(x^2-3)(2x^2-3x+1) < (x^2-7)(2x^2-3x+1)$;

б) $(x^2-5)(4x^2-x-5) > (x^2-3)(4x^2-x-5)$.

9. а) $(x^2+4x+3)(x-2) < (x^2-2x-3)(x+3)$;

б) $(x^2-3x+2)(x-3) < (x^2-5x+6)(x-4)$.

10. а) $(x+3)^3+(x-5)^3 \geqslant 2(x-1)^3$; **б)** $(x+5)^3+(x-3)^3 \geqslant 2(x+1)^3$.

11. а) $9x^4 \geqslant 4x^2$; **б)** $9x^2 \leqslant 16x^4$.

12. а) $x^3+15x^2 \geqslant 225(x+15)$; **б)** $x^3-14x^2 \leqslant 196(x-14)$.

13. а) $(x^2+10x+16)^2 > (x^2+10x+26)^2$;

б) $(x^2+12x+15)^2 > (x^2+12x+25)^2$.

Решите систему неравенств.

14. а) $\begin{cases}(x-7)(x^2-49) \geqslant 0,\\ (x-9)(x^2-81) \leqslant 0;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}(x-6)(x^2-36) \geqslant 0,\\ (x-10)(x^2-100) \leqslant 0.\end{cases}$

15. а) $\begin{cases}2x^2(4x-3) \geqslant 7(3-4x),\\ 3(2x-7) \leqslant 4x^2(7-2x);\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}3x^2(7x-2) \geqslant 4(2-7x),\\ 2(3x-4) \leqslant 7x^2(4-3x).\end{cases}$

16. а) $\begin{cases}(x+4)^3(x+2)^2 \leqslant (x+4)^2(x+2)^3,\\ x^2 < 15;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x+5)^3(x+3)^2 \leqslant (x+5)^2(x+3)^3,\\ x^2 < 24.\end{cases}$

17. а) $\begin{cases}(3x^2-11)^2 \leqslant (3x^2-13)^2,\\ (x+7)^2 \leqslant (x-7)^2;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}(2x^2-7)^2 \leqslant (2x^2-9)^2,\\ (x+8)^2 \leqslant (x-8)^2.\end{cases}$

18. а) $\begin{cases}(2x-5)^2 \geqslant (5x-2)^2,\\ (2x+5)^2 \leqslant (5x+2)^2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(3x-4)^2 \geqslant (4x-3)^2,\\ (3x+4)^2 \leqslant (4x+3)^2.\end{cases}$

19. а) $\begin{cases}x^3(5x^2+4) > 4x^3,\\ x^2-8x-20<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^3(4x^2+5) > 5x^3,\\ x^2+10x-24<0.\end{cases}$

20. а) $\begin{cases}3x(4x-7)^2 \leqslant 2(4x-7)^2,\\ 4x(3x-2)^2 \geqslant 7(3x-2)^2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}8x(2x-9)^2 \leqslant 3(2x-9)^2,\\ 2x(8x-3)^2 \geqslant 9(8x-3)^2.\end{cases}$

21. Решите двойное неравенство:

а) $(5x^2-4x-1)^2 < (5x^2-4x+3)^2 < (5x^2+4x+2)^2$;

б) $(4x^2-2x-3)^2 < (4x^2-2x+5)^2 < (4x^2+2x+1)^2$.

Решите систему неравенств.

22. а) $\begin{cases}|x^2-121|(16-x^2) \geqslant 0,\\ x^2+15x+44 \leqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}|x^2-144|(9-x^2) \geqslant 0,\\ x^2+15x+36 \leqslant 0.\end{cases}$

23. а) $\begin{cases}2(2x+3)^4 \geqslant (2x+3)^3+(2x+3)^5,\\ x^2+3x+2 \leqslant 0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}2(3x+7)^4 \geqslant (3x+7)^3+(3x+7)^5,\\ x^2+5x+6 \leqslant 0.\end{cases}$

24. а) $\begin{cases}4x^4-4x^3+x^2 \leqslant 9,\\ 9x^4-6x^3+x^2 \geqslant 16;\end{cases}$ б) $\begin{cases}16x^4-8x^3+x^2 \leqslant 25,\\ 25x^4-10x^3+x^2 \geqslant 36.\end{cases}$

Решите неравенство.

25. а) $(x^2+1{,}7x+0{,}9)^2+(x^2+3{,}8x+0{,}585)^2 \leqslant$
$\leqslant (x^2+2{,}7x+0{,}75)^2+(x^2+2{,}8x+0{,}735)^2$;

б) $(x^2+1{,}6x+0{,}4)^2+(x^2+4{,}2x+1{,}362)^2 \leqslant$
$\leqslant (x^2+2{,}6x+0{,}77)^2+(x^2+3{,}2x+0{,}992)^2$.

26. а) $36x^4+35x^2-1 \leqslant 0$; б) $49x^4+48x^2-1 \leqslant 0$.

27. а) $(3x^2-2x)^2+12x+5 < 18x^2$; б) $16(x^2+4x)^2 < 8x^2+32x+63$.

28. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}4x^4-21x^2-25<0,\\ x^2(9x+11) < 20x^2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}25x^4-24x^2-49<0,\\ x^2(7x+8) < 15x^2.\end{cases}$

Решите неравенство.

29. а) $(7x^3+6x^2-2x+5)(7x^3+4x^2+4x+2) \leqslant$
$\leqslant (7x^3+6x^2-3x+5)(7x^3+4x^2+5x+2)$;

б) $(3x^3+5x^2-x-4)(3x^3+3x^2+3x-1) \leqslant$
$\leqslant (3x^3+5x^2-2x-4)(3x^3+3x^2+4x-1)$.

30. а) $(9x^4-9x-10)^3 \leqslant (8x^4-9x-9)^3$;

б) $(8x^4-8x+7)^3 \leqslant (7x^4-8x+23)^3$.

31. а) $(3x^2-4x+1)^4 \geqslant (2x^2-3x+3)^4$;

б) $(3x^2-7x+2)^4 \geqslant (2x^2-5x+10)^4$.

32. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}(2x+3)^6>(3x+2)^6,\\ 3x^3<2x^2;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}(3x-4)^6>(4x-3)^6,\\ 4x^3<3x^2.\end{cases}$

33. Решите неравенство:

а) $(2x-3)^6<(3-2x)^3$; **б)** $(3x-4)^6<(4-3x)^3$.

34. а) Наибольшее из чисел m и n обозначается $\max(m;n)$. Если числа m и n равны, то $\max(m;n)=m=n$. Найдите все значения x, при каждом из которых $\max(6x+1;x^2+3)<7$.

б) Наименьшее из чисел m и n обозначается $\min(m;n)$. Если числа m и n равны, то $\min(m;n)=m=n$. Найдите все значения x, при каждом из которых $\min(3x+20;x^2+7)>11$.

35. а) Сравните каждое из чисел m, n и k с числом 3, если известно, что

$$(m-3)(n-3)<0,\quad (m-3)(k-3)>0,\quad (m-3)(n-3)(k-3)<0.$$

б) Сравните каждое из чисел x, y и z с числом 5, если известно, что

$$(x-5)(y-5)>0,\quad (x-5)(z-5)>0,\quad (x-5)(y-5)(z-5)<0.$$

Решите систему неравенств.

36. а) $\begin{cases}(x^2-4x+3)^2\leqslant 0,\\ x^3+x^2>35;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}(x^2-3x-4)^2\leqslant 0,\\ x^3+x^2>47.\end{cases}$

37. а) $\begin{cases}(x^2+3x-10)^2\leqslant 0,\\ x^{25}+5x^{24}+3x+14\leqslant 0;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}(x^2-2x-8)^2\leqslant 0,\\ x^{23}-4x^{22}+5x-19>0.\end{cases}$

38. а) $\begin{cases}(x-6)(x-7)+x-6\leqslant 0,\\ x^{36}-6x^{35}+5x-29>0;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}(x-7)(x-8)+x-7\leqslant 0,\\ x^{47}-7x^{46}+6x-41>0.\end{cases}$

39. а) $\begin{cases}(x^2-9)(x^2-10)+x^2-9\leqslant 0,\\ x^{47}-3x^{46}+7x-20>0;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}(x^2-4)(x^2-5)+x^2-4\leqslant 0,\\ x^{39}+2x^{38}+7x+13<0.\end{cases}$

40. Решите неравенство:

а) $(x^2+6x+11)(x^2+6x+13)\leqslant 8$;

б) $(x^2-8x+18)(x^2-8x+19)\leqslant 6$.

41. Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y, для каждой из которых:

а) $7(x-5)^2+5(y-7)^2 \leqslant 6$; **б)** $9(x-11)^2+11(y-9)^2 \leqslant 10$.

Решите неравенство.

42. а) $x^5+5x<42$; **б)** $x^7+7x>142$.

43. а) $13x^{13}+7x^7+5x^5+x+26<0$; **б)** $11x^{11}+9x^9+3x^3+x+24>0$.

44. а) $x^{18}+5x^{10}+3x^2 \geqslant 9$; **б)** $x^{22}+7x^{14}+3x^2 \leqslant 11$.

45. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} (5x^2-12x+4)^2+(2x^2-7x+6)^2 \leqslant 0, \\ x^5-2x^4-x^2+5 \geqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (5x^2-17x+6)^2+(3x^2-13x+12)^2 \leqslant 0, \\ x^5-3x^4-x^2+10 \geqslant 0. \end{cases}$

46. а) Функция $y=f(t)$ монотонно убывает на всей числовой прямой. Найдите все значения x, для которых

$$f(2x^2-3x^3+7) \geqslant f(x^5+2x^2+3x).$$

б) Функция $y=f(t)$ монотонно убывает на всей числовой прямой. Найдите все значения x, для которых

$$f(3x^2-2x^3-8) \leqslant f(x^5+3x^2+5x).$$

47. а) Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и принимает отрицательные значения для всех x, кроме $x=3$. Решите неравенство

$$(x^2-16)f(x^2-6) > 0,$$

если $f(3)=0$.

б) Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и принимает положительные значения для всех x, кроме $x=4$. Решите неравенство

$$(x^2-25)f(x^2-12) < 0,$$

если $f(4)=0$.

48. а) Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и принимает положительные значения для всех x, кроме $x=-20$. Решите неравенство

$$(x^2+2x-15)f(x^2-9x) \leqslant 0,$$

если $f(-20)=0$.

б) Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и принимает отрицательные значения для всех x, кроме $x=5$. Решите неравенство

$$(x^2-x-30)f(x^2-4x)\leqslant 0,$$

если $f(5)=0$.

49. Найдите абсциссы всех тех точек графика функции $y=f(x)$, расстояние от каждой из которых до оси абсцисс не больше расстояния до оси ординат, если:

а) $f(x)=10x^2-9$; **б)** $f(x)=5x^2-4$.

50. а) Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечётной периодической с периодом, равным 12. Решите неравенство $f(x)\leqslant 0$, если $f(x)=7x^2-x^3-6x$ для всех $x\in[0;6]$.

б) Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и является чётной периодической с периодом, равным 10. Решите неравенство $f(x)\leqslant 0$, если $f(x)=7x^2-x^3-10x$ для всех $x\in[0;5]$.

Диагностическая работа 2

Вариант 1

Решите неравенство.

1. $(x-4)^3(x-5)^4(x-6)^5\geqslant 0$.

2. $(5x-2)(3x^2-x-4)^2\geqslant(4x+1)(3x^2-x-4)^2$.

3. $(4x^2-7x+3)(x+1)\leqslant(2x^2+x-1)(x-1)$.

4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}(x^2-64)(x-6)<(x^2-36)(x-8),\\ 0{,}6x>4{,}2.\end{cases}$$

5. Решите неравенство

$$(x^2-4x)^2+2(x^2-4x)-35<0.$$

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}(4x^2+1)^2+3\leqslant 28x^2,\\ (2x^2+3x)^2\leqslant 8x^2+12x+5.\end{cases}$$

7. Решите неравенство $(3x-4)^6>(4x-3)^6$.

8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}(3x-4)^6\leqslant(4x-3)^3,\\ 9x^2-28x+19\geqslant 0.\end{cases}$$

9. Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых

$$(x^2 - 4x + 7)(y^2 + 2y + 10) \leqslant 27.$$

10. Функция $y = f(t)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой. Найдите все значения x, для которых

$$f(x^{10} + x^9) \leqslant f(x^9 + x^{12}).$$

11. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 13x^7 + 17x^3 \geqslant 30, \\ x^2 - 5x + 4 \geqslant 0. \end{cases}$$

12. Известно, что функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом, равным 11. Решите неравенство $f(x) \geqslant 30$, если $f(x) = 11x - x^2$ для всех $x \in [0; 11]$.

Вариант 2

Решите неравенство.

1. $(x-6)^5(x-8)^7(x-9)^8 \leqslant 0$.

2. $(4x-1)(2x^2-x-3)^2 \geqslant (3x+4)(2x^2-x-3)^2$.

3. $(6x^2+5x-1)(x-1) \leqslant (3x^2-x-2)(x+1)$.

4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - 81)(x+5) > (x^2 - 25)(x+9), \\ 0{,}4x > -2{,}4. \end{cases}$$

5. Решите неравенство

$$(x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) - 24 < 0.$$

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (9x^2 - 2)^2 + 5 \leqslant 54x^2, \\ (3x^2 - 2x)^2 + 12x + 5 \geqslant 18x^2. \end{cases}$$

7. Решите неравенство

$$(2x-3)^6 > (3x-2)^6.$$

8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (2x-3)^6 \leqslant (3x-2)^3, \\ 4x^2 - 15x + 11 \geqslant 0. \end{cases}$$

9. Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых

$$(x^2-2x+9)(y^2+4y+7) \leqslant 24.$$

10. Функция $y=f(t)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой. Найдите все значения x, для которых

$$f(x^8+x^9) \leqslant f(x^9+x^{10}).$$

11. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 15x^9+19x^5 \leqslant 34, \\ x^2+4x-5 \geqslant 0. \end{cases}$$

12. Известно, что функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом, равным 14. Решите неравенство $f(x) \geqslant 48$, если $f(x)=14x-x^2$ для всех $x \in [0; 14]$.

Глава 3. Дробно-рациональные неравенства и системы неравенств

Дробно-рациональными называют неравенства вида $f(x) \vee 0$ или $f(x) \vee g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — алгебраические дроби (т. е. отношения двух многочленов) или суммы нескольких алгебраических дробей и многочленов, а знаком «$\vee$» обозначен, как обычно, один из четырёх возможных знаков неравенств «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$». В отличие от целых неравенств, дробно-рациональные неравенства в большинстве случаев имеют смысл уже не при любом значении переменной: знаменатели всех алгебраических дробей в каждой из частей неравенства должны быть отличны от нуля — эти условия и задают ОДЗ дробно-рационального неравенства.

§ 3.1. Простейшие дробно-рациональные неравенства

Под простейшими дробно-рациональными неравенствами будем понимать неравенства вида $\dfrac{a}{f(x)} \vee 0$, где a — отличное от нуля действительное число, $f(x)$ — многочлен первой или второй степени. Кроме того, к простейшим будем относить и неравенства вида $\dfrac{f(x)}{g(x)} \vee 0$, где один из многочленов $f(x)$ или $g(x)$ является многочленом первой или второй степени, а другой при любых значениях переменной принимает значения одного знака (как правило, положительные). Тем самым, знак либо числителя, либо знаменателя алгебраической дроби в левой части простейшего дробно-рационального неравенства не зависит от значений переменной. Поэтому знак этой дроби будет определяться знаком только одного алгебраического выражения (многочлена первой или второй степени). Таким образом, простейшие дробно-рациональные неравенства решаются приведением их к линейным или квадратным неравенствам.

Пример 1. Решите неравенство $\dfrac{37}{8x^2-41x+5} \leqslant 0$.

Решение. Числитель дроби положителен. Поэтому данное неравенство выполняется в том и только том случае, если $8x^2-41x+5<0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части последнего неравенства являются числа $\dfrac{1}{8}$ и 5, старший коэффициент трёхчлена положителен.

Следовательно, множеством решений неравенства является интервал $\left(\frac{1}{8}; 5\right)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{8}; 5\right)$.

Пример 2. Решите неравенство

$$\frac{\left(x^2\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)(5+8x-4x^2)}{8x^2-5x+4} \leqslant 0.$$

Решение. Поскольку $x^2 \geqslant 0$, получаем, что при любом значении переменной $x^2\sqrt{2}+\sqrt[3]{3} > 0$. Дискриминант квадратного трёхчлена $8x^2-5x+4$ отрицателен, старший коэффициент положителен, следовательно, этот трёхчлен принимает только положительные значения. Поэтому данное неравенство выполняется в том и только том случае, если $5+8x-4x^2 \leqslant 0$. Приведём последнее неравенство к базовому виду, умножив обе его части на -1 и изменив знак неравенства на противоположный: $4x^2-8x-5 \geqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части последнего неравенства являются числа $-0{,}5$ и $2{,}5$, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $(-\infty; -0{,}5] \cup [2{,}5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -0{,}5] \cup [2{,}5; +\infty)$.

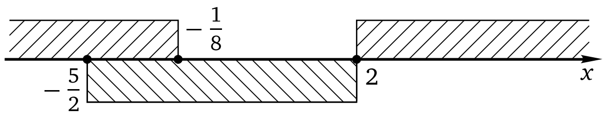
Пример 3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{8x^2-15x-2}{15x^2-2x+8} \geqslant 0, \\ \dfrac{2x^2+x-10}{2x^2+x+10} \leqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Дискриминант квадратного трёхчлена $15x^2-2x+8$ отрицателен, старший коэффициент положителен, следовательно, этот трёхчлен принимает только положительные значения. Поэтому первое неравенство данной системы выполняется в том и только том случае, если $8x^2-15x-2 \geqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части полученного неравенства являются числа $-\frac{1}{8}$ и 2, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right] \cup [2; +\infty)$.

Решим второе неравенство данной системы. Дискриминант квадратного трёхчлена $2x^2+x+10$ отрицателен, старший коэффициент положителен, следовательно, этот трёхчлен принимает только положительные значения. Поэтому второе неравенство данной системы выполняется в том и только том случае, если $2x^2+x-10 \leqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части последнего неравенства являются числа $-\frac{5}{2}$ и 2, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $\left[-\frac{5}{2}; 2\right]$.

Найдём множество решений данной системы неравенств как пересечение числовых множеств $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right] \cup [2; +\infty)$ и $\left[-\frac{5}{2}; 2\right]$:



Множество решений данной системы неравенств: $\left[-\frac{5}{2}; -\frac{1}{8}\right] \cup \{2\}$.

Ответ: $\left[-\frac{5}{2}; -\frac{1}{8}\right] \cup \{2\}$.

Упражнения к § 3.1

Решите неравенство (систему неравенств).

1. а) $\dfrac{5}{3x+2} \leqslant 0$; **б)** $\dfrac{4}{2x+3} \geqslant 0$.

2. а) $\dfrac{2x-1}{4x^2+3} > 0$; **б)** $\dfrac{3x-2}{5x^2+7} < 0$.

3. а) $\dfrac{7x^2+1}{2-3x} > 0$; **б)** $\dfrac{6x^2+1}{3-2x} < 0$.

4. а) $\dfrac{4}{4x^2-9} > 0$; **б)** $\dfrac{9}{9x^2-4} < 0$.

5. а) $\dfrac{9x^2-1}{3x^2+4} < 0$; **б)** $\dfrac{4x^2-1}{4x^2+5} > 0$.

6. а) $\dfrac{2x^2+11}{25-x^2} \leqslant 0$; **б)** $\dfrac{4x^2+13}{16-x^2} \geqslant 0$.

7. а) $\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+9} \geqslant 0$; **б)** $\dfrac{x^2+x-12}{3x^2+5} \leqslant 0$.

8. а) $\dfrac{36-25x^2}{x^2+2x+3} \leqslant 0$; **б)** $\dfrac{81-4x^2}{x^2+3x+4} \geqslant 0$.

9. а) $\dfrac{2x^2+x+6}{2x^2+x-6} \geqslant 0$; **б)** $\dfrac{2x^2-x+10}{2x^2-x-10} \leqslant 0$.

10. а) $\dfrac{5-8x-4x^2}{5+2x+4x^2} \geqslant 0$; **б)** $\dfrac{6-5x-4x^2}{6+5x+4x^2} \leqslant 0$.

11. а) $\begin{cases} \dfrac{3}{4x+5} > 0, \\ 3x-8 < 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{2}{3x+7} > 0, \\ 2x-5 < 0. \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} \dfrac{2x-5}{5x^2+9} < 0, \\ 4x-1 > 2x+3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{9x^2+5} < 0, \\ 3x-2 > 2x-7. \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} \dfrac{5}{4-3x} > 0, \\ \dfrac{5-6x}{3} \geqslant \dfrac{2}{5}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{4}{6-5x} > 0, \\ \dfrac{4-3x}{2} \geqslant \dfrac{3}{5}. \end{cases}$

14. а) $\begin{cases} \dfrac{11}{5-6x} < 0, \\ 0{,}2x-0{,}1 > 0{,}3x-0{,}2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{5}{3-8x} < 0, \\ 0{,}3x-0{,}2 > 0{,}4x-0{,}3. \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} \dfrac{11}{4-x} \geqslant 0, \\ \dfrac{2}{2-5x} < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{9}{3-x} \geqslant 0, \\ \dfrac{3}{3-4x} < 0. \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} \dfrac{14}{16x^2-9} > 0, \\ 4x-3 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{19}{4x^2-25} > 0, \\ 2x-5 < 0. \end{cases}$

17. а) $\begin{cases} \dfrac{25-36x^2}{3x^2+4} \leqslant 0, \\ \dfrac{5-6x}{7} > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{16-9x^2}{2x^2+5} \leqslant 0, \\ \dfrac{4-3x}{6} > 0. \end{cases}$

18. а) $\begin{cases} \dfrac{x^2-6x}{6x^2+5} \leqslant 0, \\ \dfrac{6}{5-x} > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x^2-8x}{8x^2+7} \leqslant 0, \\ \dfrac{5}{7-x} > 0. \end{cases}$

19. а) $\begin{cases} \dfrac{6x^2-x-1}{6x^2-x+1} \leqslant 0, \\ \dfrac{2x^2-x}{2x^2-x+1} \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{12x^2+x-1}{12x^2+x+1} \leqslant 0, \\ \dfrac{4x^2-x}{4x^2-x+1} \geqslant 0. \end{cases}$

20. а) $\begin{cases} \dfrac{81-x^2}{81+x^2} \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2-9x}{x^2-9x+99} \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{64-x^2}{64+x^2} \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2-8x}{x^2-8x+88} \geqslant 0. \end{cases}$

Диагностическая работа 3

Вариант 1

Решите неравенство.

1. $\dfrac{25x^2-49}{5x^2+9}<0.$

2. $\dfrac{4+x^2}{4x-x^2}\leqslant 0.$

3. $\dfrac{5x^2+13x-6}{5x^2+13}\geqslant 0.$

4. $\dfrac{9-49x^2}{9x^2+8x+7}\leqslant 0.$

5. $\dfrac{3x^2+7x+6}{3x^2+7x-6}\geqslant 0.$

6. $\dfrac{5-7x-6x^2}{5+7x+6x^2}\geqslant 0.$

Решите систему неравенств.

7. $\begin{cases}\dfrac{10}{9-x}\geqslant 0,\\ \dfrac{8}{7-6x}<0.\end{cases}$

8. $\begin{cases}\dfrac{15}{16x^2-1}>0,\\ 17x-18<0.\end{cases}$

9. $\begin{cases}\dfrac{81-64x^2}{81+64x^2}\leqslant 0,\\ \dfrac{9-8x}{7}\geqslant 0.\end{cases}$

10. $\begin{cases}\dfrac{5x^2-8x}{5x^2+8}\geqslant 0,\\ \dfrac{5}{7-4x}>0.\end{cases}$

11. $\begin{cases}\dfrac{6x^2-11x-7}{6x^2-11x+7}\leqslant 0,\\ \dfrac{3x^2-7x}{7x^2-3x+2}\geqslant 0.\end{cases}$

12. $\begin{cases}\dfrac{36-25x^2}{36+25x^2}\geqslant 0,\\ \dfrac{5x^2-6x}{5x^2-6x+56}\geqslant 0.\end{cases}$

Вариант 2

Решите неравенство.

1. $\dfrac{4x^2-25}{4x^2+5}>0.$

2. $\dfrac{5+x^2}{5x-x^2}\geqslant 0.$

3. $\dfrac{4x^2+13x-12}{4x^2+13}\leqslant 0.$

4. $\dfrac{121-9x^2}{4x^2+3x+2}\geqslant 0.$

5. $\dfrac{3x^2-5x+12}{3x^2-5x-12}\leqslant 0.$

6. $\dfrac{8-2x-3x^2}{8+2x+3x^2}\leqslant 0.$

Решите систему неравенств.

7. $\begin{cases}\dfrac{9}{8-x}>0,\\ \dfrac{7}{6-5x}<0.\end{cases}$

8. $\begin{cases}\dfrac{24}{25x^2-1}>0,\\ 26x-27<0.\end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{49-36x^2}{49+36x^2} \leqslant 0, \\ \dfrac{7-6x}{5} \geqslant 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{8x^2-9x}{8x^2+9} \geqslant 0, \\ \dfrac{6}{8-7x} > 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{12x^2+5x-3}{12x^2+5x+3} \leqslant 0, \\ \dfrac{3x^2-x}{x^2-3x+4} \geqslant 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{49-16x^2}{49+16x^2} \geqslant 0, \\ \dfrac{4x^2-7x}{4x^2-7x+47} \geqslant 0. \end{cases}$

§ 3.2. Более сложные дробно-рациональные неравенства

Рассмотрим более сложные дробно-рациональные неравенства, начав с тех, которые сводятся к простейшим с помощью очевидных алгебраических преобразований.

Неравенства, непосредственно сводимые к простейшим

Следующими по уровню сложности после простейших являются дробно-рациональные неравенства, сводимые к простейшим после нескольких (обычно двух–трёх) несложных преобразований. Как правило, такими преобразованиями являются перенос всех алгебраических выражений в одну из частей неравенства, приведение алгебраических дробей к общему знаменателю, вынесение общего множителя.

Пример 1. Решите неравенство

$$\frac{2x^2-3x-4}{3x^2-x-14} \geqslant \frac{7+3x-2x^2}{14+x-3x^2}.$$

Решение. Знаменатели дробей в левой и правой частях неравенства отличаются только знаком. Умножим числитель и знаменатель правой части на -1 и перенесём полученную дробь $\dfrac{2x^2-3x-7}{3x^2-x-14}$ в левую часть неравенства:

$$\frac{2x^2-3x-4}{3x^2-x-14} - \frac{2x^2-3x-7}{3x^2-x-14} \geqslant 0.$$

После приведения разности дробей к общему знаменателю и очевидных упрощений получим неравенство $\dfrac{3}{3x^2-x-14} \geqslant 0$, которое выполняется в том и только том случае, если $3x^2-x-14>0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части последнего неравенства являются числа -2 и $\frac{7}{3}$, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$.

Пример 2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{7x+6}{7x^2+6} \geqslant \dfrac{7x+5}{7x^2+5}, \\ \dfrac{2}{3x^2-300} > \dfrac{3}{2x^2-200}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Решим первое неравенство системы. Стандартный путь решения: перенести дробь из правой части в левую и привести полученную разность дробей к общему знаменателю, после чего выполнить алгебраические преобразования в числителе полученной дроби. Решение можно несколько оптимизировать, учитывая то, что при любом значении переменной знаменатели дробей положительны, т. е. это тот довольно редкий случай, когда обе части неравенства можно умножить на выражение, зависящее от переменной, и избавиться от дробей. Выполнив умножение обеих частей неравенства на $(7x^2+5)(7x^2+6)$, получим

$$(7x+6)(7x^2+5) \geqslant (7x+5)(7x^2+6).$$

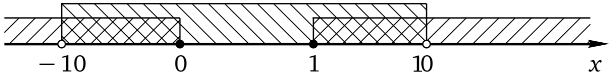
После раскрытия скобок, переноса всех слагаемых из правой части неравенства в левую и приведения подобных слагаемых придём к неравенству $7x^2-7x \geqslant 0$, откуда $7x(x-1) \geqslant 0$. Множество решений неравенства: $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Решим второе неравенство данной системы. Вынесем общие множители в знаменателях дробей:

$$\frac{2}{3(x^2-100)} > \frac{3}{2(x^2-100)}.$$

Поскольку $\frac{3}{2a} - \frac{2}{3a} = \frac{5}{6a}$, последнее неравенство приводится к виду $\frac{5}{6(x^2-100)} < 0$, откуда $x^2-100 < 0$, или $(x-10)(x+10) < 0$. Множество решений второго неравенства системы: $(-10; 10)$.

Множество решений данной системы можно найти устно либо использовать числовую прямую:



Множество решений данной системы неравенств: $(-10; 0] \cup [1; 10)$.

Ответ: $(-10; 0] \cup [1; 10)$.

Метод интервалов

Наиболее простые дробно-рациональные неравенства, которые целесообразно решать методом интервалов (см. § 1.2), имеют вид $\frac{f(x)}{g(x)} \vee 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены первой или второй степени. Строгие неравенства указанного вида можно сводить к равносильным им целым неравенствам $f(x)g(x) \vee 0$ (знаком «$\vee$» обозначен один из знаков «$>$», «$<$»). Впрочем, это будет просто ещё одним дополнительным шагом решения, никаких особых преимуществ этот шаг не даёт. Самый громоздкий путь — сведение неравенства $\frac{f(x)}{g(x)} \vee 0$ к двум системам, определяющим знак дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ по знакам её числителя и знаменателя. Тем самым, прямое применение метода интервалов представляется наиболее естественным и наименее трудоёмким. Область определения алгебраической дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ задаётся условием $g(x) \neq 0$. Нули числителя и знаменателя (последние на числовой оси изображаются, как обычно, «пустыми» кружочками, т. е. «выкалываются») разбивают числовую ось на несколько интервалов. Найдя эти нули (нули числителя в случае нестрогого неравенства должны быть обязательно включены в ответ; в этом случае они изображаются на чертеже «жирными» точками) и определив знак алгебраической дроби в каждом из интервалов, получим решение неравенства. Если числитель и знаменатель оба обращаются в нуль в какой-то точке x_0, то после их разложения на множители полученную алгебраическую дробь можно сократить на $x - x_0$, добавив условие $x \neq x_0$ и записав это и данное неравенства в виде системы неравенств.

Пример 3. Решите неравенство $\frac{5x^2-13x-6}{3x^2-8x-3} \geqslant 0$.

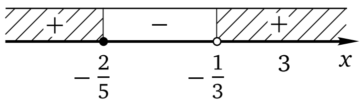
Р е ш е н и е. Корнями квадратного трёхчлена $5x^2 - 13x - 6$ являются числа $-\frac{2}{5}$ и 3. Корнями квадратного трёхчлена $3x^2 - 8x - 3$ являются числа $-\frac{1}{3}$ и 3. Применив формулу разложения квадратного трёхчлена на линейные множители, получим неравенство

$$\frac{5\left(x+\frac{2}{5}\right)(x-3)}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-3)} \geqslant 0.$$

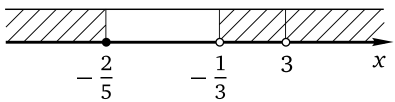
Разделив обе части неравенства на $\frac{5}{3}$ и сократив дробь при условии $x \neq 3$, получим равносильную данному неравенству систему

$$\begin{cases} \dfrac{x+\frac{2}{5}}{x+\frac{1}{3}} \geqslant 0, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Применим метод интервалов для решения первого неравенства системы:



Значит, множеством решений системы и данного неравенства является объединение промежутков $\left(-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup \left(-\frac{1}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.



Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup \left(-\frac{1}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.

В более сложных случаях неравенств вида $\frac{f(x)}{g(x)} \vee 0$ алгебраические выражения $f(x)$ и $g(x)$ (либо одно из них) могут оказаться многочленами степени выше второй, в частности быть равными произведению нескольких многочленов. Алгоритм решения неравенства методом интервалов при этом останется тем же.

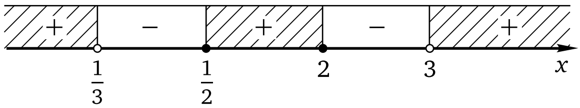
Пример 4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2-5x+2}{3x^2-10x+3} \geqslant 0, \\ \dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{2x-1} \geqslant 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Решим первое неравенство данной системы. Корнями квадратного трёхчлена $2x^2-5x+2$ являются числа $\frac{1}{2}$ и 2. Корнями квадратного трёхчлена $3x^2-10x+3$ являются числа $\frac{1}{3}$ и 3. Следовательно, первое неравенство можно записать в виде

$$\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)} \geqslant 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений первого неравенства данной системы: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right] \cup (3; +\infty)$.

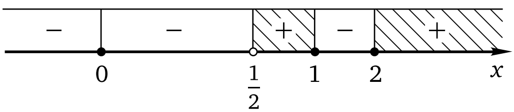
Решим второе неравенство данной системы. Вынесем общий множитель в числителе дроби:

$$\frac{x^2(x^2-3x+2)}{2x-1} \geqslant 0.$$

Корнями квадратного трёхчлена x^2-3x+2 являются числа 1 и 2. Поэтому последнее неравенство можно переписать в виде

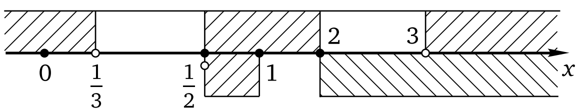
$$\frac{x^2(x-1)(x-2)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \geqslant 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений неравенства: $\{0\} \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right] \cup [2; +\infty)$.

Для того чтобы решить данную систему, найдём пересечение полученных множеств:



Множество решений данной системы неравенств имеет вид $\{0\} \cup$ $\cup \left(\frac{1}{2}; 1\right] \cup \{2\} \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $\{0; 2\} \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right] \cup (3; +\infty)$.

Равносильные преобразования

Во многих случаях для того чтобы получить дробно-рациональное неравенство вида $\frac{f(x)}{g(x)} \vee 0$ или $\frac{a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot \ldots \cdot a_n(x)}{a_{n+1}(x) \cdot a_{n+2}(x) \cdot \ldots \cdot a_{n+m}(x)} \vee 0$, требуется сделать определённые преобразования, прежде всего привести алгебраические дроби к общему знаменателю. Список остальных преобразований остаётся (с поправкой на ОДЗ) тем же, что и для целых неравенств: раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых, вынесение общего множителя, разложение на множители (в том числе и с помощью формул сокращённого умножения).

Ещё раз подчеркнём, что умножение обеих частей неравенства на выражение, содержащее переменную (например, переход от неравенства $\frac{a}{f(x)} > b$ к неравенству $a > b \cdot f(x)$), является в подавляющем большинстве случаев грубой ошибкой и приводит к неверному ответу. Это связано с тем, что указанный переход справедлив, только если $f(x) > 0$, и приводит к неверному неравенству в случае, когда $f(x) < 0$. Рецепт здесь только один: перенос всех алгебраических выражений в одну из частей неравенства с последующим приведением полученной суммы (разности) к общему знаменателю. Так, для неравенства $\frac{a}{f(x)} > b$ получаем $\frac{a}{f(x)} - b > 0$, откуда $\frac{a - b \cdot f(x)}{f(x)} > 0$. Последнее неравенство, как правило, решается методом интервалов.

Отметим также, что предварительный анализ условия и поиск возможного алгоритма решения в случае дробно-рациональных неравенств играет очень важную роль, позволяя не только оптимизировать вычисления, но и понять, каким образом неравенство можно свести к более простому.

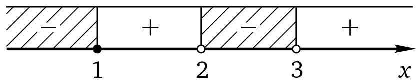
Пример 5. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2} + \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x - 3} \leqslant x + x^2.$$

Решение. Если просто привести все слагаемые к общему знаменателю, то в числителе получившейся дроби с большой вероятностью будет многочлен степени выше второй, поиск корней которого может оказаться затруднительным. Заметим, что если из первой дроби в левой части неравенства вычесть x, а из второй дроби вычесть x^2, после чего привести полученные разности к общему знаменателю каждую, то степени числителей полученных после этого дробей понизятся:

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2} + \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x - 3} \leqslant x + x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2} - x\right) + \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x - 3} - x^2\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{x - 2} + \frac{2}{x - 3} \leqslant 0.$$

Последнее неравенство является вполне стандартным. Приведём дроби к общему знаменателю и выполним алгебраические преобразования в числителе. Получим неравенство $\frac{x - 1}{(x - 2)(x - 3)} \leqslant 0$. Применим метод интервалов:



Множество решений данного неравенства: $(-\infty; 1] \cup (2; 3)$.

Ответ: $(-\infty; 1] \cup (2; 3)$.

Замечание. Вместо сделанного на первом шаге вычитания можно преобразовать левую часть, выполнив деление с остатком для каждой дроби либо аналогичное такому делению преобразование:

$$\frac{x^2-2x-1}{x-2}+\frac{x^3-3x^2+2}{x-3}=\frac{x^2-2x}{x-2}-\frac{1}{x-2}+\frac{x^3-3x^2}{x-3}+\frac{2}{x-3}=$$
$$=\frac{x(x-2)}{x-2}-\frac{1}{x-2}+\frac{x^2(x-3)}{x-3}+\frac{2}{x-3}=x-\frac{1}{x-2}+x^2+\frac{2}{x-3}.$$

После приведения подобных слагаемых получим уже знакомое неравенство

$$-\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-3}\leqslant 0.$$

Пример 6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{3(x+2)^2}{7-2x}\geqslant (x+2)^2,\\[2mm] \dfrac{x^2-4x+1}{x^2-4x+3}+\dfrac{7x-26}{x-4}\leqslant\dfrac{8x-7}{x-1}.\end{cases}$$

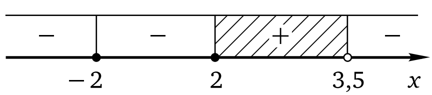
Р е ш е н и е. Решим первое неравенство системы, приведя его к виду

$$\frac{3(x+2)^2}{7-2x}-(x+2)^2\geqslant 0.$$

Приведём полученную разность к общему знаменателю и вынесем за скобки общий множитель:

$$\frac{(x+2)^2(3-7+2x)}{7-2x}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2(2x-4)}{7-2x}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2(x+2)^2(x-2)}{2(3{,}5-x)}\geqslant 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений неравенства: $\{-2\} \cup [2; 3{,}5)$.

Решим второе неравенство системы. Если из первой дроби в левой части неравенства вычесть 1, из второй дроби вычесть 7, а из дроби в правой части неравенства вычесть 8 и привести полученные разности к общему знаменателю каждую, придём к более простым дробям:

$$\frac{x^2-4x+1}{x^2-4x+3}-1+\frac{7x-26}{x-4}-7\leqslant\frac{8x-7}{x-1}-8\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{-2}{x^2-4x+3}+\frac{2}{x-4}\leqslant\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow\frac{-2}{(x-1)(x-3)}+\frac{2}{x-4}-\frac{1}{x-1}\leqslant 0.$$

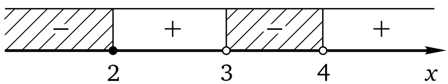
Приведя дроби в левой части последнего неравенства к общему знаменателю и выполнив преобразования в числителе, получим неравенство

$$\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x-3)(x-4)}\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)(x-4)}\leqslant 0.$$

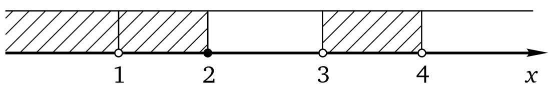
Сократив дробь, придём к системе неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{(x-3)(x-4)}\leqslant 0,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

Решим неравенство $\dfrac{x-2}{(x-3)(x-4)}\leqslant 0$, применив метод интервалов:



Поскольку $x\neq 1$, из найденного множества нужно исключить число 1:



Следовательно, множеством решений второго неравенства данной системы является объединение промежутков $(-\infty;1)\cup(1;2]\cup(3;4)$. Пересечением этого множества и множества $\{-2\}\cup[2;3{,}5)$ решений первого неравенства данной системы будет множество $\{-2;2\}\cup(3;3{,}5)$.

Ответ: $\{-2;2\}\cup(3;3{,}5)$.

Метод введения новой переменной

Наиболее распространённым типом дробно-рациональных неравенств, решаемых с помощью метода введения новой переменной (§ 1.4), является неравенство вида $\dfrac{a}{f^2(x)}+\dfrac{b}{f(x)}+c\vee 0$ ($f(x)$ — обычно многочлен первой или второй степени, знаком «$\vee$» по-прежнему обозначен один из четырёх возможных знаков неравенств «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$»). Один из способов решения такого неравенства состоит во введении новой переменной уже на первом шаге: обозначив $\dfrac{1}{f(x)}$ через t, получим квадратное неравенство $at^2+bt+c\vee 0$. Решив это неравенство и выполнив обратную замену, получаем, как правило, систему или совокупность двух неравенств $\dfrac{1}{f(x)}\vee t_1$ и $\dfrac{1}{f(x)}\vee t_2$, где t_1 и t_2 — корни квадратного трёхчлена at^2+bt+c. Эти неравенства приводятся к виду $\dfrac{1-t_1\cdot f(x)}{f(x)}\vee 0$ или $\dfrac{1-t_2\cdot f(x)}{f(x)}\vee 0$ соответственно и решаются методом интервалов. Второй способ требует некоторых предварительных преобразований, но сводится к решению только целых неравенств. Этот способ предполагает следующую последовательность действий. ОДЗ неравенства $\dfrac{a}{f^2(x)}+\dfrac{b}{f(x)}+c\vee 0$ определяется условием $f(x)\neq 0$. При этом условии $f^2(x)>0$. Поэтому можно обе части данного неравенства умножить на $f^2(x)$. Таким образом, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} c\cdot f^2(x)+b\cdot f(x)+a\vee 0,\\ f(x)\neq 0.\end{cases}$$

Первое неравенство системы является квадратным относительно $f(x)$ и решается стандартным образом (см. соответствующий пункт в § 2.2). Этот способ представляется более коротким и рациональным; именно он будет использоваться далее. Ту же систему можно получить и без умножения обеих частей неравенства на $f^2(x)$, если привести левую часть данного неравенства к общему знаменателю:

$$\frac{a+b\cdot f(x)+c\cdot f^2(x)}{f^2(x)}\vee 0$$

и воспользоваться положительностью $f^2(x)$ при условии $f(x)\neq 0$.

Пример 7. Решите неравенство

$$\frac{45}{(x^2+2x-8)^2}+\frac{14}{x^2+2x-8}+1\geqslant 0.$$

Решение. Умножим обе части неравенства на $(x^2+2x-8)^2$ при условии $x^2+2x-8\neq 0$. Получим систему неравенств

$$\begin{cases} (x^2+2x-8)^2+14(x^2+2x-8)+45\geqslant 0,\\ x^2+2x-8\neq 0.\end{cases}$$

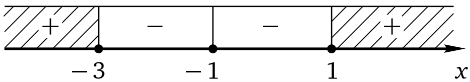
Решим первое неравенство системы, введя новую переменную $t=x^2+2x-8$. Получим неравенство $t^2+14t+45\geqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена $t^2+14t+45$ являются числа -9 и -5, поэтому неравенство можно переписать в виде $(t+9)(t+5) \geqslant 0$. Сделав обратную замену, придём к неравенству

$$(x^2+2x+1)(x^2+2x-3) \geqslant 0 \iff (x+1)^2(x^2+2x-3) \geqslant 0.$$

Корнями квадратного трёхчлена x^2+2x-3 являются числа -3 и 1, поэтому неравенство можно переписать в виде

$$(x+1)^2(x-1)(x+3) \geqslant 0.$$

Применим метод интервалов:



Множеством решений неравенства является объединение $(-\infty; -3] \cup$ $\cup \{-1\} \cup [1; +\infty)$.

Второе неравенство системы выполняется при всех значениях переменной, за исключением $x=-4$ и $x=2$ (именно эти числа являются корнями квадратного трёхчлена x^2+2x-8, и именно их надо исключить из множества решений первого неравенства системы). Значит, множеством решений системы, а следовательно, и данного неравенства является множество $(-\infty; -4) \cup (-4; -3] \cup \{-1\} \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-4; -3] \cup \{-1\} \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Пример 8. а) Решите неравенство

$$\frac{10}{x^2} - \frac{1}{x} - 3 \geqslant 0. \tag{1}$$

б) Решите неравенство

$$\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2 + 14 \cdot \frac{x^2-9}{x^2-1} - 15\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2 \leqslant 0. \tag{2}$$

в) Найдите все решения неравенства (1), не являющиеся решениями неравенства (2).

Р е ш е н и е. а) Решим неравенство (1). Умножив обе части неравенства на x^2 при условии $x \neq 0$, придём к системе

$$\begin{cases} 10 - x - 3x^2 \geqslant 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + x - 10 \leqslant 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена $3x^2+x-10$ являются числа -2 и $\frac{5}{3}$, старший член трёхчлена положителен. Поэтому множество решений первого неравенства системы — отрезок $\left[-2; \frac{5}{3}\right]$. Следовательно, множеством решений всей системы, а значит, и неравенства (1) является множество $[-2; 0) \cup \left(0; \frac{5}{3}\right]$.

б) Решим неравенство (2). Пусть $\dfrac{x+3}{x-1}=a$, $\dfrac{x-3}{x+1}=b$. Неравенство примет вид $a^2+14ab-15b^2 \leqslant 0$. Разложим левую часть последнего неравенства на множители, рассмотрев её как квадратный трёхчлен относительно a. Корнями трёхчлена будут $-15b$ и b (для того чтобы их найти, нужно использовать формулы Виета или формулу корней квадратного уравнения). Теперь неравенство можно переписать в виде $(a-b)(a+15b) \leqslant 0$. Сделав обратную замену, придём к неравенству

$$\left(\frac{x+3}{x-1}-\frac{x-3}{x+1}\right)\left(\frac{x+3}{x-1}+15\cdot\frac{x-3}{x+1}\right) \leqslant 0.$$

Приведя дроби в скобках к общим знаменателям, после упрощений получим

$$\frac{8x}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{16x^2-56x+48}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x(2x^2-7x+6)}{(x-1)^2(x+1)^2} \leqslant 0.$$

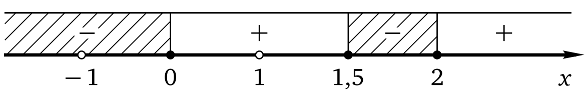
Разложив на множители квадратный трёхчлен $2x^2-7x+6$, корнями которого являются числа 1,5 и 2, придём к неравенству

$$\frac{2x(x-1{,}5)(x-2)}{(x-1)^2(x+1)^2} \leqslant 0.$$

Если $x \neq \pm 1$, то знаменатель дроби положителен. Поэтому можно перейти к системе

$$\begin{cases} x(x-1{,}5)(x-2) \leqslant 0, \\ x \neq \pm 1. \end{cases}$$

Осталось решить первое неравенство этой системы методом интервалов и исключить из множества решений ± 1:



Множество решений неравенства: $(-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup [1{,}5; 2]$.

в) Найдём все числа из множества $[-2; 0) \cup \left(0; \dfrac{5}{3}\right]$, не принадлежащие множеству $(-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup [1{,}5; 2]$. Только одно число из промежутка $[-2; 0)$ не принадлежит множеству решений неравенства (2): этим числом является -1. Искомыми решениями из промежутка $\left(0; \dfrac{5}{3}\right]$ являются все числа множества $(0; 1{,}5)$.

Ответ: а) $[-2; 0) \cup \left(0; \dfrac{5}{3}\right]$; б) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup [1{,}5; 2]$; в) $\{-1\} \cup (0; 1{,}5)$.

Метод знакотождественных множителей

Решение дробно-рациональных неравенств методом знакотождественных множителей (см. § 1.6) имеет ограниченное применение, так как пары этих множителей остаются теми же, что и для целых неравенств: разность (сумму) одинаковых нечётных степеней двух выражений можно заменять разностью (суммой) этих выражений; разность одинаковых чётных степеней двух выражений можно заменять разностью квадратов этих выражений.

Пример 9. Решите неравенство

$$\frac{(2x+1)^{10}+(5x+4)^5}{(4x+1)^8-(3x+4)^8} \leqslant 0.$$

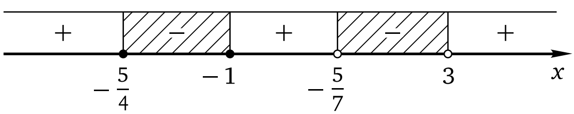
Решение. Числитель равен сумме пятых степеней выражений $(2x+1)^2$ и $5x+4$, поэтому его можно заменить суммой этих выражений. Знаменатель равен разности восьмых степеней выражений $4x+1$ и $3x+4$, поэтому его можно заменить разностью квадратов этих выражений. Получим неравенство

$$\frac{(2x+1)^2+5x+4}{(4x+1)^2-(3x+4)^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+9x+5}{(4x+1-3x-4)(4x+1+3x+4)} \leqslant 0.$$

Корнями квадратного трёхчлена в числителе левой части последнего неравенства являются числа $-\frac{5}{4}$ и -1. Следовательно, это неравенство можно переписать в виде

$$\frac{4\left(x+\frac{5}{4}\right)(x+1)}{(x-3)(7x+5)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{5}{4}\right)(x+1)}{(x-3)\left(x+\frac{5}{7}\right)} \leqslant 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений неравенства: $\left[-\frac{5}{4}; -1\right] \cup \left(-\frac{5}{7}; 3\right)$.

Ответ: $\left[-\frac{5}{4}; -1\right] \cup \left(-\frac{5}{7}; 3\right)$.

Применение свойств функций

Перейдём теперь к неравенствам, для решения которых стандартные методы оказываются малоэффективными либо приводят к значительным алгебраическим трудностям. Решение таких неравенств обычно основано на применении свойств функций, прежде всего ограниченности и монотонности (см. § 1.5). Поскольку из всех дробно-рациональных функций в школьном курсе обычно изучается только дробно-линейная функция (да и то, как правило, в самом простом варианте — в виде функции $y=\frac{k}{x}$), бóльшая часть задач здесь оказывается связанной с ограниченностью квадратного трёхчлена и монотонностью степенной функции.

Пример 10. Решите неравенство

$$\frac{9x^2-12x+6}{9x^2-12x+5}+\frac{9x^2-12x+8}{9x^2-12x+6}+\frac{9x^2-12x+10}{9x^2-12x+7}\geqslant 6.$$

Решение. Ясно, что можно сразу ввести новую переменную, положив её равной, например, знаменателю первой дроби в левой части неравенства. Но, похоже, это будет только паллиативом: после приведения неравенства к виду $\frac{f(x)}{g(x)}\vee 0$ в числителе получим многочлен степени выше второй. Да и преобразования, которые предстоит выполнить, не придают бодрости духу. Попробуем пойти по уже знакомому пути, вычтя из каждой дроби 1 либо выделив целые части:

$$\frac{9x^2-12x+6}{9x^2-12x+5}=1+\frac{1}{9x^2-12x+5},$$
$$\frac{9x^2-12x+8}{9x^2-12x+6}=1+\frac{2}{9x^2-12x+6},$$
$$\frac{9x^2-12x+10}{9x^2-12x+7}=1+\frac{3}{9x^2-12x+7}.$$

В любом случае придём к неравенству

$$\frac{1}{9x^2-12x+5}+\frac{2}{9x^2-12x+6}+\frac{3}{9x^2-12x+7}\geqslant 3.$$

Выделим в знаменателях дробей полные квадраты:

$$\frac{1}{(3x-2)^2+1}+\frac{2}{(3x-2)^2+2}+\frac{3}{(3x-2)^2+3}\geqslant 3.$$

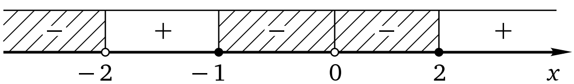
Теперь понятно, что знаменатель первой дроби не меньше 1, знаменатель второй дроби не меньше 2, знаменатель третьей дроби не меньше 3. Поэтому каждая из дробей не больше 1, а их сумма не больше 3. Следовательно, неравенство выполняется только в случае, если сумма дробей равна 3, т. е. каждая из них равна 1, что возможно лишь при условии $3x-2=0$, откуда $x=\frac{2}{3}$.

Ответ: $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Пример 11. Решите систему неравенств

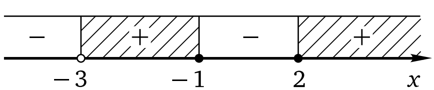
$$\begin{cases} \dfrac{5}{(x+2)^5}+\dfrac{3}{(x+2)^3}+\dfrac{1}{x+2}\leqslant \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^6}+\dfrac{5}{x^{10}},\\ \dfrac{(x^5+x+2)(x^3+2x-10)}{x^3+3x+36}\geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Функция $y(t)=5t^5+3t^3+t$ монотонно возрастает на всей числовой прямой как сумма возрастающих функций. Поэтому неравенство $y(t_1)\leqslant y(t_2)$ выполняется в том и только том случае, если $t_1\leqslant t_2$. В нашем случае $t_1=\dfrac{1}{x+2}$, $t_2=\dfrac{1}{x^2}$. Таким образом, первое неравенство системы равносильно неравенству $\dfrac{1}{x+2}\leqslant\dfrac{1}{x^2}$, откуда $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2}\leqslant 0$. Приведя дроби к общему знаменателю, получим $\dfrac{x^2-x-2}{x^2(x+2)}\leqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена в числителе левой части последнего неравенства являются числа -1 и 2. Поэтому неравенство можно переписать в виде $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2(x+2)}\leqslant 0$. Применим метод интервалов:



Множество решений первого неравенства данной системы имеет вид $(-\infty;-2)\cup[-1;0)\cup(0;2]$.

Решим второе неравенство данной системы. Функции $f(x)=x^5+x+2$, $g(x)=x^3+2x-10$ и $h(x)=x^3+3x+36$ монотонно возрастают каждая на всей числовой прямой (как суммы возрастающих функций). Заметим, что $f(-1)=0$, $g(2)=0$, $h(-3)=0$. Поэтому выражения x^5+x+2 и $x+1$, $x^3+2x-10$ и $x-2$, $x^3+3x+36$ и $x+3$ являются знакотождественными (см. утверждение 2 из § 1.6). Значит, второе неравенство системы равносильно неравенству $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x+3}\geqslant 0$. Применим метод интервалов:



Множество решений второго неравенства данной системы: $(-3;-1]\cup[2;+\infty)$.

Множество решений данной системы: $(-3;-2)\cup\{-1;2\}$.

Ответ: $(-3;-2)\cup\{-1;2\}$.

Упражнения к § 3.2

Решите неравенство.

1. а) $\dfrac{3}{x^2+5} \geqslant \dfrac{2x}{x^2+5}$; **б)** $\dfrac{2}{x^2+4} \leqslant \dfrac{3x}{x^2+4}$.

2. а) $\dfrac{4x^2}{4x+3} < -\dfrac{7}{4x+3}$; **б)** $\dfrac{5x^2}{5x-4} > -\dfrac{9}{5x-4}$.

3. а) $\dfrac{2}{5x-4} \leqslant \dfrac{3}{5x-4}$; **б)** $\dfrac{4}{3x+4} \geqslant \dfrac{5}{3x+4}$.

4. а) $\dfrac{5}{3x-2} < \dfrac{4}{2-3x}$; **б)** $\dfrac{2}{4x-3} > \dfrac{3}{3-4x}$.

5. а) $\dfrac{6}{x(x-3)} < \dfrac{5}{x(3-x)}$; **б)** $\dfrac{5}{x(x-2)} > \dfrac{4}{x(2-x)}$.

6. а) $x^2 \geqslant \dfrac{16x+64}{x+4}$; **б)** $x^2 \leqslant \dfrac{9x-27}{x-3}$.

7. а) $\dfrac{2}{x-3} \leqslant 1$; **б)** $\dfrac{3}{x-4} \leqslant 1$.

8. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

а) $\dfrac{(x-14)(x-15)(x-17)}{(x-15)(x-17)} > 0$; **б)** $\dfrac{(x+19)(x+18)(x+16)}{(x+18)(x+16)} > 0$.

Решите неравенство.

9. а) $x-4 < \dfrac{9}{x-4}$; **б)** $x-9 > \dfrac{4}{x-9}$.

10. а) $\dfrac{(x-11)^2}{x-10} \leqslant \dfrac{(x-11)^2}{x-12}$; **б)** $\dfrac{(x-14)^2}{x-13} \leqslant \dfrac{(x-14)^2}{x-15}$.

11. а) $\dfrac{2x^2}{3x+7} \leqslant 0$; **б)** $\dfrac{3x^2}{2x+5} \leqslant 0$.

12. а) $\dfrac{(x+4)^2}{x^2-9} \leqslant 0$; **б)** $\dfrac{(x+7)^2}{x^2-36} \leqslant 0$.

13. а) $\dfrac{16-x^2}{(x-3)^2} \geqslant 0$; **б)** $\dfrac{25-x^2}{(x-4)^2} \geqslant 0$.

14. а) $\dfrac{3x-2}{4x^2+9} \leqslant \dfrac{3x-2}{4x^2+5}$; **б)** $\dfrac{4x-3}{3x^2+8} \geqslant \dfrac{4x-3}{3x^2+5}$.

15. а) $\dfrac{4}{x^2-4x} < \dfrac{1}{x-4}$; **б)** $\dfrac{6}{x^2-6x} < \dfrac{1}{x-6}$.

16. а) $\dfrac{1}{2-x} < \dfrac{x^2-5}{x-2}$; **б)** $\dfrac{2}{3-x} < \dfrac{x^2-11}{x-3}$.

17. а) $\dfrac{x^3-3x^2-10x}{x^2-3x-10} \geqslant 0$; **б)** $\dfrac{x^3-4x^2-12x}{x^2-4x-12} \leqslant 0$.

18. а) $\dfrac{x^3-9x^2+20x}{x-4} \leqslant 0$; **б)** $\dfrac{x^3-8x^2+15x}{x-3} \leqslant 0$.

19. а) $\dfrac{1}{x-7} > \dfrac{1}{x+8}$; **б)** $\dfrac{1}{x-8} < \dfrac{1}{x+7}$.

Решите двойное неравенство.

20. а) $\frac{1}{7} < \frac{1}{3-2x} < \frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{11} < \frac{1}{2-3x} < \frac{1}{8}$.

21. а) $\frac{4}{x-4} - \frac{6}{x+2} < \frac{4}{x-4} - \frac{5}{x+2} < \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+2}$;

б) $\frac{3}{x-3} - \frac{7}{x+4} < \frac{3}{x-3} - \frac{6}{x+4} < \frac{2}{x-3} - \frac{6}{x+4}$.

Решите систему неравенств.

22. а) $\begin{cases} \frac{15}{x-15} < 0, \\ \frac{13}{x-13} > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{17}{x+17} < 0, \\ \frac{19}{x+19} > 0. \end{cases}$

23. а) $\begin{cases} \frac{1}{x^2-x-12} < \frac{12}{x^2-x-12}, \\ 12x > 0{,}12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3}{x^2-3x-10} < \frac{10}{x^2-3x-10}, \\ 10x > 0{,}1. \end{cases}$

24. а) $\begin{cases} \frac{x}{x-7} > \frac{7}{x-7}, \\ \frac{17}{x+7} > 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{x-9} > \frac{9}{x-9}, \\ \frac{19}{x+9} > 1. \end{cases}$

25. а) $\begin{cases} \frac{2}{x-5} < 1, \\ \frac{5}{x-4} > 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3}{x-6} < 1, \\ \frac{6}{x-5} > 1. \end{cases}$

26. а) $\begin{cases} \frac{9}{x-8} > \frac{10}{x-8}, \\ \frac{10}{x+8} > \frac{9}{x+8}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{6}{x-5} > \frac{7}{x-5}, \\ \frac{7}{x+5} > \frac{6}{x+5}. \end{cases}$

27. а) $\begin{cases} \frac{x^2}{x-4} > \frac{4x}{x-4}, \\ \frac{x^2-4}{x-2} > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x^2}{x-9} > \frac{9x}{x-9}, \\ \frac{x^2-9}{x-3} > 0. \end{cases}$

28. а) $\begin{cases} \frac{x-2}{x-1} < 0, \\ \frac{5x}{2x-3} > \frac{2x}{3-2x}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x-3}{x-2} < 0, \\ \frac{7x}{2x-5} > \frac{3x}{5-2x}. \end{cases}$

29. а) $\begin{cases} \frac{(x-5)^2}{x-5} < 5, \\ \frac{(x-4)^2}{x-4} > -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{(x-7)^2}{x-7} < 7, \\ \frac{(x-6)^2}{x-6} > -7. \end{cases}$

30. а) $\begin{cases} \dfrac{13}{17x} > \dfrac{17}{13x}, \\ \dfrac{1}{x-13} < \dfrac{1}{x+17}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{15}{19x} > \dfrac{19}{15x}, \\ \dfrac{1}{x-15} < \dfrac{1}{x+19}. \end{cases}$

31. а) $\begin{cases} \dfrac{x-15}{x-5} \leqslant 0, \\ \dfrac{x-15}{x-6} \geqslant 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{x-17}{x-7} \leqslant 0, \\ \dfrac{x-17}{x-8} \geqslant 0. \end{cases}$

32. а) $\begin{cases} \dfrac{67}{x} \geqslant 1, \\ \dfrac{x-67}{x-57} \geqslant 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{89}{x} \geqslant 1, \\ \dfrac{x-89}{x-79} \geqslant 0. \end{cases}$

33. а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-4} < \dfrac{1}{x-2}, \\ \dfrac{1}{x-1} > \dfrac{1}{x-3}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{1}{x-5} < \dfrac{1}{x-3}, \\ \dfrac{1}{x-4} > \dfrac{1}{x-6}. \end{cases}$

34. а) $\begin{cases} \dfrac{(x-7)^{77}}{(x-7)^{7}} \geqslant 0, \\ \dfrac{x-77}{x+7} \leqslant 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{(x-9)^{99}}{(x-9)^{9}} \geqslant 0, \\ \dfrac{x-99}{x+9} \leqslant 0. \end{cases}$

35. а) $\begin{cases} x + \dfrac{4}{x-5} < 7 + \dfrac{4}{x-5}, \\ \dfrac{x-7}{x-4} \leqslant 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x + \dfrac{5}{x-6} < 8 + \dfrac{5}{x-6}, \\ \dfrac{x-8}{x-5} \leqslant 0. \end{cases}$

36. а) $\begin{cases} \dfrac{13x^3 - 7x^2 + 13x}{x-12} \leqslant 0, \\ \dfrac{x}{x-6} \geqslant 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{11x^3 - 6x^2 + 11x}{x-10} \leqslant 0, \\ \dfrac{x}{x-8} \geqslant 0. \end{cases}$

37. а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+11} < \dfrac{1}{x^2+9}, \\ \dfrac{1}{x+11} < \dfrac{1}{x+9}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+13} < \dfrac{1}{x^2+7}, \\ \dfrac{1}{x+13} < \dfrac{1}{x+7}. \end{cases}$

38. а) $\begin{cases} x < \dfrac{16}{x}, \\ x > \dfrac{121}{x}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x < \dfrac{36}{x}, \\ x > \dfrac{144}{x}. \end{cases}$

39. а) $\begin{cases} 12+x-x^2 \geqslant 0, \\ x^2+\dfrac{27}{2x-7} \geqslant 9+\dfrac{27}{2x-7}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 20+x-x^2 \geqslant 0, \\ x^2+\dfrac{29}{2x-9} \geqslant 16+\dfrac{29}{2x-9}. \end{cases}$

40. а) $\begin{cases} \dfrac{5x-7}{x-5} > 5, \\ \dfrac{7x-5}{x-7} < 7; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{3x-8}{x-3} > 3, \\ \dfrac{8x-3}{x-8} < 8. \end{cases}$

41. а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} > -\dfrac{1}{21x}, \\ \dfrac{1}{x^2} > \dfrac{1}{12x}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} > -\dfrac{1}{32x}, \\ \dfrac{1}{x^2} > \dfrac{1}{23x}. \end{cases}$

42. а) $\begin{cases} \dfrac{35}{x+5} \geqslant 1, \\ \dfrac{x-30}{x^2+6x} \geqslant 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{26}{x+6} \geqslant 1, \\ \dfrac{x-20}{x^2+7x} \geqslant 0. \end{cases}$

43. а) $\begin{cases} x^2-7x+12 \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2-7x+12}{x^2+7x+12} \leqslant 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2-5x+6 \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6} \leqslant 0. \end{cases}$

44. а) $\begin{cases} \dfrac{5x^2}{6+11x} \leqslant 0, \\ 17x+x^2 \leqslant 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{4x^2}{9+13x} \leqslant 0, \\ 22x+x^2 \leqslant 0. \end{cases}$

45. а) $\begin{cases} \dfrac{17}{17x-x^2} > \dfrac{1}{17-x}, \\ x^2-19x < 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{11}{11x-x^2} > \dfrac{1}{11-x}, \\ x^2-13x < 0. \end{cases}$

46. а) $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2-3x} \leqslant \dfrac{1}{x-3}, \\ x < 4; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2-2x} \leqslant \dfrac{1}{x-2}, \\ x < 3. \end{cases}$

47. а) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} < \dfrac{3}{x^2}, \\ x^2 \leqslant 4; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{3}{x} < \dfrac{7}{x^2}, \\ x^2 \leqslant 9. \end{cases}$

48. а) Положительным или отрицательным является число b, если

$$\frac{1}{(b+1)(b+4)(b-5)} > 0, \quad \text{а} \quad \frac{1}{(b+3)(b+4)(b-5)} < 0?$$

б) Положительным или отрицательным является число b, если

$$\frac{1}{(b+5)(b-7)(b-15)} > 0, \quad \text{а} \quad \frac{1}{(b+4)(b-7)(b-15)} < 0?$$

Решите неравенство.

49. а) $\dfrac{x^3-4x^2-25x+100}{4-x}\geqslant 0$; **б)** $\dfrac{x^3-3x^2-16x+48}{3-x}\geqslant 0$.

50. а) $\dfrac{(x^2-3x)^2}{9x^2+2}\geqslant\dfrac{(x^2-3x+4)^2}{9x^2+2}$; **б)** $\dfrac{(x^2+2x)^2}{8x^2+3}\geqslant\dfrac{(x^2+2x-6)^2}{8x^2+3}$.

51. а) $\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2+5}\leqslant\dfrac{x^2-4x+3}{3x^2+5}$; **б)** $\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+7}\leqslant\dfrac{x^2-3x+2}{4x^2+7}$.

52. а) $\dfrac{x-2}{x+7}>\dfrac{x-5}{x+4}$; **б)** $\dfrac{x-3}{x+6}<\dfrac{x-4}{x+5}$.

Решите систему неравенств.

53. а) $\begin{cases}\dfrac{x-5}{x-6}<\dfrac{x+7}{x+6},\\[2mm] \dfrac{x+4}{x+8}>\dfrac{x-7}{x-3};\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}\dfrac{x-4}{x-5}<\dfrac{x+6}{x+5},\\[2mm] \dfrac{x+3}{x+7}>\dfrac{x-6}{x-2}.\end{cases}$

54. а) $\begin{cases}\dfrac{1}{|x|-5}>\dfrac{1}{|x|+9},\\[2mm] \dfrac{5}{|x|+9}>\dfrac{4}{|x|+10};\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}\dfrac{1}{|x|-6}>\dfrac{1}{|x|+10},\\[2mm] \dfrac{6}{|x|+10}>\dfrac{5}{|x|+11}.\end{cases}$

55. а) $\begin{cases}\dfrac{5}{7x^2+6}<\dfrac{7}{6x^2+5},\\[2mm] \dfrac{5x^2-7}{x^2(121x^2-16)}<\dfrac{7}{x^2(16-121x^2)};\end{cases}$

б) $\begin{cases}\dfrac{7}{9x^2+8}<\dfrac{9}{8x^2+7},\\[2mm] \dfrac{7x^2-9}{x^2(49x^2-81)}<\dfrac{9}{x^2(81-49x^2)}.\end{cases}$

Решите неравенство.

56. а) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+3}\leqslant\dfrac{2}{x+4}$; **б)** $\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{1}{x+4}\geqslant\dfrac{2}{x+5}$.

57. а) $3\cdot\dfrac{x^2-81}{2x+15}\leqslant\dfrac{x^2-81}{x+2}$; **б)** $\dfrac{x^2-16}{2x+3}\geqslant 2\cdot\dfrac{x^2-16}{3x+10}$.

58. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}(x^2+2x-15)^2\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2x^{15}+15x-17}<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x^2+3x-18)^2\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{3x^{17}+11x-13}<0.\end{cases}$

59. Решите неравенство:

а) $\dfrac{72}{(x^2+4x-5)^2}+\dfrac{17}{x^2+4x-5}+1\geqslant 0;$

б) $\dfrac{12}{(x^2+6x+5)^2}+\dfrac{7}{x^2+6x+5}+1\geqslant 0.$

60. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}\dfrac{81}{x^4}-\dfrac{82}{x^2}+1\leqslant 0,\\ \dfrac{225}{(x^2-10x)^2}+\dfrac{34}{x^2-10x}+1\geqslant 0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\dfrac{49}{x^4}-\dfrac{50}{x^2}+1\leqslant 0,\\ \dfrac{112}{(x^2-8x)^2}+\dfrac{23}{x^2-8x}+1\geqslant 0.\end{cases}$

Решите неравенство.

61. а) $\left(\dfrac{3x-4}{x+2}\right)^2+\left(\dfrac{3x+4}{x-2}\right)^2\leqslant 2\dfrac{9x^2-16}{x^2-4};$

б) $\left(\dfrac{2x-3}{x+3}\right)^2+\left(\dfrac{2x+3}{x-3}\right)^2\leqslant 2\dfrac{4x^2-9}{x^2-9}.$

62. а) $x+\dfrac{50}{x-7}\leqslant -8;$ б) $x+\dfrac{40}{x-5}\leqslant -9.$

63. а) $x+\dfrac{30}{x-6}\leqslant -7;$ б) $x+\dfrac{40}{x-8}\leqslant -6.$

64. а) $\dfrac{x-1}{x-3}\leqslant 1+\dfrac{1}{x-2};$ б) $\dfrac{x-1}{x-4}\leqslant 1+\dfrac{1}{x-2}.$

65. а) $\dfrac{x-1}{x-5}\leqslant 1+\dfrac{2}{x-3};$ б) $\dfrac{x-1}{x-6}\leqslant 1+\dfrac{3}{x-4}.$

66. а) $\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-1}{x-4}\leqslant 2;$ б) $\dfrac{x-5}{x-3}+\dfrac{x-1}{x-5}\leqslant 2.$

67. а) $\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-1}{x-3}\leqslant 2;$ б) $\dfrac{x-7}{x-4}+\dfrac{x-1}{x-6}\leqslant 2.$

68. а) $\dfrac{x^2-2x-1}{x-2}+\dfrac{2}{x-3}\leqslant x;$ б) $\dfrac{x^2-2x-1}{x-2}+\dfrac{3}{x-4}\leqslant x.$

69. а) $\dfrac{x^2-3x-2}{x-3}+\dfrac{4}{x-5}\leqslant x;$ б) $\dfrac{x^2-4x-3}{x-4}+\dfrac{5}{x-6}\leqslant x.$

70. а) $\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}\leqslant x+\dfrac{1}{x-2};$ б) $\dfrac{x^2-4x+3}{x-4}\leqslant x+\dfrac{1}{x-2}.$

71. **а)** $\dfrac{x^2-5x+4}{x-5} \leqslant x+\dfrac{2}{x-3}$; **б)** $\dfrac{x^2-6x+5}{x-6} \leqslant x+\dfrac{3}{x-4}$.

72. **а)** $\dfrac{x^2-2x-1}{x-2}+\dfrac{x^3-3x^2+2}{x-3} \leqslant x+x^2$;

б) $\dfrac{x^2-2x-1}{x-2}-\dfrac{x^3-4x^2-3}{x-4} \leqslant x-x^2$.

73. **а)** $\dfrac{x^2-3x-2}{x-3}-\dfrac{x^3-5x^2-4}{x-5} \leqslant x-x^2$;

б) $\dfrac{x^2-4x-3}{x-4}+\dfrac{x^3-6x^2+5}{x-6} \leqslant x+x^2$.

74. **а)** $\dfrac{x^3-5x^2+3x+5}{x^2-5x} \leqslant x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-3}$;

б) $\dfrac{x^3-6x^2+6x-6}{x^2-6x} \leqslant x+\dfrac{3}{x-4}+\dfrac{1}{x}$.

75. **а)** $\dfrac{x^2+x-1}{x}+\dfrac{7x^2-7x+2}{x-1} \leqslant 8x+1$;

б) $\dfrac{x^2+x-4}{x-1}+\dfrac{6x^2-24x+5}{x-4} \leqslant 7x+2$.

76. **а)** $\dfrac{x^2-2x-1}{x-1}+\dfrac{5x^2-15x+4}{x-3} \leqslant 6x-1$;

б) $\dfrac{x^2-2x-1}{x}+\dfrac{8x^2-16x+3}{x-2} \leqslant 9x-2$.

77. **а)** $\dfrac{x^2-6x-1}{x-6}+\dfrac{5}{x-10} \leqslant x$; **б)** $\dfrac{x^2-7x-3}{x-7}+\dfrac{7}{x-11} \leqslant x$.

78. **а)** $\dfrac{x^2-5x+3}{x-4}+\dfrac{5x-27}{x-6} \leqslant x+4$; **б)** $\dfrac{x^2-6x+2}{x-5}+\dfrac{4x-29}{x-9} \leqslant x+3$.

79. **а)** $\dfrac{x^2-7x+5}{x-6}+\dfrac{2x-15}{x-10} \leqslant x+1$; **б)** $\dfrac{x^2-8x+4}{x-7}+\dfrac{3x-26}{x-11} \leqslant x+2$.

80. **а)** $\dfrac{x^2-3x-5}{x-4}+\dfrac{x^2-6x+3}{x-6} \leqslant 2x+1$;

б) $\dfrac{x^2-4x-8}{x-5}+\dfrac{x^2-9x+7}{x-9} \leqslant 2x+1$.

81. **а)** $\dfrac{x^2-5x-7}{x-6}+\dfrac{x^2-10x+5}{x-10} \leqslant 2x+1$;

б) $\dfrac{x^2-6x-10}{x-7}+\dfrac{x^2-11x+7}{x-11} \leqslant 2x+1$.

82. **а)** $x^3+7x^2+\dfrac{30x^2+x-6}{x-6} \leqslant 1$; **б)** $x^3+6x^2+\dfrac{40x^2+x-8}{x-8} \leqslant 1$.

83. **а)** $\dfrac{12x+21}{x-6}+\dfrac{62}{x^2-7x+6}+\dfrac{8}{x-1} \leqslant 0$;

б) $\dfrac{12x+9}{x-7}+\dfrac{62}{x^2-9x+14}+\dfrac{8}{x-2} \leqslant 0$.

84. а) $\dfrac{12x+45}{x-4}+\dfrac{62}{x^2-3x-4}+\dfrac{8}{x+1}\leqslant 0$;

б) $\dfrac{12x-15}{x-9}+\dfrac{62}{x^2-12x+27}+\dfrac{8}{x-3}\leqslant 0$.

85. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-11}{x^2-2x-15}\leqslant\dfrac{x+4}{x+3}+\dfrac{1}{x-3},\\ \dfrac{x^2-4x+2}{x-3}+\dfrac{x^3-6x^2+9x-2}{x-4}\geqslant x^2-x;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-14}{x^2-2x-24}\leqslant\dfrac{x+5}{x+4}+\dfrac{2}{x-4},\\ \dfrac{x^2-5x+2}{x-4}-\dfrac{x^3-8x^2+13x-10}{x-6}\geqslant 3x-2-x^2.\end{cases}$

86. Решите неравенство:

а) $\dfrac{3}{x^2+8x+17}+\dfrac{4}{x^2+8x+18}\geqslant 5$;

б) $\dfrac{2}{x^2+10x+27}+\dfrac{5}{x^2+10x+26}\geqslant 6$.

87. Найдите все пары $(x;\,y)$ чисел x и y, для которых:

а) $x^2+4x+6\leqslant\dfrac{2}{y^2-6y+10}$; б) $x^2-6x+11\leqslant\dfrac{4}{y^2+4y+6}$.

88. Найдите все пары $(x;\,y)$ целых чисел x и y, для которых:

а) $\dfrac{1}{9(x-7)^2+7(y-9)^2}\geqslant\dfrac{1}{8}$; б) $\dfrac{1}{7(x-5)^2+5(y-7)^2}\geqslant\dfrac{1}{6}$.

89. Решите двойное неравенство:

а) $x-2\leqslant\dfrac{x^3-8x^2+12x}{x-6}\leqslant 6x$; б) $x-3\leqslant\dfrac{x^3-7x^2+12x}{x-4}\leqslant 4x$.

90. Найдите все пары $(x;\,y)$ целых чисел x и y, являющиеся решениями системы:

а) $\begin{cases}\dfrac{1}{5(x-2)^2+6(y-4)^2}\geqslant\dfrac{1}{7},\\ \dfrac{1}{8(x-3)^2+7(y-5)^2}\geqslant\dfrac{1}{9};\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{1}{4(x-1)^2+5(y-3)^2}\geqslant\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{1}{7(x-2)^2+6(y-4)^2}\geqslant\dfrac{1}{8}.\end{cases}$

91. а) Наименьшее из чисел m и n обозначается $\min(m;\,n)$. Если числа m и n равны, то $\min(m;\,n)=m=n$. Найдите все значения x, при каждом из которых $\min\left(\dfrac{1}{9x-5};\,\dfrac{1}{9-5x}\right)<0$.

б) Наименьшее из чисел m и n обозначается $\min(m;\,n)$. Если числа m и n равны, то $\min(m;\,n)=m=n$. Найдите все значения x, при каждом из которых $\min\left(\dfrac{1}{7x-4};\,\dfrac{1}{7-4x}\right)<0$.

92. а) Наибольшее из чисел m и n обозначается $\max(m;n)$. Если числа m и n равны, то $\max(m;n)=m=n$. Найдите все значения x, при каждом из которых $\max\left(\frac{1}{6x-13};\frac{1}{6-13x}\right)>0$.

б) Наибольшее из чисел m и n обозначается $\max(m;n)$. Если числа m и n равны, то $\max(m;n)=m=n$. Найдите все значения x, при каждом из которых $\max\left(\frac{1}{5x-12};\frac{1}{5-12x}\right)>0$.

93. а) Наибольшее из чисел m и n обозначается $\max(m;n)$. Если числа m и n равны, то $\max(m;n)=m=n$. Найдите все значения x, при каждом из которых $\max\left(\frac{1}{x^2-8x};\frac{1}{x^2-25}\right)<0$.

б) Наименьшее из чисел m и n обозначается $\min(m;n)$. Если числа m и n равны, то $\min(m;n)=m=n$. Найдите все значения x, при каждом из которых $\min\left(\frac{1}{x^2-36};\frac{1}{x^2+8x}\right)>0$.

94. а) Сравните число m с числом -9, если

$$\frac{1}{(m-7)(m+8)(m-1)}<0,$$
$$\frac{1}{(m-7)(m+8)(m-2)}<0,$$
$$\frac{1}{(m-2)(m+9)(m-1)}<0.$$

б) Сравните число m с числом 8, если

$$\frac{1}{(m+6)(m-5)(m+2)}>0,$$
$$\frac{1}{(m+6)(m-5)(m+3)}>0,$$
$$\frac{1}{(m+3)(m-8)(m+2)}>0.$$

95. а) Сравните дроби $\frac{1}{k}$ и $\frac{1}{m}$, если

$$\frac{k-m}{k}>0,\quad \frac{k-m}{m}<0,\quad \frac{k-m}{km}>0.$$

б) Сравните дроби $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$, если

$$\frac{x+y}{x}<0,\quad \frac{x+y}{y}>0,\quad \frac{x+y}{xy}<0.$$

96. а) Сравните дроби $\frac{l+1}{l-5}$ и $\frac{l-1}{l+5}$, если

$$\frac{l+1}{l-5}\cdot\frac{l+3}{l-3}<0,\quad \frac{l-1}{l+5}\cdot\frac{l+3}{l-3}>0,\quad \frac{l+1}{l-5}\cdot\frac{l-1}{l+5}\cdot\frac{l+3}{l-3}<0.$$

б) Сравните дроби $\frac{l+2}{l-8}$ и $\frac{l-2}{l+8}$, если

$$\frac{l+2}{l-8}\cdot\frac{l+5}{l-5}<0,\quad \frac{l-2}{l+8}\cdot\frac{l+5}{l-5}>0,\quad \frac{l+2}{l-8}\cdot\frac{l-2}{l+8}\cdot\frac{l+5}{l-5}<0.$$

Диагностическая работа 4

Вариант 1

1. Решите неравенство $\frac{2}{x^2-2x-24}<\frac{3}{x^2-2x-24}$.

2. Решите неравенство $\frac{(2x-17)^5(6-5x)^6(x-9)^2}{x^2-81}\leqslant 0$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases}\frac{1}{x-4}<\frac{1}{x+8},\\ \frac{1}{x+6}>\frac{1}{x-5}.\end{cases}$

4. Решите двойное неравенство $\frac{1}{5}<\frac{1}{3x^2-2x}<1$.

5. Решите систему неравенств $\begin{cases}\frac{(x-5)^2}{16-x^2}\geqslant 0,\\ 5x-x^2\geqslant 0.\end{cases}$

6. Решите неравенство $\frac{9}{(4x+5)^2}-\frac{18}{4x+5}+8<0$.

7. Решите двойное неравенство $\frac{4}{x}-3<\frac{1}{x^2}<\frac{5}{x}+6$.

8. Решите неравенство $\frac{x^2-4x-1}{x-4}+\frac{3}{x-6}\leqslant x$.

9. Решите неравенство $x^3+8x^2+\frac{50x^2+x-7}{x-7}\leqslant 1$.

10. Решите неравенство $\frac{x^3-3x^2+3x-3}{x^2-3x}\leqslant x+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}$.

11. Наименьшее из чисел m и n обозначается $\min(m;n)$. Если числа m и n равны, то $\min(m;n)=m=n$. Найдите все значения x, при каждом из которых

$$\min\left(\frac{1}{x^2-49};\frac{1}{x^2+9x}\right)>0.$$

12. Найдите все пары $(x;\,y)$ целых чисел x и y, для которых

$$\frac{1}{2(x+5)^2}+\frac{2}{5(y-3)^2}\geqslant 0{,}9.$$

Вариант 2

1. Решите неравенство $\dfrac{3}{x^2-3x-18} > \dfrac{4}{x^2-3x-18}$.

2. Решите неравенство $\dfrac{(2x-19)^3(7-5x)^6(x-10)^2}{x^2-100} \leqslant 0$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{1}{x-6} < \dfrac{1}{x+9}, \\ \dfrac{1}{x+7} > \dfrac{1}{x-7}. \end{cases}$

4. Решите двойное неравенство $\dfrac{1}{7} < \dfrac{1}{4x^2-3x} < 1$.

5. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{(x-6)^2}{25-x^2} \geqslant 0, \\ 6x-x^2 \geqslant 0. \end{cases}$

6. Решите неравенство $\dfrac{4}{(3x+4)^2} - \dfrac{16}{3x+4} + 15 > 0$.

7. Решите двойное неравенство $\dfrac{3}{x} - 2 < \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{6}{x} + 7$.

8. Решите неравенство $\dfrac{x^2-5x-3}{x-5} + \dfrac{7}{x-9} \leqslant x$.

9. Решите неравенство $x^3 + 9x^2 + \dfrac{40x^2+x-5}{x-5} \leqslant 1$.

10. Решите неравенство $\dfrac{x^3-4x^2+2x+4}{x^2-4x} \leqslant x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2}$.

11. Наибольшее из чисел m и n обозначается $\max(m; n)$. Если числа m и n равны, то $\max(m; n) = m = n$. Найдите все значения x, при каждом из которых

$$\max\left(\frac{1}{x^2-6x}; \frac{1}{x^2-16}\right) < 0.$$

12. Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y, для которых

$$\frac{3}{5(x+2)^2} + \frac{1}{2(y-4)^2} \geqslant 1{,}1.$$

Глава 4. Неравенства, содержащие переменную под знаком абсолютной величины (модуля)

Неравенства, содержащие переменную под знаком абсолютной величины (модуля), обычно называют проще: неравенства с модулем; далее для краткости мы будем использовать это название. Выражение (в этой главе им может быть многочлен или алгебраическая дробь), содержащееся под знаком модуля, будем — также для краткости — называть «подмодульным», опуская в дальнейшем кавычки. Неравенства с модулем относят к сравнительно трудным, хотя значительная часть таких неравенств с успехом решается с помощью стандартных равносильных преобразований или «раскрытия модуля» в соответствии с его определением. Приведём сначала основные факты, связанные с модулем:

1) модулем (абсолютной величиной) числа a называется само число a, если оно неотрицательно, и число $-a$, если число a отрицательно (определение модуля); модуль числа a обозначается $|a|$; таким образом, $|a|=a$, если $a\geqslant 0$; $|a|=-a$, если $a<0$;

2) $|a|\geqslant 0$, причём $|a|=0 \Leftrightarrow a=0$;

3) значение $|a-b|$ равно расстоянию между точками a и b числовой прямой; так, $|a|=|a-0|$ — расстояние между точками a и 0 числовой прямой, $|a+b|=|a-(-b)|$ — расстояние между точками a и $(-b)$ числовой прямой (геометрический смысл модуля);

4) $|-a|=|a|$;

5) $\sqrt{a^2}=|a|$;

6) $|a|\geqslant a$, причём $|a|=a \Leftrightarrow a\geqslant 0$; $|a|>a \Leftrightarrow a<0$;
$|a|\geqslant -a$, причём $|a|=-a \Leftrightarrow a\leqslant 0$; $|a|>-a \Leftrightarrow a>0$;

7) $|ab|=|a||b|$; $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$;

8) $|a|^2=a^2$;

9) $|a|=|b| \Leftrightarrow a^2=b^2 \Leftrightarrow a=\pm b$;

10) $|a|=b \Leftrightarrow \begin{cases} b\geqslant 0, \\ a^2=b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b\geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} a=-b, \\ a=b; \end{array}\right. \end{array}\right.$

11) $|a|<|b| \Leftrightarrow a^2<b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b)<0$;

12) $|a|<b \Leftrightarrow \begin{cases} a<b, \\ a>-b; \end{cases}$

13) $|a|>b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>b, \\ a<-b; \end{array}\right.$

14) $|a|+|b| \geqslant |a+b|$, причём

$$|a|+|b| = |a+b| \Leftrightarrow ab \geqslant 0; \qquad |a|+|b| > |a+b| \Leftrightarrow ab < 0;$$

$|a|+|b| \geqslant |a-b|$, причём

$$|a|+|b| = |a-b| \Leftrightarrow ab \leqslant 0; \qquad |a|+|b| > |a-b| \Leftrightarrow ab > 0.$$

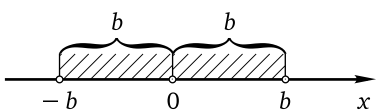
Свойства 2–8 легко следуют из определения модуля. Свойства 9–11 — следствия неотрицательности модуля и общего утверждения о том, что возведение в квадрат обеих частей уравнения или неравенства при условии их неотрицательности является равносильным преобразованием (§ 1.1). Свойство 14 (его часто называют неравенством треугольника) тоже почти очевидно: если числа a и b либо оба отрицательны, либо оба положительны, либо хотя бы одно из них равно нулю (неравенство $ab \geqslant 0$ означает именно это), то $|a|+|b|=|a+b|$. Если числа a и b разных знаков (т. е. $ab<0$), то $|a|+|b|>|a+b|$. Обратное утверждение, разумеется, тоже верно; докажите его самостоятельно, например, от противного. Заметим, что, заменив b на $-b$ и учитывая, что $|-b|=|b|$ (свойство 4), получим другой вид неравенства треугольника:

$$|a|+|b| \geqslant |a-b|,$$

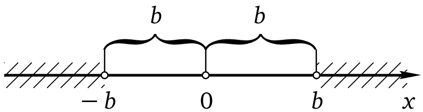
причём

$$|a|+|b| = |a-b| \Leftrightarrow ab \leqslant 0; \quad |a|+|b| > |a-b| \Leftrightarrow ab > 0.$$

Равносильные переходы 12, 13 можно доказать, воспользовавшись, например, геометрическим смыслом модуля. Предположим сначала, что $b>0$. Решить неравенство $|a|<b$ — значит найти все точки числовой прямой, расстояние от каждой из которых до точки 0 меньше b. Отложив на числовой оси в обе стороны от точки 0 отрезки, равные b, получим точки $-b$ и b, расстояние от каждой из которых до точки 0 равно b:



Ясно, что все точки a, расстояние от каждой из которых до точки 0 меньше b, принадлежат интервалу $(-b; b)$, т. е. для них имеет место система неравенств $\begin{cases} a<b, \\ a>-b. \end{cases}$ Остаётся заметить, что в случае, когда $b \leqslant 0$, ни эта система, ни неравенство $|a|<b$ не имеют решений. Тем самым, при любом значении b неравенство $|a|<b$ и система неравенств $\begin{cases} a<b, \\ a>-b \end{cases}$ имеют одно и то же множество решений, т. е. являются равносильными. Свойство 13 доказывается аналогично: при $b>0$ искомые точки a, т. е. точки, расстояние от каждой из которых до точки 0 больше b, принадлежат лучу $(-\infty; b)$ или лучу $(b; +\infty)$:



Таким образом, для этих точек имеет место совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} a>b, \\ a<-b. \end{array}\right.$ Если же $b \leqslant 0$, то и этой совокупности, и неравенству $|a|>b$ удовлетворяют все точки a числовой оси. Тем самым, при любом значении b неравенство $|a|>b$ и совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} a>b, \\ a<-b \end{array}\right.$ имеют одно и то же множество решений, а значит, являются равносильными. Заметим ещё, что свойства 11–13 остаются в силе и для нестрогих неравенств:

$$|a| \leqslant |b| \iff a^2 \leqslant b^2 \iff (a-b)(a+b) \leqslant 0;$$

$$|a| \leqslant b \iff \begin{cases} a \leqslant b, \\ a \geqslant -b; \end{cases}$$

$$|a| \geqslant b \iff \left[\begin{array}{l} a \geqslant b, \\ a \leqslant -b. \end{array}\right.$$

Разумеется, приведённые выше свойства могут быть обоснованы и другими способами. Эти свойства позволяют решать самые разные по уровню сложности неравенства с модулем. Основными методами решения таких неравенств служат равносильные преобразования (свойства 9–14, а также метод знакотождественных множителей) и «раскрытие» модуля по определению. Последний метод часто называют методом интервалов; для того чтобы не путать его с одним из основных общих методов решения неравенств, имеющим то же название, в этой книге мы будем называть его методом промежутков. Реже используют метод интервалов, геометрический смысл модуля (свойство 3), введение новой переменной, свойства монотонности и ограниченности функций, заданных формулой, содержащей переменную под знаком модуля.

§ 4.1. Простейшие неравенства с модулем

Говорить о простейших неравенствах с модулем можно только весьма условно: ведь даже самые несложные из них сводятся к решению системы или совокупности двух неравенств. Условимся под простейшими неравенствами с модулем понимать неравенства вида $|f(x)| \vee b$, где b — действительное число, $f(x)$ — многочлен первой или второй степени. Эти неравенства можно решать на основании равносильных переходов 12 и 13:

$$|f(x)| < b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < b, \\ f(x) > -b, \end{cases} \qquad |f(x)| > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > b, \\ f(x) < -b. \end{array}\right.$$

В случае нестрогих неравенств нужно в соответствующей системе или совокупности заменить неравенства на нестрогие. Другим способом решения простейших неравенств с модулем (при $b > 0$) является возведение в квадрат обеих частей неравенства с последующим применением формулы разности квадратов (знак неравенства не меняется):

$$|f(x)| \vee b \Leftrightarrow (f(x))^2 \vee b^2 \Leftrightarrow (f(x) - b)(f(x) + b) \vee 0.$$

При $b \leqslant 0$ тот или иной вывод о множестве решений неравенства делается в зависимости от знака неравенства с учётом неотрицательности модуля. Если $b < 0$, то неравенства $|f(x)| < b$ и $|f(x)| \leqslant b$ решений не имеют, а неравенства $|f(x)| > b$ и $|f(x)| \geqslant b$ справедливы при любом значении переменной. Если $b = 0$, то неравенство $|f(x)| < 0$ решений не имеет, неравенство $|f(x)| \leqslant 0$ равносильно уравнению $f(x) = 0$, неравенство $|f(x)| > 0$ равносильно неравенству $f(x) \neq 0$, а неравенство $|f(x)| \geqslant 0$ справедливо при любом значении переменной.

Пример 1. Решите неравенство $|3x + 4| \geqslant 5$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 3x + 4 \geqslant 5, \\ 3x + 4 \leqslant -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant \frac{1}{3}, \\ x \leqslant -3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -3] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Пример 2. Решите неравенство $|x^2-9x+14|\leqslant 6$.

Р е ш е н и е. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-9x+14\leqslant 6,\\ x^2-9x+14\geqslant -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9x+8\leqslant 0,\\ x^2-9x+20\geqslant 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы. Корнями квадратного трёхчлена в левой части этого неравенства являются числа 1 и 8, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $[1; 8]$.

Решим второе неравенство системы. Корнями квадратного трёхчлена в левой части неравенства являются числа 4 и 5, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $(-\infty; 4]\cup[5; +\infty)$.

Пересечением множеств решений неравенств системы является множество $[1; 4]\cup[5; 8]$.

Ответ: $[1; 4]\cup[5; 8]$.

Пример 3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} |2x^2-4x-11|\geqslant 5,\\ |x^2-5|\leqslant 4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Решим первое неравенство данной системы. Обе части неравенства неотрицательны при любом значении переменной, поэтому возведение их в квадрат будет равносильным преобразованием. Возведём обе части неравенства в квадрат:

$$(2x^2-4x-11)^2\geqslant 5^2 \Leftrightarrow (2x^2-4x-11)^2-5^2\geqslant 0.$$

Применив формулу разности квадратов, получим неравенство

$$(2x^2-4x-16)(2x^2-4x-6)\geqslant 0.$$

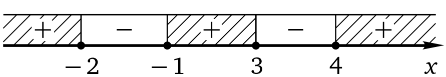
После вынесения общих множителей и деления обеих частей неравенства на 4 придём к неравенству

$$(x^2-2x-8)(x^2-2x-3)\geqslant 0.$$

Корнями квадратного трёхчлена x^2-2x-8 являются числа -2 и 4, корнями квадратного трёхчлена x^2-2x-3 являются числа -1 и 3. Поэтому неравенство можно переписать в виде

$$(x+2)(x-4)(x+1)(x-3)\geqslant 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений неравенства: $(-\infty; -2] \cup [-1; 3] \cup [4; +\infty)$.

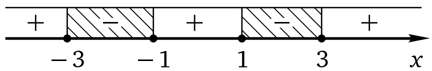
Решим второе неравенство данной системы. Возведём обе части неравенства в квадрат:

$$(x^2-5)^2 \leqslant 4^2 \iff (x^2-5)^2-4^2 \leqslant 0.$$

Воспользовавшись формулой разности квадратов, получим неравенство $(x^2-1)(x^2-9) \geqslant 0$, и, далее,

$$(x+1)(x-1)(x+3)(x-3) \leqslant 0.$$

Применим метод интервалов:



Множество решений неравенства: $[-3; -1] \cup [1; 3]$.

Найдём множество решений данной системы неравенств как пересечение числовых множеств $(-\infty; -2] \cup [-1; 3] \cup [4; +\infty)$ и $[-3; -1] \cup \cup [1; 3]$. Получим множество $[-3; -2] \cup \{-1\} \cup [1; 3]$.

Ответ: $[-3; -2] \cup \{-1\} \cup [1; 3]$.

Упражнения к § 4.1

Решите неравенство (двойное неравенство, систему неравенств).

1. а) $|4x+3| \geqslant 0$; **б)** $|7-6x| \geqslant 0$.

2. а) $|2x-5| > 0$; **б)** $|5x+2| > 0$.

3. а) $|10x+7| \leqslant 0$; **б)** $|10x-9| \leqslant 0$.

4. а) $|1234x+5678| < 0$; **б)** $|8765x-4321| < 0$.

5. а) $|4x+7| \geqslant 9$; **б)** $|5x-9| \geqslant 11$.

6. а) $|5x-11| \leqslant 6$; **б)** $|5x+17| \leqslant 7$.

7. а) $|7x-6| > 5$; **б)** $|9x-8| > 7$.

8. а) $|2x+19| < 9$; **б)** $|2x+17| < 7$.

9. а) $|2x^2-13x-14| \geqslant 0$; **б)** $|2x^2-9x-13| \geqslant 0$.

10. а) $|2x^2-11x+14| > 0$; **б)** $|2x^2-11x+12| > 0$.

11. а) $|4x^2+8x-5| \leqslant 0$; **б)** $|4x^2+5x-6| \leqslant 0$.

12. а) $|7x^2-78x-789| < 0$; **б)** $|6x^2-67x-678| < 0$.

13. а) $|x^2-10| < 6$; **б)** $|x^2-13| < 12$.

14. а) $|2x^2-25| \leqslant 7$; **б)** $|2x^2-17| \leqslant 15$.

15. а) $|x^2-29| > 20$; **б)** $|x^2-37| > 12$.

16. **а)** $|2x^2-13|\geqslant 5$; **б)** $|2x^2-5|\geqslant 3$.

17. **а)** $|x^2-10x|<24$; **б)** $|x^2-5x|<6$.

18. **а)** $|2x^2-5x|\leqslant 3$; **б)** $|3x^2-5x|\leqslant 2$.

19. **а)** $|x^2-15x|>54$; **б)** $|x^2-20x|>96$.

20. **а)** $|3x^2-10x|\geqslant 8$; **б)** $|2x^2-15x|\geqslant 27$.

21. **а)** $|x^2-2x-16|<8$; **б)** $|x^2-8x+11|<4$.

22. **а)** $|2x^2+4x-39|\leqslant 9$; **б)** $|2x^2+4x-27|\leqslant 21$.

23. **а)** $|x^2-6x-28|>12$; **б)** $|x^2-4x-25|>20$.

24. **а)** $|9x^2-12x-1|\geqslant 4$; **б)** $|4x^2-12x-1|\geqslant 6$.

25. **а)** $2\leqslant|5x+4|\leqslant 10$; **б)** $4\leqslant|2x-7|\leqslant 12$.

26. **а)** $8\leqslant|x^2-2x-7|\leqslant 17$; **б)** $18\leqslant|x^2+2x-17|\leqslant 31$.

27. **а)** $\begin{cases}|2x-5|\geqslant 15,\\|5x-2|\leqslant 48;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}|4x-5|\geqslant 11,\\|5x-4|\leqslant 16.\end{cases}$

28. **а)** $\begin{cases}|9x^2-5|\leqslant 4,\\|3x-2|\geqslant 1;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}|8x^2-5|\leqslant 3,\\|4x-3|\geqslant 1.\end{cases}$

29. **а)** $\begin{cases}|x^2-100|\leqslant 96,\\|x^2-13x|\leqslant 30;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}|x^2-25|\leqslant 24,\\|x^2-5x|\leqslant 6.\end{cases}$

30. **а)** $\begin{cases}|5x^2-37x|\leqslant 42,\\|x^2-6x+4|\leqslant 4;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}|4x^2-41x|\leqslant 45,\\|x^2-8x-1|\leqslant 8.\end{cases}$

Диагностическая работа 5

Вариант 1

Решите неравенство.

1. $|4x-9|>0$.

2. $|10x-11|\leqslant 12$.

3. $|5x+4|\geqslant 3$.

4. $|2x^2+5x-18|\leqslant 0$.

5. $|x^2-50|\leqslant 14$.

6. $|3x^2-x|\geqslant 0{,}08$.

7. $|x^2-x-4|<2$.

8. $|4x^2-6x-7|\geqslant 3$.

Решите систему неравенств.

9. $\begin{cases}|x-6|\geqslant 15,\\|5x-9|\leqslant 96.\end{cases}$

10. $\begin{cases}|9x^2-20|\leqslant 16,\\|3x-4|\geqslant 2.\end{cases}$

11. $\begin{cases}|9x^2-100|\leqslant 96,\\|3x^2-13x|\leqslant 10.\end{cases}$

12. $\begin{cases}|5x^2-27x-32|\leqslant 42,\\|x^2-4x-1|\leqslant 4.\end{cases}$

Вариант 2

Решите неравенство.

1. $|5x-13|\leqslant 0.$

2. $|10x+9|\leqslant 8.$

3. $|5x+6|\geqslant 7.$

4. $|2x^2-3x-20|>0.$

5. $|x^2-34|\leqslant 30.$

6. $|2x^2-3x|\geqslant 1{,}08.$

7. $|x^2-5x+5|<1.$

8. $|5x^2-4x-5|\geqslant 4.$

Решите систему неравенств.

9. $\begin{cases}|x-4|\geqslant 11,\\|5x-11|\leqslant 64.\end{cases}$

10. $\begin{cases}|8x^2-45|\leqslant 27,\\|4x-9|\geqslant 3.\end{cases}$

11. $\begin{cases}|36x^2-25|\leqslant 24,\\|6x^2-5x|\leqslant 1.\end{cases}$

12. $\begin{cases}|2x^2-37x-39|\leqslant 90,\\|x^2-14x-19|\leqslant 32.\end{cases}$

§ 4.2. Более сложные неравенства с модулем

Перейдём к изложению методов решения более сложных неравенств с модулем.

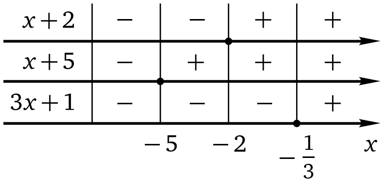
Метод промежутков

Одним из наиболее известных методов решения неравенств с модулем является метод промежутков, основанный на «раскрытии» модуля в соответствии с определением модуля. Суть метода заключается в следующем. На числовой оси отмечается ОДЗ неравенства. Затем ОДЗ разбивается на несколько промежутков точками, в которых подмодульные алгебраические выражения обращаются в нуль. На любом из этих промежутков любое из таких выражений (из школьного курса алгебры) определено и не равно нулю, следовательно, оно принимает только положительные или только отрицательные значения (какие именно, можно определить, выбрав любое значение из рассматриваемого промежутка и определив знак выражения при этом значении). Поэтому в зависимости от промежутка модуль каждого из таких выражений «раскрывается» либо со знаком «плюс», либо со знаком «минус». Определять знаки подмодульных выражений удобно с помощью одного рисунка, на котором изображены одна под другой оси с отмеченной ОДЗ неравенства и нулями для каждого из подмодульных выражений так, что получается своего рода «таблица». В «строчках» этой «таблицы» расставляют знаки подмодульных выражений, а затем «по столбцам» определяют, с каким знаком «раскрывается» модуль каждого из этих выражений на каждом из полученных промежутков. Далее на каждом промежутке находят решение полученного неравенства, уже не содержащего знаков модуля. Последний шаг — объединение найденных решений. Этот метод целесообразно применять, в основном если неравенство содержит два и более модуля, а подмодульные выражения являются многочленами первой или второй степени. В большинстве же случаев более эффективным является применение равносильных преобразований.

Пример 1. Решите неравенство

$$|x+2|-|x+5| < 1-x-2|3x+1|.$$

Р е ш е н и е. Определим промежутки знакопостоянства каждого из выражений под знаками модуля, для наглядности и удобства изобразив их на одной схеме (жирными точками отмечены нули соответствующих подмодульных выражений):



Рассмотрим четыре случая, «раскрывая» модули на каждом из четырёх полученных промежутков согласно знакам в каждом из столбцов.

Случай 1:

$$\begin{cases} x \geqslant -\dfrac{1}{3}, \\ x+2-x-5 < 1-x-6x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{1}{3}, \\ x < \dfrac{2}{7}, \end{cases}$$

и, значит, $x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{2}{7}\right)$.

Случай 2:

$$\begin{cases} -2 \leqslant x < -\dfrac{1}{3}, \\ x+2-x-5 < 1-x+6x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x < -\dfrac{1}{3}, \\ x > -\dfrac{6}{5}, \end{cases}$$

и, значит, $x \in \left(-\frac{6}{5}; -\frac{1}{3}\right)$.

Случай 3:

$$\begin{cases} -5 \leqslant x < -2, \\ -x-2-x-5 < 1-x+6x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leqslant x < -2, \\ x > -\dfrac{10}{7}; \end{cases}$$

решений нет.

Случай 4:

$$\begin{cases} x < -5, \\ -x-2+x+5 < 1-x+6x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5, \\ x > 0; \end{cases}$$

решений нет.

Осталось объединить полученные множества. Это удобно делать «снизу вверх» по тексту решения: $\left(-\frac{6}{5}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left[-\frac{1}{3}; \frac{2}{7}\right) = \left(-\frac{6}{5}; \frac{2}{7}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{6}{5}; \frac{2}{7}\right)$.

Пример 2. Решите неравенство

$$|2x^2-5x+2|+3|4-x| \geqslant |4-11x-3x^2|.$$

Решение. Сначала, применив свойство $|-a| = |a|$ (свойство 4, позволяющее менять знак подмодульного выражения), приведём все подмодульные выражения к стандартному виду. Получим неравенство

$$|2x^2-5x+2|+3|x-4| \geqslant |3x^2+11x-4|.$$

Этот шаг не является обязательным, но во многих случаях позволяет избежать ошибок, связанных с вычислением корней и определением промежутков знакопостоянства квадратного трёхчлена, старший коэффициент которого отрицателен. Найдём нули подмодульных выражений. Корнями квадратного трёхчлена $2x^2-5x+2$ являются числа $\frac{1}{2}$ и 2. Корнем многочлена $x-4$ является, очевидно, число 4. Корнями квадратного трёхчлена $3x^2+11x-4$ являются числа -4 и $\frac{1}{3}$. Теперь можно составить табличку промежутков знакопостоянства каждого из подмодульных выражений, воспользовавшись тем, что квадратный трёхчлен стандартного вида принимает отрицательные значения только в промежутке между своими корнями:

$2x^2-5x+2$	+	+	+	−	+	+
$x-4$	−	−	−	−	−	+
$3x^2+11x-4$	+	−	+	+	+	+

-4 $\quad \frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad 2$ $\quad 4$ $\quad x$

Пять нулей подмодульных выражений разбивают числовую ось на шесть промежутков. Решим данное неравенство на каждом из шести промежутков, учитывая, что в трёх столбцах расстановка знаков одинакова: это позволяет вместо трёх случаев рассмотреть один.

Случай 1:

$$\begin{cases} x \geqslant 4, \\ 2x^2 - 5x + 2 + 3x - 12 \geqslant 3x^2 + 11x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 4, \\ x^2 + 13x + 6 \leqslant 0. \end{cases}$$

Разумеется, можно формально решить квадратное неравенство последней системы, найдя корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства (это будут иррациональные числа). Но лучше просто заметить, что неравенство $x^2 + 13x + 6 \leqslant 0$ не имеет положительных решений, поскольку при положительных значениях переменной его левая часть положительна. Значит, и вся система не имеет решений.

Случай 2:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2 \leqslant x < 4, \\ \frac{1}{3} \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ x < -4, \end{array}\right. \\ 2x^2 - 5x + 2 - 3x + 12 \geqslant 3x^2 + 11x - 4. \end{cases}$$

Последнее неравенство системы приводится к виду $x^2 + 19x - 18 \leqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена $x^2 + 19x - 18$ являются числа $\frac{-19-\sqrt{433}}{2}$ и $\frac{-19+\sqrt{433}}{2}$, а множеством решений неравенства $x^2 + 19x - 18 \leqslant 0$ — отрезок $\left[-\frac{19+\sqrt{433}}{2}; \frac{-19+\sqrt{433}}{2}\right]$. Заметим, что $400 < 433 < 441$, поэтому $20 < \sqrt{433} < 21$, и, значит,

$$-20 < -\frac{19+\sqrt{433}}{2} < -19{,}5; \quad \frac{1}{2} < \frac{-19+\sqrt{433}}{2} < 1.$$

Следовательно, отрезок $\left[-\frac{19+\sqrt{433}}{2}; \frac{-19+\sqrt{433}}{2}\right]$ не имеет пересечений с промежутком $[2; 4)$ и содержит промежуток $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$, а его пересечение с промежутком $(-\infty; -4)$ — промежуток $\left[-\frac{19+\sqrt{433}}{2}; -4\right)$. Итак, в этом случае множество решений данного неравенства — объединение $\left[-\frac{19+\sqrt{433}}{2}; -4\right) \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

Случай 3:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leqslant x < 2, \\ -2x^2 + 5x - 2 - 3x + 12 \geqslant 3x^2 + 11x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leqslant x < 2, \\ 5x^2 + 9x - 14 \leqslant 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена $5x^2+9x-14$ являются числа $-\frac{14}{5}$ и 1, а множеством решений неравенства $5x^2+9x-14\leqslant 0$ — отрезок $\left[-\frac{14}{5};1\right]$. Следовательно, решение последней системы: $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Случай 4:

$$\begin{cases}-4\leqslant x<\frac{1}{3},\\ 2x^2-5x+2-3x+12\geqslant -3x^2-11x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4\leqslant x<\frac{1}{3},\\ 5x^2+3x+10\geqslant 0.\end{cases}$$

Дискриминант квадратного трёхчлена $5x^2+3x+10$ отрицателен, а старший коэффициент положителен. Поэтому неравенство $5x^2+3x+10\geqslant 0$ выполняется при любом действительном значении переменной, а множеством решений системы является промежуток $\left[-4;\frac{1}{3}\right)$.

Осталось объединить найденные множества:

$$\left[-\frac{19+\sqrt{433}}{2};-4\right)\cup\left[-4;\frac{1}{3}\right)\cup\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{2};1\right]=\left[-\frac{19+\sqrt{433}}{2};1\right].$$

Ответ: $\left[-\frac{19+\sqrt{433}}{2};1\right]$.

Равносильные преобразования

Метод равносильных преобразований, как уже отмечалось, во многих случаях оказывается эффективнее метода промежутков, поскольку позволяет, используя свойства 12 и 13 (или их модификации для нестрогих неравенств), свести неравенство с модулем к системе или совокупности двух неравенств, не содержащих знака модуля. При этом не нужно находить нули подмодульных выражений, что сокращает вычисления даже в тех случаях, когда указанные свойства приходится применять несколько раз (не говоря уже о том, что не во всех случаях возможно эти нули найти). Кстати, довольно легко подсчитать число неравенств, не содержащих знаков модуля, которые придётся решать, используя метод равносильных преобразований: освобождение от каждого знака модуля приводит к двум неравенствам, поэтому общее число неравенств равно степени двойки, показателем которой является число знаков модуля в данном неравенстве. Так, неравенство из примера 2 свелось бы к решению восьми неравенств. Следует отметить, что во многих случаях половина полученных при таком решении неравенств после их приведения к виду $f(x)\vee 0$ будет отличаться от другой половины только знаком неравенства. Поэтому решать придётся вдвое меньше неравенств: ведь определяя промежутки знакоположительности алгебраического выражения $f(x)$, мы находим и промежутки его знакоотрицательности. Например, неравенство из примера 2 потребовало бы в действительности решения четырёх квадратных неравенств вместо восьми.

Отметим ещё, что при наличии «вложенных» модулей метод промежутков приводит к огромному числу ошибок, поскольку после «раскрытия» «внутреннего» модуля приходится на каждом из полученных промежутков «раскрывать» ещё и «внешний» модуль, получая новые промежутки. С таким ветвлением не справляется подавляющее большинство школьников, выпускников и абитуриентов; для решения подобных неравенств рекомендуется использовать метод равносильных преобразований.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3. Решите неравенство $|x^2-4x-8|\leqslant x-2$.

Р е ш е н и е. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-4x-8 \leqslant x-2, \\ x^2-4x-8 \geqslant -x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x-6 \leqslant 0, \\ x^2-3x-10 \geqslant 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена x^2-5x-6 являются числа -1 и 6, старший коэффициент трёхчлена положителен. Поэтому множеством решений первого неравенства системы является отрезок $[-1; 6]$. Корнями квадратного трёхчлена $x^2-3x-10$ являются числа -2 и 5, старший коэффициент трёхчлена положителен. Поэтому множеством решений второго неравенства системы является объединение $(-\infty; -2]\cup$ $\cup[5; +\infty)$. Следовательно, множество решений системы, а значит, и данного неравенства: $[5; 6]$.

Ответ: $[5; 6]$.

В более сложных случаях, чтобы не запутаться, лучше разбивать решение неравенства на несколько этапов (шагов).

Пример 4. Решите неравенство $||x^2+3x+2|-1|\geqslant 1$.

Р е ш е н и е. 1. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} |x^2+3x+2|-1 \geqslant 1, \\ |x^2+3x+2|-1 \leqslant -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x^2+3x+2| \geqslant 2, \\ |x^2+3x+2| \leqslant 0. \end{array}\right.$$

Найдём множество решений каждого из неравенств последней совокупности, после чего объединим найденные множества.

2. Неравенство $|x^2+3x+2|\geqslant 2$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2+3x+2 \geqslant 2, \\ x^2+3x+2 \leqslant -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x \geqslant 0, \\ x^2+3x+4 \leqslant 0. \end{array}\right.$$

Неравенство $x^2+3x\geqslant 0$ приводится к виду $x(x+3)\geqslant 0$; множеством его решений является объединение $(-\infty; -3]\cup[0; +\infty)$. Неравенство $x^2+3x+4\leqslant 0$ решений не имеет, поскольку дискриминант квадратного трёхчлена x^2+3x+4 отрицателен, а старший коэффициент положителен. Следовательно, множеством решений совокупности

$$\left[\begin{aligned}&x^2+3x\geqslant 0,\\&x^2+3x+4\leqslant 0,\end{aligned}\right.$$

а значит, и неравенства $|x^2+3x+2|\geqslant 2$ является объединение $(-\infty; -3]\cup[0; +\infty)$.

3. Решим неравенство $|x^2+3x+2|\leqslant 0$. В силу неотрицательности модуля это неравенство выполняется, только если $x^2+3x+2=0$, откуда $x=-2$ или $x=-1$. Таким образом, множество $\{-2; -1\}$ решений неравенства $|x^2+3x+2|\leqslant 0$ состоит из двух чисел.

4. Объединением множеств $(-\infty; -3]\cup[0; +\infty)$ и $\{-2; -1\}$, а следовательно, и множеством решений данного неравенства является множество $(-\infty; -3]\cup\{-2; -1\}\cup[0; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3]\cup\{-2; -1\}\cup[0; +\infty)$.

Пример 5. Решите неравенство

$$|x^2-6x+8|-|2x-5|<x^2-3x+2.$$

Решение. 1. Для того чтобы использовать метод равносильных преобразований, «уединим» один из модулей:

$$|x^2-6x+8|<x^2-3x+2+|2x-5|.$$

Полученное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}x^2-6x+8<x^2-3x+2+|2x-5|,\\x^2-6x+8>-x^2+3x-2-|2x-5|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|2x-5|>-3x+6,\\|2x-5|>-2x^2+9x-10.\end{cases}$$

Решим каждое из неравенств системы, после чего найдём пересечение множеств решений.

2. Неравенство $|2x-5|>-3x+6$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned}&2x-5>-3x+6,\\&2x-5<3x-6\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x>2{,}2,\\&x>1.\end{aligned}\right.$$

Множеством решений последней совокупности, а значит, и множеством решений неравенства $|2x-5|>-3x+6$ является луч $(1; +\infty)$.

3. Решим неравенство

$$|2x-5|>-2x^2+9x-10.$$

Оно равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned}&2x-5>-2x^2+9x-10,\\&2x-5<2x^2-9x+10\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&2x^2-7x+5>0,\\&2x^2-11x+15>0.\end{aligned}\right.$$

Корнями квадратного трёхчлена $2x^2-7x+5$ являются числа 1 и 2,5, старший коэффициент трёхчлена положителен. Поэтому множеством решений неравенства $2x^2-7x+5>0$ является объединение $(-\infty; 1)\cup$ $\cup(2{,}5; +\infty)$. Корнями квадратного трёхчлена $2x^2-11x+15$ являются числа 2,5 и 3, старший коэффициент трёхчлена положителен. Поэтому множеством решений неравенства $2x^2-11x+15>0$ является объединение $(-\infty; 2{,}5)\cup(3; +\infty)$. Следовательно, множеством решений совокупности

$$\left[\begin{aligned}&2x^2-7x+5>0,\\&2x^2-11x+15>0,\end{aligned}\right.$$

а значит, и неравенства

$$|2x-5|>-2x^2+9x-10$$

является объединение $(-\infty; 2{,}5)\cup(2{,}5; +\infty)$.

4. Пересечением множеств $(1; +\infty)$ и $(-\infty; 2{,}5)\cup(2{,}5; +\infty)$, а следовательно, и множеством решений данного неравенства является множество $(1; 2{,}5)\cup(2{,}5; +\infty)$.

Ответ: $(1; 2{,}5)\cup(2{,}5; +\infty)$.

Пример 6. Решите неравенство

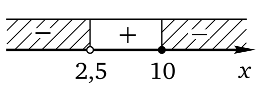
$$\left|\frac{4x^2-9x+5}{2x-5}\right|\leqslant 2x+1.$$

Решение. 1. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{4x^2-9x+5}{2x-5}\leqslant 2x+1,\\[2mm]\dfrac{4x^2-9x+5}{2x-5}\geqslant -2x-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{4x^2-9x+5}{2x-5}-2x-1\leqslant 0,\\[2mm]\dfrac{4x^2-9x+5}{2x-5}+2x+1\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

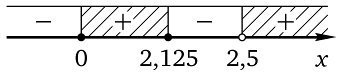
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{4x^2-9x+5-4x^2+10x-2x+5}{2x-5}\leqslant 0,\\[2mm]\dfrac{4x^2-9x+5+4x^2-10x+2x-5}{2x-5}\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{10-x}{2x-5}\leqslant 0,\\[2mm]\dfrac{x(8x-17)}{2x-5}\geqslant 0.\end{cases}$$

2. Решим первое неравенство последней системы методом интервалов:



Множество решений неравенства: $(-\infty; 2{,}5) \cup [10; +\infty)$.

3. Решим второе неравенство последней системы методом интервалов:



Множество решений неравенства: $[0; 2{,}125] \cup (2{,}5; +\infty)$.

4. Найдём множество решений данного неравенства как пересечение множеств $(-\infty; 2{,}5) \cup [10; +\infty)$ и $[0; 2{,}125] \cup (2{,}5; +\infty)$. Получим множество $[0; 2{,}125] \cup [10; +\infty)$.

Ответ: $[0; 2{,}125] \cup [10; +\infty)$.

Замечание. Иногда полезно коротко проанализировать возможные пути решения неравенства: это позволит сэкономить время решения задачи. Например, для решения неравенства вида $\left|\frac{a(x)}{b(x)}\right| \vee 1$ можно воспользоваться свойством 12 или 13 и получить систему или совокупность двух дробно-рациональных неравенств (как при решении предыдущего примера), а можно, используя свойства модуля и учитывая ОДЗ неравенства, перейти к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} |a(x)| \vee |b(x)|, \\ b(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2(x) \vee b^2(x), \\ b(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a(x)-b(x))(a(x)+b(x)) \vee 0, \\ b(x) \neq 0. \end{cases}$$

Аналогично неравенство $\left|\frac{a(x)}{b(x)}\right| \vee c$ (здесь c — положительное действительное число) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} |a(x)| \vee |c \cdot b(x)|, \\ b(x) \neq 0, \end{cases}$$

а неравенство $\left|\frac{a(x)}{b(x)}\right| \vee \left|\frac{c(x)}{d(x)}\right|$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} |a(x) \cdot d(x)| \vee |c(x) \cdot b(x)|, \\ b(x) \neq 0, \\ d(x) \neq 0. \end{cases}$$

Первое неравенство каждой из двух последних систем решается с помощью свойства 11.

Пример 7. Решите неравенство $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right| \geqslant 1$.

Р е ш е н и е. Для решения неравенства воспользуемся предыдущим замечанием. В данном случае

$$a(x) = x^2+3x+2, \quad b(x) = x^2-3x+2,$$

и неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}(x^2+3x+2-x^2+3x-2)(x^2+3x+2+x^2-3x+2)\geqslant 0,\\ x^2-3x+2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}6x(2x^2+4)\geqslant 0,\\ x^2-3x+2\neq 0.\end{cases}$$

Поскольку $2x^2+4>0$ при любом значении переменной, первое неравенство последней системы приводится к виду $x\geqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена x^2-3x+2 являются числа 1 и 2; их нужно исключить из множества решений первого неравенства. Следовательно, множеством решений системы, а значит, и данного неравенства будет объединение $[0;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$.

Ответ: $[0;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$.

Пример 8. Решите неравенство $||3-2x|-1|\leqslant 2|x|$.

Решение. Обе части неравенства неотрицательны, поэтому возведение их в квадрат является равносильным преобразованием. Учитывая, что квадрат числа и квадрат модуля этого числа равны (свойство 8), после возведения в квадрат получим неравенство

$$(|3-2x|-1)^2\leqslant 4x^2.$$

Здесь применение формулы разности квадратов приведёт к более громоздкому неравенству по сравнению с тем, которое получится после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых:

$$(3-2x)^2-2|3-2x|+1^2\leqslant 4x^2 \Leftrightarrow |3-2x|\geqslant 5-6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3-2x\geqslant 5-6x,\\ 3-2x\leqslant -5+6x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geqslant 0{,}5,\\ x\geqslant 1\end{array}\right. \Leftrightarrow x\geqslant 0{,}5.$$

Ответ: $[0{,}5;+\infty)$.

Метод интервалов

Метод интервалов при решении неравенств с модулем применяется не так часто, но его применение может несколько сократить время решения некоторых неравенств сравнительно с другими методами.

Пример 9. Решите неравенство

$$(|3x-2|-4x+3)(|2x-3|+x-3)(4x^2-5x-6)\geqslant 0.$$

Р е ш е н и е. 1. Пусть

$$f_1(x) = |3x-2| - 4x + 3,$$
$$f_2(x) = |2x-3| + x - 3,$$
$$f_3(x) = 4x^2 - 5x - 6,$$
$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x).$$

Решим неравенство $f(x) \geqslant 0$ методом интервалов. Функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой прямой.

2. Найдём нули функции $f(x)$. Для этого решим уравнения $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, $f_3(x)=0$, начав с первого из них:

$$|3x-2| - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow |3x-2| = 4x-3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3 \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3x-2 = 4x-3, \\ 3x-2 = -4x+3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3 \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \frac{5}{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

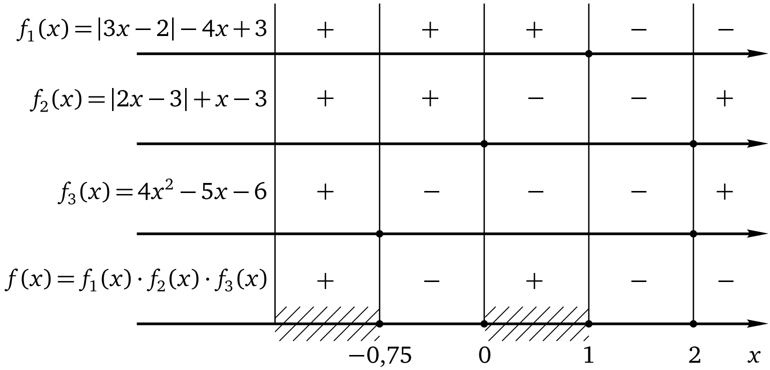
Решим уравнение $f_2(x) = 0$, используя то же свойство модуля (свойство 10), что и при решении предыдущего уравнения:

$$|2x-3| + x - 3 = 0 \Leftrightarrow |2x-3| = 3-x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-3 = 3-x, \\ 2x-3 = -3+x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Корнями квадратного трёхчлена $4x^2 - 5x - 6$ (а значит, и нулями функции $f_3(x)$) являются числа $-0{,}75$ и 2.

3. Теперь можно применить метод интервалов, изобразив соответствующую «таблицу», первые три строки которой предназначены для определения промежутков знакоположительности и знакоотрицательности алгебраических выражений $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, а последняя (нижняя) — для определения промежутков знакоположительности и знакоотрицательности функции $f(x)$. При этом, как обычно, на каждой оси отмечаются не все нули, а только нули соответствующих множителей. Поскольку единственным нулём алгебраического выражения $f_1(x) = |3x-2| - 4x + 3$ является $x = 1$, с помощью «пробных» точек легко определить, что $f_1(x) > 0$ при $x < 1$ (например, $f_1(0) = 5 > 0$) и $f_1(x) < 0$ при $x > 1$ (например, $f_1(2) = -1 < 0$). Аналогичным образом легко определить, что $f_2(x) < 0$ при $0 < x < 2$ и $f_2(x) > 0$ при

$x > 2$ или $x < 0$. Наконец, согласно свойствам квадратного трёхчлена с положительным старшим коэффициентом $f_3(x) < 0$ при $-0{,}75 < x < 2$ и $f_3(x) > 0$ при $x > 2$ или $x < -0{,}75$. Воспользовавшись «столбцами» таблицы, легко найти промежутки знакоположительности и знакоотрицательности функции $f(x)$:



Множество решений данного неравенства: $(-\infty; -0{,}75] \cup [0; 1] \cup \{2\}$.

Ответ: $(-\infty; -0{,}75] \cup [0; 1] \cup \{2\}$.

Метод введения новой переменной

Метод введения новой переменной, как и метод интервалов, используется при решении неравенств с модулем довольно редко.

Пример 10. Решите неравенство

$$|x^2 - 3|x| + 2| \geqslant |x^2 - 4|x| + 3|.$$

Решение. Пусть $|x| = t$, тогда $x^2 = t^2$ и данное неравенство можно переписать в виде

$$|t^2 - 3t + 2| \geqslant |t^2 - 4t + 3|.$$

Возведём обе части полученного неравенства в квадрат и воспользуемся формулой разности квадратов:

$$(t^2 - 3t + 2)^2 \geqslant (t^2 - 4t + 3)^2 \Leftrightarrow (t^2 - 3t + 2)^2 - (t^2 - 4t + 3)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (t-1)(2t^2 - 7t + 5) \geqslant 0.$$

Корнями квадратного трёхчлена $2t^2 - 7t + 5$ являются числа 1 и 2,5. Поэтому последнее неравенство можно переписать в виде

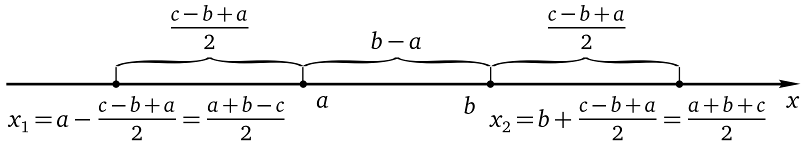
$$(t-1) \cdot 2 \cdot (t-1)(t-2{,}5) \geqslant 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(t-2{,}5) \geqslant 0.$$

Если $t=1$, то неравенство выполнено. При $t \neq 1$ выражение $(t-1)^2$ принимает только положительные значения, поэтому неравенство будет выполнено, лишь если $t \geqslant 2{,}5$. Таким образом, множеством решений неравенства $(t-1)^2(t-2{,}5) \geqslant 0$ является объединение $\{1\} \cup$ $\cup\, [2{,}5; +\infty)$. Сделаем обратную замену: $\left[\begin{array}{l}|x|=1, \\ |x| \geqslant 2{,}5,\end{array}\right.$ следовательно, $x \in$ $\in (-\infty; -2{,}5] \cup \{-1; 1\} \cup [2{,}5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2{,}5] \cup \{-1; 1\} \cup [2{,}5; +\infty)$.

Применение геометрического смысла модуля

Применение геометрического смысла модуля может дать некоторый выигрыш во времени по сравнению с другими методами при решении всего нескольких типов неравенств, прежде всего неравенств вида $|x-a|+|x-b| \vee c$, а также $|x-a|-|x-b| \vee c$, $|x-a| \vee c|x-b|$, где $c>0$, и некоторых других. Решить неравенство $|x-a|+|x-b| \vee c$ — значит найти все точки числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек a и b больше (больше или равна) или меньше (меньше или равна) c. Для определённости будем считать, что $a<b$. Если расстояние между точками a и b больше c, то множеством решений неравенств $|x-a|+|x-b|>c$ и $|x-a|+|x-b| \geqslant c$ является все множество действительных чисел, а неравенства $|x-a|+|x-b|<c$ и $|x-a|+|x-b| \leqslant c$ решений не имеют. В самом деле, если предположить, что искомая точка принадлежит отрезку $[a; b]$, то сумма расстояний от такой точки до концов отрезка окажется больше c (поскольку эта сумма равна длине отрезка, а длина отрезка больше c). Ясно, что для любой точки, лежащей вне рассматриваемого отрезка, сумма расстояний от неё до концов отрезка будет ещё больше. Если расстояние между точками a и b равно c, то множеством решений неравенства $|x-a|+|x-b| \leqslant c$ будет отрезок $[a; b]$, неравенство $|x-a|+|x-b|<c$ решений не имеет, неравенство $|x-a|+|x-b| \geqslant c$ выполняется при любом значении переменной, а множеством решений неравенства $|x-a|+|x-b|>c$ является вся числовая прямая за исключением чисел отрезка $[a; b]$, т. е. множество $(-\infty; a) \cup (b; +\infty)$. Если же расстояние между точками a и b меньше c, то для решения любого из рассматриваемых неравенств нужно вначале найти все точки числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек a и b равна c. Ясно, что каждая из искомых точек лежит вне отрезка $[a; b]$, а сумма расстояний от неё до точек a и b будет равна сумме длины отрезка $[a; b]$ (т. е. $b-a$) и удвоенного расстояния от этой точки до ближайшего к ней конца отрезка. Это удвоенное расстояние, очевидно, равно $c-(b-a)=c-b+a$, а искомых точек всего две: первая (обозначим её x_1) лежит на числовой оси левее точки a на расстоянии $\frac{c-b+a}{2}$ от неё, а вторая (обозначим её x_2) — правее точки b на том же расстоянии от неё. Поэтому $x_1 = a - \frac{c-b+a}{2} = \frac{a+b-c}{2}$, $x_2 = b + \frac{c-b+a}{2} = \frac{a+b+c}{2}$:



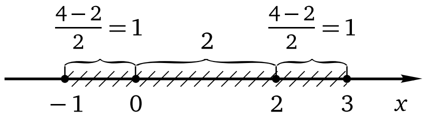
Теперь уже ясно, что множеством решений неравенства $|x-a| + |x-b| < c$ будет интервал $(x_1; x_2)$, множеством решений неравенства $|x-a|+|x-b| \leqslant c$ будет отрезок $[x_1; x_2]$, а множества решений неравенств $|x-a|+|x-b| > c$ и $|x-a|+|x-b| \geqslant c$ будут соответственно иметь вид $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ и $(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$.

Если метод освоен, решение подобных неравенств осуществляется очень быстро. Для этого нужно изобразить числовую ось и отметить на ней «ключевые» точки a и b и расстояние между ними, после чего, найдя точки x_1 и x_2, выписать ответ. Рассуждения, аналогичные приведённым, используются для решения неравенств вида $|x-a|-|x-b| \vee c$, $|x-a| \vee c|x-b|$ и некоторых других. При определённом навыке эти рассуждения занимают считанные секунды, а точки x_1 и x_2 находятся устно.

Пример 11. Решите неравенство

$$|2x^2+x-7|+|2x^2+x-9| \leqslant 4.$$

Решение. Обозначим $2x^2+x-7$ через t. Неравенство примет вид $|t|+|t-2| \leqslant 4$. Согласно геометрическому смыслу модуля левая часть полученного неравенства равна сумме расстояний от точки t числовой оси до точек 0 и 2. Для того чтобы решить неравенство, найдём сначала точки t числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек 0 и 2 равна 4. Понятно, что на отрезке $[0; 2]$ искомых точек быть не может, поскольку сумма расстояний от любой точки отрезка до его концов равна длине отрезка и в данном случае равна 2. Значит, искомые точки лежат вне отрезка. Рассмотрим точку, лежащую правее точки 2 на числовой оси. Сумма расстояний от этой точки до концов отрезка складывается из длины отрезка и удвоенного расстояния от этой точки до точки 2. Таким образом, это удвоенное расстояние равно $4-2=2$, и искомая точка находится правее точки 2 на расстоянии $2:2=1$ от неё. Следовательно, первая из искомых точек — это $t=3$. Абсолютно аналогично получаем, что вторая искомая точка находится на числовой оси левее точки 0 на расстоянии 1 от неё. Следовательно, вторая из искомых точек — это $t=-1$. Поэтому все точки t числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек 0 и 2 меньше или равна 4, лежат на отрезке $[-1; 3]$, который и является множеством решений неравенства $|t|+|t-2|\leqslant 4$:



Таким образом, $\begin{cases} t\geqslant -1, \\ t\leqslant 3. \end{cases}$ Сделав обратную замену, получим

$$\begin{cases} 2x^2+x-7\geqslant -1, \\ 2x^2+x-7\leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x-6\geqslant 0, \\ 2x^2+x-10\leqslant 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена $2x^2+x-6$ являются числа -2 и 1,5, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множество решений первого неравенства системы: $(-\infty; -2]\cup[1{,}5; +\infty)$. Корнями квадратного трёхчлена $2x^2+x-10$ являются числа $-2{,}5$ и 2, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множество решений второго неравенства системы: $[-2{,}5; 2]$. Пересечением множеств $(-\infty; -2]\cup[1{,}5; +\infty)$ и $[-2{,}5; 2]$, а значит, и множеством решений данного неравенства является множество $[-2{,}5; -2]\cup[1{,}5; 2]$.

Ответ: $[-2{,}5; -2]\cup[1{,}5; 2]$.

Метод знакотождественных множителей

Метод знакотождественных множителей (см. § 1.6) при решении некоторых типов неравенств с модулем даёт ощутимый выигрыш во времени по сравнению с любым другим методом и позволяет избежать «ветвления» задачи и связанных с ним ошибок. Напомним, что любой из множителей в левой части неравенства вида $a_1(x)\cdot a_2(x)\cdot\ldots\cdot a_n(x)\vee 0$ или $\dfrac{a_1(x)\cdot a_2(x)\cdot\ldots\cdot a_n(x)}{a_{n+1}(x)\cdot a_{n+2}(x)\cdot\ldots\cdot a_{n+m}(x)}\vee 0$, являющийся разностью модулей двух алгебраических выражений (или вообще разностью двух любых алгебраических выражений, принимающих только неотрицательные значения), можно заменить разностью квадратов этих выражений (учитывая при необходимости ОДЗ каждого из таких выражений).

Пример 12. Решите неравенство $\dfrac{(|x|-\sqrt{x+2})(|x|-2)}{|x+3|-|x|}\leqslant 0$.

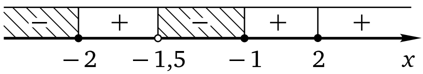
Р е ш е н и е. Применим метод знакотождественных множителей, заменив каждую из трёх разностей в левой части неравенства разностью квадратов соответствующих алгебраических выражений (с учётом того, что $|a|=\sqrt{a^2}$ и $\sqrt{x+2}$ определён лишь при $x\geqslant -2$). Получим систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2-x-2)(x^2-4)}{(x+3)^2-x^2} \leqslant 0, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена x^2-x-2 являются числа -1 и 2. Разложив этот трёхчлен на множители и применив формулу разности квадратов, придём к системе неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-2)^2(x+2)}{3(2x+3)} \leqslant 0, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$$

Применим метод интервалов к решению первого неравенства полученной системы неравенств:



Множество решений неравенства: $(-\infty;\,-2]\cup(-1{,}5;\,-1]\cup\{2\}$. Учитывая второе неравенство системы, найдём множество решений данного неравенства: $\{-2;\,2\}\cup(-1{,}5;\,-1]$.

Ответ: $\{-2;\,2\}\cup(-1{,}5;\,-1]$.

Уже этот относительно несложный пример демонстрирует преимущество метода знакотождественных множителей по сравнению, например, с методом промежутков, применение которого потребовало бы рассмотрения четырёх случаев и соответственно решения четырёх систем неравенств вместо одной. Другие примеры применения метода знакотождественных множителей к решению неравенств с модулем см. в § 1.6 (примеры 2–4).

Применение свойств функций

Перейдём теперь к неравенствам с модулем, решение которых основано на применении свойств функций, прежде всего ограниченности и монотонности (см. § 1.5). Для решения неравенств с модулем использование свойства ограниченности связано преимущественно со свойством 6:

$|a|\geqslant a$, причём $|a|=a \Leftrightarrow a\geqslant 0$; $|a|>a \Leftrightarrow a<0$;

$|a|\geqslant -a$, причём $|a|=-a \Leftrightarrow a\leqslant 0$; $|a|>-a \Leftrightarrow a>0$,

а также неравенством треугольника (свойство 14) и его модификацией:

$|a|+|b| \geqslant |a+b|$, причём

$$|a|+|b| = |a+b| \iff ab \geqslant 0; \quad |a|+|b| > |a+b| \iff ab < 0;$$

$|a|+|b| \geqslant |a-b|$, причём

$$|a|+|b| = |a-b| \iff ab \leqslant 0; \quad |a|+|b| > |a-b| \iff ab > 0.$$

Пример 13. Решите неравенство

$$|2x^2-3x-5|+|x^2-2x-3| \leqslant x^2-x-2.$$

Р е ш е н и е. Заметим, что разность подмодульных выражений равна правой части неравенства, т. е. данное неравенство имеет вид $|a|+|b| \leqslant a-b$, где $a = 2x^2-3x-5$, $b = x^2-2x-3$. Из неравенств $|a| \geqslant a$, $|b| \geqslant -b$ следует, что $|a|+|b| \geqslant a-b$. Но $|a|+|b| \leqslant a-b$ по условию. Таким образом, $|a|+|b| = a-b$, что возможно в том и только том случае, если $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \leqslant 0. \end{cases}$ Значит, данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2x^2-3x-5 \geqslant 0, \\ x^2-2x-3 \leqslant 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена $2x^2-3x-5$ являются числа -1 и 2,5, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множество решений первого неравенства системы: $(-\infty; -1] \cup [2{,}5; +\infty)$. Корнями квадратного трёхчлена x^2-2x-3 являются числа -1 и 3, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множество решений второго неравенства системы: $[-1; 3]$. Пересечением полученных множеств, а значит, и множеством решений данного неравенства является множество $\{-1\} \cup [2{,}5; 3]$.

Ответ: $\{-1\} \cup [2{,}5; 3]$.

Пример 14. Решите неравенство

$$|3x^2+4x-4|+|4x^2-8x-5| > |x^2-12x-1|.$$

Р е ш е н и е. Заметим, что данное неравенство имеет вид $|a|+|b| > |a-b|$, где $a = 4x^2-8x-5$, $b = 3x^2+4x-4$. В соответствии с неравенством треугольника

$$|a|+|b| > |a-b| \iff ab > 0.$$

Таким образом, данное неравенство равносильно неравенству

$$(4x^2-8x-5)(3x^2+4x-4) > 0.$$

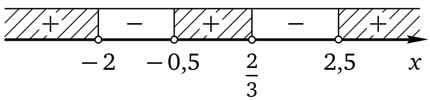
Корнями квадратного трёхчлена $4x^2-8x-5$ являются числа $-0{,}5$ и $2{,}5$. Корнями квадратного трёхчлена $3x^2+4x-4$ являются числа -2 и $\frac{2}{3}$. Следовательно, полученное неравенство можно переписать в виде

$$4(x+0{,}5)(x-2{,}5)\cdot 3(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)>0,$$

откуда

$$(x+0{,}5)(x-2{,}5)(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)>0.$$

Применим метод интервалов:



Множеством решений данного неравенства является объединение $(-\infty;-2)\cup\left(-0{,}5;\frac{2}{3}\right)\cup(2{,}5;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup\left(-0{,}5;\frac{2}{3}\right)\cup(2{,}5;+\infty)$.

Пример 15. Решите неравенство

$$|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-100|\leqslant 2500.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся неравенством треугольника:

$$|a|+|b|\geqslant|a-b|,\quad\text{причём}\quad |a|+|b|=|a-b|\iff ab\leqslant 0.$$

Получим пятьдесят неравенств:

$$|x-1|+|x-51|\geqslant 50,$$

причём $|x-1|+|x-51|=50\iff(x-1)(x-51)\leqslant 0\iff 1\leqslant x\leqslant 51$;

$$|x-2|+|x-52|\geqslant 50,$$

причём $|x-2|+|x-52|=50\iff(x-2)(x-52)\leqslant 0\iff 2\leqslant x\leqslant 52$;

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|x-50|+|x-100|\geqslant 50,$$

причём

$$|x-50|+|x-100|=50\iff(x-50)(x-100)\leqslant 0\iff 50\leqslant x\leqslant 100.$$

Следовательно, левая часть данного неравенства не меньше $50\cdot 50=$ $=2500$. Поэтому данное неравенство выполняется в том и только том случае, когда его левая часть равна 2500, что, в свою очередь, возможно, только если выполняются все неравенства $1 \leqslant x \leqslant 51$, $2 \leqslant x \leqslant 52$, ..., $50 \leqslant x \leqslant 100$, откуда $50 \leqslant x \leqslant 51$.

Ответ: [50; 51].

Рассмотрим теперь два примера на применение свойств монотонных функций к решению неравенств с модулем.

Пример 16. Решите неравенство

$$|x+2|-2|x-1|+|2x+1| \leqslant 6x.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$6x-|x+2|+2|x-1|-|2x+1| \geqslant 0$$

и рассмотрим функцию

$$f(x) = 6x-|x+2|+2|x-1|-|2x+1|,$$

определённую и непрерывную на всей числовой прямой. График функции представляет собой ломаную, состоящую из отрезков прямых и лучей. Каждое звено этой ломаной является частью прямой вида $y = kx + l$, где $k > 0$ (поскольку $k = 6 \pm 1 \pm 2 \pm 2$ и вне зависимости от «раскрытия» модулей коэффициент при x будет положителен). Следовательно, функция $y = f(x)$ возрастает на $(-\infty; +\infty)$. Поскольку $f(1) = 0$, неравенство $f(x) \geqslant 0$ выполнено в том и только том случае, если $x \in [1; +\infty)$.

Ответ: $[1; +\infty)$.

Пример 17. Решите неравенство

$$3(x^2+4x+2)+|x-1| \geqslant 3x+|x^2+4x+1|.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в виде

$$3x-|x-1| \leqslant 3(x^2+4x+2)-|x^2+4x+1|$$

и рассмотрим функцию $f(t) = 3t - |t-1|$. Если $t \geqslant 1$, то $f(t) = 2t + 1$; если $t < 1$, то $f(t) = 4t - 1$. Следовательно, функция $y = f(x)$ возрастает на $(-\infty; +\infty)$. Значит, неравенство $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$ будет выполняться тогда и только тогда, когда $\alpha \leqslant \beta$. В данном случае $\alpha = x$, $\beta = x^2 + 4x + 2$. Поэтому $x \leqslant x^2 + 4x + 2$, откуда $x^2 + 3x + 2 \geqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена $x^2 + 3x + 2$ являются числа -2 и -1, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множеством решений неравенства является объединение $(-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$.

Упражнения к § 4.2

Решите неравенство.

1. а) $|x+2|+|x+7|\leqslant 25$; **б)** $|x+3|+|x+9|\leqslant 24$.

2. а) $|x-4|+|x+8|<36$; **б)** $|x-5|+|x+6|<33$.

3. а) $|x-1|+|x-9|\geqslant 32$; **б)** $|x-3|+|x-10|\geqslant 21$.

4. а) $|x+5|+|x-11|>32$; **б)** $|x+4|+|x-8|>20$.

5. а) $|x-5|+|x+5|\leqslant 10$; **б)** $|x+8|+|x-8|\leqslant 16$.

6. а) $|x-13|+|x+13|>26$; **б)** $|x-12|+|x+12|>24$.

7. а) $|2x-1|+2|x-1|<2x+3$; **б)** $|3x-2|+3|x-1|<3x+2$.

8. а) $|2-x|+|3-x|\leqslant x+2$; **б)** $|2-x|+|4-x|\leqslant x+3$.

9. а) $2|x+2|+1<|2x+7|-2x-2|6x+7|$; **б)** $2|x+1|-|2x+5|<1-2x-2|6x+1|$.

10. а) $|5-2x|+|5x-12|\leqslant|3x-7|$; **б)** $|7-2x|+|5x-17|\leqslant|3x-10|$.

11. а) $|x-5|+|x-6|\geqslant|x-4|+|2x-9|$; **б)** $|x-4|+|x-5|\geqslant|x-3|+|2x-7|$.

12. а) $|x^2-6x|-3|2x-3|\geqslant x^2+3x$; **б)** $|x^2-18x|-9|2x-9|\geqslant x^2+9x$.

13. а) $|4x^2-5x+1|+3|2-x|\geqslant|2-11x-6x^2|$;

б) $|2x^2-9x+9|+3|5-x|\geqslant|12-5x-3x^2|$.

14. а) $|3x-5|<6x-1$; **б)** $|3x+1|<6x+11$.

15. а) $|5x-4|>4x+3$; **б)** $|6x-5|>5x+4$.

16. а) $|x^2-4|\leqslant 3x$; **б)** $|x^2-3|\leqslant 2x$.

17. а) $|x^2-15|\geqslant 2x$; **б)** $|x^2-10|\geqslant 3x$.

18. а) $|x^2-6x+3|\leqslant x-3$; **б)** $|x^2-4x-2|\leqslant x-2$.

19. а) $|4x^2-12x+7|\geqslant 2x-3$; **б)** $|4x^2-4x-5|\geqslant 2x-1$.

20. а) $|4x^2-8x-3|<2x^2-4x+3$; **б)** $|4x^2-16x-5|<2x^2-8x+5$.

21. а) $|x^3+10x-20|\leqslant x^3+20$; **б)** $|x^3+5x-15|\leqslant x^3+15$.

22. а) $|x^3-7x+17|\leqslant x^3+5x^2-17$; **б)** $|x^3-10x+26|\leqslant x^3+8x^2-26$.

23. а) $|x^8-2x-8|\geqslant x^8+2x+8$; **б)** $|x^6-3x-6|\geqslant x^6+3x+6$.

24. а) $|x+3|\geqslant|2x-7|$; **б)** $|x+7|\geqslant|2x+1|$.

25. а) $|3x-5|\geqslant 2|2x-5|$; **б)** $|3x+1|\geqslant 2|2x-1|$.

26. а) $|7x^2-13x|\leqslant|x^2-7x+12|$; **б)** $|14x^2-13x|\leqslant|2x^2-7x+6|$.

27. а) $|7x^2+x-6|\leqslant|x^2-5x-6|$; **б)** $|7x^2+15x+2|\leqslant|x^2-3x-10|$.

28. а) $|x^2-9x-22|\geqslant|9x^2-5x-26|$; **б)** $|x^2-11x+30|\geqslant|7x^2-41x+54|$.

29. а) $|16x^2-7x-23|\leqslant 2|x^2-10x+16|$; **б)** $|16x^2+25x-14|\leqslant 2|x^2-8x+7|$.

30. а) $\left|\dfrac{3x+5}{x+2}\right|\geqslant 2$; **б)** $\left|\dfrac{3x+1}{2x+1}\right|\geqslant 1$.

31. а) $\left|\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2-3x+1}\right|\geqslant 1$; **б)** $\left|\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-6x+8}\right|\geqslant 1$.

32. а) $\left|\dfrac{x^2-10x+9}{x^2-9}\right|\geqslant 1$; б) $\left|\dfrac{x^2-10x+16}{x^2-16}\right|\geqslant 1$.

33. а) $\dfrac{x^2-8x+24}{|x^2-16|}\leqslant 1$; б) $\dfrac{x^2-16x+96}{|x^2-64|}\leqslant 1$.

34. а) $\left|\dfrac{x^2-25x+48}{x^2-25}\right|>1$; б) $\left|\dfrac{x^2-49x+96}{x^2-49}\right|>1$.

35. а) $\left|\dfrac{x^2-10x+7}{x^2-10x+19}\right|\leqslant 3$; б) $\left|\dfrac{x^2-6x-31}{x^2-6x-1}\right|\leqslant 4$.

36. а) $\left|\dfrac{2x^2+7x+5}{x^2+6x+8}\right|\geqslant 2$; б) $\left|\dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+4x+3}\right|\geqslant 3$.

37. а) $\left|\dfrac{64x^2-14x-23}{x^2-5x+4}\right|\geqslant 8$; б) $\left|\dfrac{16x^2-7x-23}{x^2-10x+16}\right|\geqslant 2$.

38. а) $\left|\dfrac{x^2-7x}{x-2}\right|\geqslant x+2$; б) $\left|\dfrac{x^2-17x}{x-3}\right|\geqslant x+3$.

39. а) $\left|\dfrac{16x^2-18x+5}{4x-5}\right|\leqslant 4x+1$; б) $\left|\dfrac{2x^2-9x+10}{x-5}\right|\leqslant 2x+2$.

40. а) $||x^2+9x+20|-1|\geqslant 1$; б) $||x^2+7x+12|-1|\geqslant 1$.

41. а) $||3x-5|-x+2|+||2x-3|-2|>2$; б) $||3x-2|-x+1|+||2x-1|-2|>2$.

42. а) $||x|-5|+x-5>|x-5|$; б) $||x|-6|+x-6>|x-6|$.

43. а) $||1-2x|-1|\leqslant 2|x+1|$; б) $||5-2x|-1|\leqslant 2|x-1|$.

44. а) $||3x-5|-9|+3x-14<|3x-14|$; б) $||7x-4|-7|+7x-11>|7x-11|$.

45. а) $(|x-4|+2x-3)(|x-5|-3x+7)(x+1)\leqslant 0$;
б) $(|x-3|+2x-1)(|x-4|-3x+4)(x+2)\leqslant 0$.

46. а) $(|3x-5|-4x+7)(|2x-5|+x-4)(4x^2-13x+3)\geqslant 0$;
б) $(|3x+1|-4x-1)(|2x-1|+x-2)(4x^2+3x-7)\geqslant 0$.

47. а) $2x^2-11|x|+5\leqslant 0$; б) $5x^2-11|x|+2\leqslant 0$.

48. а) $2|2x^2-3|x|+1|\geqslant|4x^2-8|x|+3|$; б) $|9x^2-9|x|+2|\geqslant 3|3x^2-4|x|+1|$.

49. а) $|3x^2+2x-3|+|3x^2+2x-6|\leqslant 7$; б) $|4x^2-x-7|+|4x^2-x-10|\leqslant 11$.

50. а) $\dfrac{(|x-1|-\sqrt{x+1})(|x-1|-2)}{|x+2|-|x-1|}\leqslant 0$; б) $\dfrac{(|x+3|-\sqrt{x+5})(|x+3|-2)}{|x+6|-|x+3|}\leqslant 0$.

51. а) $\dfrac{(x-6)(|x+1|-|x-13|)}{|x-6|-5}\geqslant 0$; б) $\dfrac{(x+7)(|x+15|-|x-1|)}{|x+7|-6}\geqslant 0$.

52. а) $|2x^2-7x-15|>15+7x-2x^2$; б) $|2x^2-5x-12|>12+5x-2x^2$.

53. а) $|5x^2+8x-4|\leqslant 5x^2+8x-4$; б) $|5x^2+7x-6|\leqslant 5x^2+7x-6$.

54. а) $|x^2-8x+15|-|2x-7|<x^2-5x+6$;
б) $|x^2-12x+35|-|2x-11|<x^2-9x+20$.

55. а) $|2x^2-15x+22|+|x^2-8x+12|\leqslant x^2-7x+10$;
б) $|2x^2-11x+9|+|x^2-6x+5|\leqslant x^2-5x+4$.

56. а) $|x^2+4x-5|+|x^2-9x+8|+|x^2-3x-40| \leqslant x^2-2x+43$;

б) $|x^2+3x-4|+|x^2-10x+9|+|x^2-5x-36| \leqslant x^2-2x+41$.

57. а) $|3x^2-2x-5|+|4x^2-16x+7| > |x^2-14x+12|$;

б) $|3x^2+16x+16|+|4x^2+8x-5| > |x^2-8x-21|$.

58. а) $|x+1|+|x+2|+\ldots+|x+50| \leqslant 625$;

б) $|x-2|+|x-4|+\ldots+|x-100| \leqslant 1250$.

59. а) $|x-1|-3|2x-1|+2|3x+1|+24 \leqslant 15x$;

б) $|x-1|-2|3x+1|+3|2x-1| \geqslant 16x+23$.

60. а) $5(x^2+6x+4)+3|x-3| \geqslant 5x+3|x^2+6x+1|$;

б) $7(x^2-5x+5)+2|x-4| \leqslant 7x+2|x^2-5x+1|$.

Диагностическая работа 6

Вариант 1

Решите неравенство.

1. $|5x+3|+|5x+8| \leqslant 19$.

2. $|x-3|+x+|x-4| > 5$.

3. $|4x+1| \leqslant |2x-3|+2|x-2|$.

4. $4|x^2-3x|-3|4x-3| \geqslant 4x^2+6x$.

5. $|x^2-2x-11| \leqslant x-1$.

6. $|x^3-4x+8| \geqslant x^3+2x^2-8$.

7. $|7x^2+29x+24| \geqslant |x^2-x|$.

8. $\dfrac{|x^2-36|}{x^2-12x+54} \geqslant 1$.

9. $\left|\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-1}\right| \geqslant 3$.

10. $\dfrac{(|x+5|-\sqrt{x+7})(|x+5|-2)}{|x+8|-|x+5|} \leqslant 0$.

11. $|2x^2-11x+12|+|x^2-5x+4| \leqslant x^2-6x+8$.

12. $9(x^2-x-8)+4|2|x-8|-1| \geqslant 9|x-8|+4|2x^2-2x-17|$.

Вариант 2

Решите неравенство.

1. $|2x+3|+|2x+7| \leqslant 16$.

2. $|x-2|+x+|x-3| > 4$.

3. $|6x+1| \leqslant 3|x-1|+|3x-4|$.

4. $4|x^2-x|-|4x-1| \geqslant 4x^2+2x$.

5. $|x^2-8x+4| \leqslant x-4$.

6. $|x^3-6x+14| \geqslant x^3+4x^2-14$.

7. $|14x^2+29x+12| \geqslant |2x^2-x|$.

8. $\dfrac{|x^2-4|}{x^2-4x+6} \geqslant 1$.

9. $\left|\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-1}\right| \geqslant 2$.

10. $\dfrac{(|x+4|-\sqrt{x+6})(|x+4|-2)}{|x+7|-|x+4|} \leqslant 0$.

11. $|2x^2-11x+15|+|x^2-4x+3| \leqslant x^2-7x+12$.

12. $7(x^2-x-18)+3|2|x-18|-3| \geqslant 7|x-18|+3|2x^2-2x-39|$.

Глава 5. Иррациональные неравенства

В соответствии с принятой в этой книге классификацией будем называть иррациональными алгебраические выражения вида $\sqrt[n]{f(x)}$ или вида $(f(x))^{\frac{p}{q}}$, где $f(x)$ — многочлен или алгебраическая дробь (т. е. рациональное алгебраическое выражение), n и q — натуральные числа, бо́льшие 1, $\dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь, $p \in \mathbb{Z}$. Неравенства, алгебраическая запись которых содержит иррациональные выражения (и наряду с ними, возможно, рациональные алгебраические выражения), называются иррациональными. Таким образом, круг иррациональных неравенств достаточно широк, а методы их решения основываются как на общих для числовых неравенств свойствах, так на определении и свойствах корней и степеней с дробным показателем. Приведём эти определения и свойства

Определение 1. Алгебраическим корнем n-й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) из числа a называется число b, n-я степень которого равна a. Арифметическим корнем n-й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) из числа a называется *неотрицательное* число b, n-я степень которого равна a.

Обозначается корень степени n так: $\sqrt[n]{a}$. Знак «$\sqrt[n]{}$» называется радикалом, n — показателем степени корня. Корень второй степени называется квадратным, при его обозначении степень корня не указывается: пишут $\sqrt{a}$, а не $\sqrt[2]{a}$. Корень третьей степени называется кубическим корнем и обозначается стандартным образом: $\sqrt[3]{a}$. Подавляющее большинство иррациональных уравнений и неравенств школьного курса связано именно с квадратными и (реже) кубическими корнями. Алгебраическое выражение $a(x)$ под знаком корня в записи вида $\sqrt[n]{a(x)}$ называется подкоренным выражением.

Замечание 1. Для записи алгебраического и арифметического корня используется один и тот же символ. Понятие арифметического корня вводится для того, чтобы сделать однозначным определение корня чётной степени: ведь чётные степени двух противоположных чисел одинаковы, и если при извлечении корня чётной степени не оговаривать, какое из них имеется в виду, это приведёт к различного рода противоречиям. Тем самым, когда говорят и пишут о корне чётной степени из числа, то всегда (если не оговорено противное) имеют в виду арифметический корень, который по определению является неотрицательным числом. Для корней нечётной степени обычно используют определение алгебраического корня. Таким образом, *корень лю-*

бой степени из неотрицательного числа является неотрицательным числом, корень нечётной степени из отрицательного числа является отрицательным числом.

Замечание 2. Краткое определение арифметического корня чётной степени можно записать так:

$$\sqrt[2n]{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b^{2n}, \\ b \geqslant 0 \end{cases}$$

(здесь $n \in \mathbb{N}$). Отсюда следует, что арифметический корень определён только для неотрицательных чисел. В самом деле, по определению $b \geqslant 0$, но $a = b^{2n}$, и, значит, $a \geqslant 0$. Поэтому область допустимых значений корня чётной степени $\sqrt[2n]{a(x)}$ находится из условия $a(x) \geqslant 0$ неотрицательности подкоренного выражения. Область определения корня нечётной степени $\sqrt[2n+1]{a(x)}$ (здесь $n \in \mathbb{N}$) такого ограничения не предполагает: он определён при любом значении переменной, для которого имеет смысл выражение $a(x)$.

Укажем теперь основные свойства арифметического корня (n и k — натуральные числа, бо́льшие 1, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$):

1) $\sqrt[n]{a^n} = a$;
2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$;
3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$;
4) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;
5) $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$;
6) $\sqrt[n]{a^l} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^l$ (если $l \leqslant 0$, то $a \neq 0$);
7) если $a < b$, то и $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Замечание 3. Если n и k — нечётные натуральные числа, бо́льшие 1, то приведённые свойства справедливы и для отрицательных a и b. Для корня нечётной степени укажем ещё одно полезное свойство: $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$ (знак «минус» можно «выносить» за знак корня нечётной степени и «вносить» под знак такого корня).

Замечание 4. При внесении множителя под знак корня чётной степени знак «минус» под корень не вносится, а остаётся перед корнем. При преобразовании числовых выражений проблем обычно нет: $-2\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = -\sqrt[4]{48}$, а вот при преобразовании буквенных встречаются ошибки. Так, например, если число a отрицательно, то $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$.

Операция возведения в натуральную степень вводилась в школьном курсе математики, в сущности, как сокращённая запись умножения одинаковых чисел: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n раз}}$ (здесь $n \in \mathbb{N}$). Затем для всех $a \neq 0$ это определение распространялось на степени с целым отрицательным показателем $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ и нулевую степень $a^0 = 1$. Для положительных чисел арифметический корень позволил распространить определение степени на степени с дробным показателем: $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k \in \mathbb{Z}$. В частности, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Кроме того, для положительных дробных степеней это определение распространяется ещё и на число 0: если $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k \in \mathbb{N}$, то $0^{\frac{k}{n}} = 0$.

Степень с дробным показателем часто называют степенью с рациональным показателем. Поскольку целые числа также являются рациональными, для однозначности в этой книге используется словосочетание «степень с дробным показателем». При этом дробь в показателе степени должна быть несократимой: показатели степени вида $\dfrac{3}{1}$, $\dfrac{4}{2}$ и т. п. будем считать целыми. Напомним, что несократимые дроби со знаменателями, которые являются произведениями натуральных степеней двойки и (или) пятёрки, могут быть записаны и в виде конечных десятичных дробей. Например, $3^{\frac{7}{40}} = 3^{\frac{175}{1000}} = 3^{0{,}175}$, а $7^{3{,}14} = 7^{3\frac{7}{50}} = 7^{\frac{157}{50}} = \sqrt[50]{7^{157}}$.

Свойства степени с дробным показателем аналогичны свойствам степени с целым показателем: если $a > 0$, $b > 0$, а n и m — рациональные числа, то

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}; \quad (a^n)^m = a^{nm};$$
$$a^n \cdot b^n = (ab)^n; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Замечание 5. Ещё раз обратим внимание на то, что степень с дробным показателем определена только для положительных чисел и — в случае положительных степеней — для числа 0. Казалось бы, что в некоторых случаях это определение можно распространить и на отрицательные числа. В самом деле, почему бы не считать, что $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^1} = \sqrt[3]{-8} = -2$? Ответ на этот вопрос довольно прост: если согласиться с таким равенством, то легко получить противоречие, ведь тогда, например, верно и то, что $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$. Итак, следует помнить: *степень с рациональным показателем опреде-*

ляется только для положительных чисел, а при положительных степенях — и для числа 0. Поэтому, в частности, области определения алгебраических выражений $\sqrt[2n+1]{a(x)}$ и $a^{\frac{1}{2n+1}}(x)$ различны: второе определено только при условии $a(x) \geqslant 0$ (здесь $n \in \mathbb{N}$). Из этого следует, что, например, неравенства $\sqrt[3]{x} \leqslant 2$ и $x^{\frac{1}{3}} \leqslant 2$ имеют разные множества решений: первое равносильно неравенству $x \leqslant 8$, а второе — системе неравенств $\begin{cases} x \leqslant 8, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$ Таким образом, множеством решений неравенства $\sqrt[3]{x} \leqslant 2$ является промежуток $(-\infty; 8]$, а множеством решений неравенства $x^{\frac{1}{3}} \leqslant 2$ — промежуток $[0; 8]$.

Видимо, в силу трудности усвоения указанных различий алгебраические выражения, содержащие переменную в основании степени с дробным показателем, в школьном курсе практически не встречаются. Не будет исключением и эта книга: за редкими (наиболее простыми) случаями иррациональные неравенства, содержащие такие выражения, в дальнейшем рассматриваться не будут.

§ 5.1. Простейшие иррациональные неравенства

Так же как и в случае неравенств с модулем, выделение группы иррациональных неравенств в качестве простейших является достаточно условным. К простейшим иррациональным неравенствам отнесём неравенства вида $\sqrt[n]{f(x)} \vee b$ или $(f(x))^{\frac{1}{n}} \vee b$, где b — действительное число, $f(x)$ — многочлен первой или второй степени, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Из определения степени с дробным показателем следует, что при $b > 0$ неравенства $(f(x))^{\frac{1}{n}} > b$ и $(f(x))^{\frac{1}{n}} \geqslant b$ равносильны неравенствам $f(x) > b^n$ и $f(x) \geqslant b^n$ соответственно, а неравенства $(f(x))^{\frac{1}{n}} < b$ и $(f(x))^{\frac{1}{n}} \leqslant b$ равносильны двойным неравенствам $0 \leqslant f(x) < b^n$ и $0 \leqslant f(x) \leqslant b^n$ соответственно (напомним, что вместо двойных неравенств можно использовать системы неравенств

$$\begin{cases} f(x) < b^n, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) \leqslant b^n, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

соответственно).

Итак, при $b > 0$ имеем

$$(f(x))^{\frac{1}{n}} > b \Leftrightarrow f(x) > b^n; \qquad (f(x))^{\frac{1}{n}} \geqslant b \Leftrightarrow f(x) \geqslant b^n; \tag{1}$$

$$(f(x))^{\frac{1}{n}} < b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < b^n, \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases} \qquad (f(x))^{\frac{1}{n}} \leqslant b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant b^n, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

При $b \leqslant 0$ тот или иной вывод о множестве решений неравенства $(f(x))^{\frac{1}{n}} \vee b$ делается в зависимости от знака неравенства. Если $b<0$, то неравенства $(f(x))^{\frac{1}{n}} > b$ и $(f(x))^{\frac{1}{n}} \geqslant b$ выполняются при всех значениях переменной, для которых $f(x) \geqslant 0$, а неравенства $(f(x))^{\frac{1}{n}} < b$ и $(f(x))^{\frac{1}{n}} \leqslant b$ не имеют решений. Соответственно, при $b=0$ справедливы следующие утверждения:

$$(f(x))^{\frac{1}{n}} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0; \quad (f(x))^{\frac{1}{n}} \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \geqslant 0;$$

$$(f(x))^{\frac{1}{n}} \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,$$

а неравенство $(f(x))^{\frac{1}{n}} < 0$ не имеет решений.

Решение неравенств вида $\sqrt[n]{f(x)} \vee b$ (как и большинства других иррациональных неравенств) существенным образом зависит от чётности или нечётности числа n и знака неравенства.

Если число n нечётно, т. е. $n=2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$\sqrt[2k+1]{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) > b^{2k+1}; \quad \sqrt[2k+1]{f(x)} \geqslant b \Leftrightarrow f(x) \geqslant b^{2k+1}; \quad (3)$$

$$\sqrt[2k+1]{f(x)} < b \Leftrightarrow f(x) < b^{2k+1}; \quad \sqrt[2k+1]{f(x)} \leqslant b \Leftrightarrow f(x) \leqslant b^{2k+1}. \quad (4)$$

Пусть теперь число n чётно, т. е. $n=2k$, $k \in \mathbb{N}$.

Тогда при $b \geqslant 0$ имеют место следующие равносильные переходы, основанные на общем правиле: если обе части неравенства неотрицательны, то при допустимых значениях переменной возведение их в чётную степень является равносильным преобразованием:

$$\sqrt[2k]{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) > b^{2k}; \qquad \sqrt[2k]{f(x)} \geqslant b \Leftrightarrow f(x) \geqslant b^{2k}; \qquad (5)$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} < b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < b^{2k}, \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases} \qquad \sqrt[2k]{f(x)} \leqslant b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant b^{2k}, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Заметим, что при решении неравенств (5) условие $f(x) \geqslant 0$ неотрицательности подкоренного выражения (ОДЗ неравенства) не записывается: оно является следствием того, что $b^{2k} \geqslant 0$, а $f(x) > b^{2k}$ или $f(x) \geqslant b^{2k}$. Заметим ещё, что при $b=0$ из равносильных переходов (5) и (6) (либо из свойств корня чётной степени) следует, что

$$\sqrt[2k]{f(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0; \quad \sqrt[2k]{f(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \geqslant 0;$$

неравенство $\sqrt[2k]{f(x)} < 0$ решений не имеет; неравенство $\sqrt[2k]{f(x)} \leqslant 0$ равносильно уравнению $f(x)=0$.

При $b<0$ неравенства $\sqrt[2k]{f(x)}>b$ и $\sqrt[2k]{f(x)}\geqslant b$ выполняются при любых допустимых значениях переменной, т. е. равносильны неравенству $f(x)\geqslant 0$, а неравенства $\sqrt[2k]{f(x)}<b$ и $\sqrt[2k]{f(x)}\leqslant b$ решений не имеют.

Пример 1. Решите неравенство $(2x-3)^{\frac{1}{3}}\leqslant 3$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2x-3\leqslant 3^3, \\ 2x-3\geqslant 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x\leqslant 15, \\ x\geqslant 1{,}5. \end{cases}$$

Ответ: [1,5; 15].

Пример 2. Решите неравенство $\sqrt[4]{x^2-x-4}\geqslant 2$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$x^2-x-4\geqslant 16,$$

откуда $x^2-x-20\geqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части полученного неравенства являются числа -4 и 5, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $(-\infty;\,-4]\cup[5;\,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\,-4]\cup[5;\,+\infty)$.

Пример 3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{4x-3}\leqslant 2, \\ (2x^2-5x+3)^{\frac{1}{3}}\leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. 1. Решим первое неравенство данной системы. Оно равносильно системе

$$\begin{cases} 4x-3\leqslant 4, \\ 4x-3\geqslant 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x\leqslant 1{,}75, \\ x\geqslant 0{,}75. \end{cases}$$

Множество решений неравенства — отрезок [0,75; 1,75].

2. Решим второе неравенство данной системы. Оно равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2x^2-5x+3\leqslant 1, \\ 2x^2-5x+3\geqslant 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} 2x^2-5x+2\leqslant 0, \\ 2x^2-5x+3\geqslant 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена в левой части первого неравенства полученной системы являются числа 0,5 и 2, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: [0,5; 2]. Корнями квадратного трёхчлена в левой части второго неравенства последней системы являются числа 1 и 1,5, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $(-\infty; 1]\cup[1{,}5; +\infty)$. Найдём множество решений второго неравенства данной системы как пересечение множеств $[0{,}5; 2]$ и $(-\infty; 1]\cup[1{,}5; +\infty)$. Получим множество $[0{,}5; 1]\cup[1{,}5; 2]$.

3. Множество решений данной системы находим как пересечение множеств $[0{,}75; 1{,}75]$ и $[0{,}5; 1]\cup[1{,}5; 2]$, которым является множество $[0{,}75; 1]\cup[1{,}5; 1{,}75]$.

Ответ: $[0{,}75; 1]\cup[1{,}5; 1{,}75]$.

Упражнения к § 5.1

Решите неравенство (систему неравенств).

1. а) $\sqrt[7]{4x-9}\geqslant 0$; **б)** $\sqrt[5]{7-4x}\geqslant 0$.

2. а) $\sqrt[3]{5-2x}>0$; **б)** $\sqrt[9]{2x+7}>0$.

3. а) $\sqrt[13]{5x+9}\leqslant 0$; **б)** $\sqrt[11]{6-5x}\leqslant 0$.

4. а) $\sqrt[5]{-11-4x}<0$; **б)** $\sqrt[3]{-13+4x}<0$.

5. а) $\sqrt[6]{7x-8}\geqslant 0$; **б)** $\sqrt[4]{-3-7x}\geqslant 0$.

6. а) $\sqrt{7-6x}>0$; **б)** $\sqrt{9x+8}>0$.

7. а) $\sqrt[4]{-3x-5}\leqslant 0$; **б)** $\sqrt[6]{11-6x}\leqslant 0$.

8. а) $\sqrt[18]{10x-9}<0$; **б)** $\sqrt[16]{11-10x}<0$.

9. а) $(7x-1)^{\frac{1}{7}}\geqslant 0$; **б)** $(1-9x)^{\frac{1}{9}}\geqslant 0$.

10. а) $(11-x)^{\frac{1}{11}}>0$; **б)** $(x+13)^{\frac{1}{13}}>0$.

11. а) $(14-x)^{\frac{1}{14}}\leqslant 0$; **б)** $(x-15)^{\frac{1}{15}}\leqslant 0$.

12. а) $(11x-13)^{-\frac{1}{3}}<0$; **б)** $(16x+11)^{-\frac{1}{6}}<0$.

13. а) $\sqrt[7]{7x-8}>-1$; **б)** $\sqrt[5]{5x-6}>-1$.

14. а) $\sqrt[8]{7x-8}>-1$; **б)** $\sqrt[6]{5x-6}>-1$.

15. а) $\sqrt[3]{9-x}\leqslant -4$; **б)** $\sqrt[3]{8-x}\leqslant -3$.

16. а) $\sqrt[4]{9-x}\leqslant -4$; **б)** $\sqrt[4]{8-x}\leqslant -3$.

17. а) $\sqrt[5]{2x+31}\geqslant 2$; **б)** $\sqrt[3]{29-4x}\geqslant 3$.

18. а) $\sqrt[3]{3x^2-x-66}>-4$; **б)** $\sqrt[3]{6x^2-x-9}>-2$.

19. а) $\sqrt[9]{9x^2-12x+5}\leqslant 1$; **б)** $\sqrt[7]{49x^2-14x+2}\leqslant 1$.

20. а) $\sqrt[5]{8x-x^2-17}<-1$; **б)** $\sqrt[7]{6x-x^2-10}<-1$.

21. а) $\sqrt[16]{4x-4x^2}\geqslant 1$; **б)** $\sqrt[14]{6x-9x^2}\geqslant 1$.

22. а) $\sqrt{x^2-5x+1}>5$; **б)** $\sqrt{x^2-4x-9}>6$.

23. **а)** $\sqrt[4]{x^2-24x}\leqslant 3$; **б)** $\sqrt[6]{x^2-12x}\leqslant 2$.

24. **а)** $\sqrt[28]{8x-x^2-15}<1$; **б)** $\sqrt[26]{10x-x^2-24}<1$.

25. **а)** $\sqrt[3]{6x-x^2}\leqslant 2$; **б)** $\sqrt[3]{9x-x^2}\leqslant 2$.

26. **а)** $\sqrt{x^2-144}\leqslant 5$; **б)** $\sqrt{x^2-25}\leqslant 12$.

27. **а)** $\sqrt{x^2-2x-15}<3$; **б)** $\sqrt{x^2-4x-5}<4$.

28. **а)** $\sqrt{3x^2-14x+51}\geqslant 6$; **б)** $\sqrt{4x^2-29x+61}\geqslant 3$.

29. **а)** $(x^2-9)^{\frac{1}{4}}\leqslant 2$; **б)** $(x^2-16)^{\frac{1}{2}}\leqslant 3$.

30. **а)** $(28x-x^2)^{\frac{1}{3}}\leqslant 3$; **б)** $(12x-x^2)^{\frac{1}{3}}\leqslant 3$.

31. **а)** $(x^2+6x-27)^{\frac{1}{3}}\leqslant 4$; **б)** $(x^2+8x-20)^{\frac{1}{3}}\leqslant 4$.

32. **а)** $\begin{cases}\sqrt{x-3}\leqslant 2,\\ \sqrt{12-x}\geqslant 3;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}\sqrt{x-4}\leqslant 9,\\ \sqrt{8-x}\geqslant 2.\end{cases}$

33. **а)** $\begin{cases}(7x-6)^{0,2}\geqslant 1,\\ (6x-5)^{0,1}\leqslant 1;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}(7x-13)^{0,25}\geqslant 1,\\ (3x-5)^{0,5}\leqslant 1.\end{cases}$

34. **а)** $\begin{cases}\sqrt{x-3}\leqslant 5,\\ (x^2-8x+15)^{\frac{1}{15}}\geqslant 0;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}\sqrt{x-2}\leqslant 4,\\ (x^2-10x+16)^{\frac{1}{16}}\geqslant 0.\end{cases}$

35. **а)** $\begin{cases}\sqrt[4]{12-9x-2x^2}\geqslant 2,\\ \sqrt[4]{18-5x-3x^2}\geqslant 2;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}\sqrt[4]{76+6x-x^2}\geqslant 3,\\ \sqrt[4]{83-x-x^2}\geqslant 3.\end{cases}$

Диагностическая работа 7

Вариант 1

Решите неравенство.

1. $\sqrt{x^2-15x-7}>3$.

2. $\sqrt[3]{3x-2x^2}\leqslant 1$.

3. $\sqrt{5x-4}<3$.

4. $\sqrt{x^2-7x+10}\leqslant 2$.

5. $\sqrt[6]{4x-x^2-3}<1$.

6. $\sqrt[4]{x^2-4x+85}\leqslant 3$.

7. $(7x-6)^{\frac{1}{76}}<1$.

8. $(x^2-36)^{0,5}\leqslant 8$.

Решите систему неравенств.

9. $\begin{cases}\sqrt{x-7}\leqslant 6,\\ \sqrt{23-x}\geqslant 4.\end{cases}$

10. $\begin{cases}(8x-7)^{0,2}\geqslant 1,\\ (5x-4)^{0,1}\leqslant 1.\end{cases}$

11. $\begin{cases}\sqrt{x-3}\leqslant 6,\\ (x^2-7x+12)^{\frac{1}{15}}\geqslant 0.\end{cases}$

12. $\begin{cases}\sqrt[4]{77-9x-2x^2}\geqslant 3,\\ \sqrt[4]{83-5x-3x^2}\geqslant 3.\end{cases}$

Вариант 2

Решите неравенство.

1. $\sqrt{x^2+17x-2}>4$.

2. $\sqrt[3]{9x-8x^2}\leqslant 1$.

3. $\sqrt{2x-7}<4$.

4. $\sqrt{x^2+6x-7}\leqslant 3$.

5. $\sqrt[4]{6x-x^2-8}<1$.

6. $\sqrt[6]{x^2+2x+65}\leqslant 2$.

7. $(6x-5)^{\frac{1}{65}}<1$.

8. $(x^2-64)^{0,5}\leqslant 6$.

Решите систему неравенств.

9. $\begin{cases}\sqrt{x-8}\leqslant 7,\\ \sqrt{33-x}\geqslant 5.\end{cases}$

10. $\begin{cases}(8x-15)^{0,25}\geqslant 1,\\ (4x-7)^{0,5}\leqslant 1.\end{cases}$

11. $\begin{cases}\sqrt{x-2}\leqslant 3,\\ (x^2-9x+14)^{\frac{1}{16}}\geqslant 0.\end{cases}$

12. $\begin{cases}\sqrt[4]{11+6x-x^2}\geqslant 2,\\ \sqrt[4]{18-x-x^2}\geqslant 2.\end{cases}$

§ 5.2. Более сложные иррациональные неравенства

Рассмотрим теперь методы решения более сложных иррациональных неравенств. Эти методы, как и методы решения простейших иррациональных неравенств, в большинстве случаев основываются на «рационализации» данного неравенства, т. е. приведении его тем или иным способом (равносильными преобразованиями, заменой переменной, знакотождественными заменами, применением свойств монотонных и ограниченных функций) к рациональному неравенству.

Равносильные преобразования

Равносильные преобразования иррациональных неравенств обычно связаны с возведением (иногда неоднократным) обеих частей неравенства в ту или иную степень, для того чтобы избавиться от знака радикала, т. е. рационализировать неравенство.

Неравенства вида $\sqrt[k]{f(x)}\vee g(x)$ и $\sqrt[k]{f(x)}\vee\sqrt[k]{g(x)}$, где $k\in\mathbb{N}$, $k>1$, отнесём к базовым: более сложные иррациональные неравенства и системы неравенств часто можно свести к решению одного или нескольких базовых неравенств.

Начнём с базовых неравенств, содержащих переменную под знаком корня нечётной степени. Напомним, что возведение обеих частей неравенства в нечётную степень является равносильным преобразованием при всех значениях переменной из области допустимых значений неравенства. Поэтому при $n\in\mathbb{N}$ справедливы следующие равносильные переходы:

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee g(x) \Leftrightarrow f(x) \vee (g(x))^{2n+1}; \tag{1}$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x). \tag{2}$$

Знак неравенства при таком преобразовании, разумеется, сохраняется.

Пример 1. Решите неравенство $\sqrt[3]{x^4-2x^3-x^2+3x-1} \leqslant x-1$.

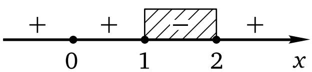
Решение. Выполним равносильное преобразование, возведя обе части данного неравенства в куб. Получим неравенство

$$x^4-2x^3-x^2+3x-1 \leqslant (x-1)^3,$$

откуда

$$x^4-2x^3-x^2+3x-1 \leqslant x^3-3x^2+3x-1.$$

Перенеся все слагаемые в левую часть и приведя подобные слагаемые, придём к неравенству $x^4-3x^3+2x^2 \leqslant 0$. Вынесем за скобки общий множитель: $x^2(x^2-3x+2) \leqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена x^2-3x+2 являются числа 1 и 2, поэтому последнее неравенство можно переписать в виде $x^2(x-1)(x-2) \leqslant 0$. Применим метод интервалов:



Ответ: $\{0\} \cup [1; 2]$.

Пример 2. Решите неравенство $\sqrt[3]{x-1} \geqslant \sqrt[3]{x^2+5x+3}$.

Решение. Выполнив возведение обеих частей неравенства в куб, получим равносильное неравенство $x-1 \geqslant x^2+5x+3$, откуда $x^2+4x+4 \leqslant 0$, или $(x+2)^2 \leqslant 0$. Последнее неравенство выполняется только при $x=-2$.

Ответ: $\{-2\}$.

Перейдём теперь к базовым неравенствам, содержащим переменную под знаком корня чётной степени. Возведение обеих частей таких неравенств в чётную степень является равносильным преобразованием при условии неотрицательности обеих частей неравенства и условии принадлежности переменной области допустимых значений неравенства. Поэтому решение неравенств вида $\sqrt[2n]{f(x)} \vee g(x)$ (здесь и далее $n \in \mathbb{N}$) сложнее решения аналогичных неравенств (1) с корнем нечётной степени в левой части: ведь теперь условия равносильности преобразований будут зависеть как от знака неравенства, так и от знака правой части неравенства — при обязательном требовании неотрицательности подкоренного выражения. Рассмотрим сначала неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} \leqslant g(x)$. Если $g(x) < 0$, то неравенство не имеет решений, так как его левая часть неотрицательна в силу неотрицательности корня чётной степени. Если $g(x) \geqslant 0$, то при допустимых значениях переменной (т. е. при выполнении условия $f(x) \geqslant 0$) обе части неравенства неотрицательны и возведение их в чётную степень является равносильным преобразованием. Поэтому

$$\sqrt[2n]{f(x)} \leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Аналогично если $g(x) \leqslant 0$, то неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$ не имеет решений в силу неотрицательности его левой части (заметим, что здесь уже неравенство для $g(x)$ является нестрогим в отличие от предыдущего случая — объясните почему!), а если $g(x) > 0$, то возведение обеих частей неравенства в чётную степень является равносильным преобразованием при допустимых значениях переменной:

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < (g(x))^{2n}, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

Для базовых неравенств противоположных знаков рассуждения остаются теми же и также зависят от знакоположительности или знакоотрицательности правой части неравенства. Если $g(x) \geqslant 0$, то обе части неравенства $\sqrt[2n]{f(x)} \geqslant g(x)$ неотрицательны при допустимых значениях переменной (т. е. при выполнении условия $f(x) \geqslant 0$) и возведение их в чётную степень является равносильным преобразованием. При этом условие $f(x) \geqslant 0$ неотрицательности подкоренного выражения можно опустить, поскольку оно будет следствием того, что $g(x) \geqslant 0$, а $f(x) \geqslant (g(x))^{2n}$. Если же $g(x) \leqslant 0$, то в силу неотрицательности корня чётной степени неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} \geqslant g(x)$ будет выполнено при всех допустимых значениях переменной, т. е. при условии $f(x) \geqslant 0$. Таким образом,

$$\sqrt[2n]{f(x)} \geqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right. \tag{5}$$

Проведя аналогичные рассуждения для строгого неравенства того же знака (сделайте это самостоятельно!), получим

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (6)$$

Приведённые схемы запоминать не обязательно, главное, помнить общее правило, заключающееся в обязательном рассмотрении нескольких случаев в зависимости от знака правой части неравенства: если она неотрицательна (положительна для неравенств вида (4)), то возведение обеих частей неравенства в чётную степень является равносильным преобразованием на ОДЗ неравенства, а если отрицательна (или равна нулю для неравенств вида (4)), то неравенство либо не имеет решений, либо выполняется для всех значений переменной из ОДЗ неравенства.

Осталось рассмотреть последнее базовое неравенство — неравенство вида $\sqrt[2n]{f(x)} \leqslant \sqrt[2n]{g(x)}$ или $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}$. Здесь все гораздо проще, поскольку обе части каждого из этих неравенств неотрицательны в силу неотрицательности корня чётной степени и их возведение в эту степень является равносильным преобразованием на ОДЗ неравенства:

$$\sqrt[2n]{f(x)} \leqslant \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases} \qquad (7)$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Обратим внимание на то, что условие неотрицательности $g(x)$ здесь опущено: ведь оно является следствием того, что $f(x) \geqslant 0$, а $g(x) \geqslant f(x)$ или $g(x) > f(x)$. Это нехитрое соображение (если меньшее из двух чисел неотрицательно, то и большее из них неотрицательно) позволяет избежать ненужного решения ещё одного неравенства и сэкономить время на экзамене.

Пример 3. Решите неравенство $\sqrt{2x-1} < x-2$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2x-1 < (x-2)^2, \\ 2x-1 \geqslant 0, \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < x^2-4x+4, \\ x \geqslant 0{,}5, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+5 > 0, \\ x > 2. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена x^2-6x+5 являются числа 1 и 5. Поэтому множество решений первого неравенства последней системы: $(-\infty;\,1)\cup(5;\,+\infty)$. С учётом второго неравенства этой системы получим, что $x\in(5;\,+\infty)$.

Ответ: $(5;\,+\infty)$.

Пример 4. Решите неравенство $\sqrt{6x^2-x-1}\leqslant x+1$.

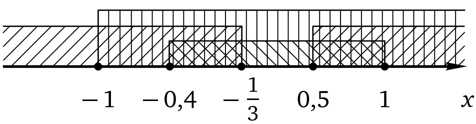
Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 6x^2-x-1\leqslant(x+1)^2,\\ 6x^2-x-1\geqslant 0,\\ x+1\geqslant 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы:

$$6x^2-x-1\leqslant(x+1)^2 \Leftrightarrow 6x^2-x-1\leqslant x^2+2x+1 \Leftrightarrow 5x^2-3x-2\leqslant 0.$$

Корнями квадратного трёхчлена $5x^2-3x-2$ являются числа $-0{,}4$ и 1. Поэтому множество решений неравенства — промежуток $[-0{,}4;\,1]$. Корнями квадратного трёхчлена $6x^2-x-1$ являются числа $-\frac{1}{3}$ и 0,5. Поэтому множество решений второго неравенства системы: $\left(-\infty;\,-\frac{1}{3}\right]\cup$ $\cup\,[0{,}5;\,+\infty)$. Множеством решений третьего неравенства системы является, очевидно, промежуток $[-1;\,+\infty)$. Остаётся найти множество решений всей системы:



Множество решений системы, а значит, и данного неравенства: $\left[-0{,}4;\,-\frac{1}{3}\right]\cup[0{,}5;\,1]$.

Ответ: $\left[-0{,}4;\,-\frac{1}{3}\right]\cup[0{,}5;\,1]$.

Пример 5. Решите неравенство $\sqrt{5-2x}>7-3x$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} 7-3x\geqslant 0,\\ 5-2x>(7-3x)^2 \end{cases} \quad\text{и}\quad \begin{cases} 7-3x<0,\\ 5-2x\geqslant 0. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} 7-3x\geqslant 0,\\ 5-2x>(7-3x)^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\leqslant\frac{7}{3},\\ 5-2x>9x^2-42x+49 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\leqslant\frac{7}{3},\\ 9x^2-40x+44<0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена $9x^2-40x+44$ являются числа 2 и $\frac{22}{9}$. Поэтому множество решений второго неравенства — промежуток $\left(2; \frac{22}{9}\right)$, а множество решений всей системы: $\left(2; \frac{7}{3}\right]$.

Решим вторую систему неравенств:

$$\begin{cases} 7-3x<0, \\ 5-2x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{7}{3}, \\ x\leqslant 2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{3}<x\leqslant 2{,}5.$$

Объединив найденные множества, получим $(2; 2{,}5]$.

Ответ: $(2; 2{,}5]$.

Пример 6. Решите неравенство $4\sqrt{x^2+2x-8}\geqslant 5x-4$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} 5x-4\geqslant 0, \\ 16(x^2+2x-8)\geqslant (5x-4)^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 5x-4<0, \\ x^2+2x-8\geqslant 0. \end{cases}$$

Решим второе неравенство первой системы:

$$16(x^2+2x-8)\geqslant (5x-4)^2 \Leftrightarrow 16x^2+32x-128\leqslant 25x^2-40x+16 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9x^2-72x+144\leqslant 0.$$

Разделив обе части последнего неравенства на 9, получим

$$x^2-8x+16\leqslant 0 \Leftrightarrow (x-4)^2\leqslant 0.$$

Единственным решением последнего неравенства является $x=4$. При этом первое неравенство первой системы, очевидно, выполнено. Итак, единственное решение первой системы неравенств — число 4.

Решим теперь второе неравенство второй системы. Корнями квадратного трёхчлена x^2+2x-8 являются числа -4 и 2. Поэтому множество решений этого неравенства: $(-\infty; -4]\cup[2; +\infty)$. Из первого неравенства второй системы получим, что $x<0{,}8$. Значит, множество решений второй системы неравенств — промежуток $(-\infty; -4]$, а множество решений данного неравенства: $(-\infty; -4]\cup\{4\}$.

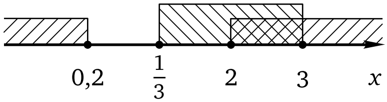
Ответ: $(-\infty; -4]\cup\{4\}$.

Пример 7. Решите неравенство $\sqrt{2x^2-x-1}\geqslant\sqrt{5x^2-11x+2}$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2x^2-x-1\geqslant 5x^2-11x+2, \\ 5x^2-11x+2\geqslant 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} 3x^2-10x+3\leqslant 0, \\ 5x^2-11x+2\geqslant 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена $3x^2-10x+3$ являются числа $\frac{1}{3}$ и 3. Поэтому множество решений первого неравенства полученной системы — промежуток $\left[\frac{1}{3};3\right]$. Корнями квадратного трёхчлена $5x^2-11x+2$ являются числа 0,2 и 2. Поэтому множество решений второго неравенства системы: $(-\infty;0{,}2]\cup[2;+\infty)$. Остаётся найти множество решений всей системы:



Ответ: $[2;3]$.

Как уже отмечалось, в более сложных случаях возведение обеих частей неравенства в степень приходится делать дважды. К стандартным неравенствам такого рода относятся неравенства вида

$$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\vee\sqrt{h(x)}$$

и сводимые к ним неравенства, в которых подкоренные выражения являются многочленами степени не выше первой. В неравенствах такого типа одно из подкоренных выражений может быть и многочленом нулевой степени, т. е. действительным числом, а два других при этом могут иметь степень выше первой (обычно — вторую). Обе части таких неравенств неотрицательны в силу неотрицательности квадратного корня, поэтому возведение их в квадрат является равносильным преобразованием на ОДЗ неравенства. Таким образом,

$$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\vee\sqrt{h(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)+g(x)+2\sqrt{f(x)g(x)}\vee h(x),\\ f(x)\geqslant 0,\\ g(x)\geqslant 0,\\ h(x)\geqslant 0,\end{cases}$$

откуда

$$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\vee\sqrt{h(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{f(x)g(x)}\vee h(x)-f(x)-g(x),\\ f(x)\geqslant 0,\\ g(x)\geqslant 0,\\ h(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

Первое неравенство последней системы является базовым и решается стандартным способом. Главное на этом шаге — не забыть рассмотреть все возможные варианты знаков правой части.

Пример 8. Решите неравенство $\sqrt{x+3}-\sqrt{x}<\sqrt{2x-1}$.

Р е ш е н и е. Сначала приведём данное неравенство к стандартному виду, для которого обе части неравенства будут неотрицательны на ОДЗ. Получим $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}>\sqrt{x+3}$. Последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x-1+x+2\sqrt{(2x-1)x}>x+3, \\ 2x-1\geqslant 0, \\ x\geqslant 0, \\ x+3\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2-x}>2-x, \\ x\geqslant 0{,}5. \end{cases}$$

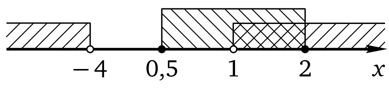
Полученное базовое неравенство решается стандартным образом: если его правая часть отрицательна, т. е. $x>2$, то оно выполняется при всех значениях переменной из ОДЗ неравенства; если его правая часть неотрицательна, то возведение обеих частей неравенства в квадрат является равносильным преобразованием. В результате приходим к совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} x>2, \\ x\geqslant 0{,}5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x^2-x>(2-x)^2, \\ x\leqslant 2, \\ x\geqslant 0{,}5. \end{cases}$$

Множество решений первой системы — промежуток $(2;+\infty)$. Вторая система легко приводится к виду

$$\begin{cases} x^2+3x-4>0, \\ 0{,}5\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена в левой части неравенства x^2+3x- $-4>0$ являются числа -4 и 1, поэтому множество решений этого неравенства — множество $(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$, а множество решений второй системы — промежуток $(1;2]$:



Объединив множества решений $(2;+\infty)$ и $(1;2]$ двух систем, получим $(1;+\infty)$.

Ответ: $(1;+\infty)$.

Пример 9. Решите неравенство $\sqrt{2x^2+9x+4}-1\geqslant\sqrt{2x^2-3x+1}$.

Р е ш е н и е. Приведём неравенство к стандартному виду, для которого обе части неравенства неотрицательны на ОДЗ. Получим

$$\sqrt{2x^2-3x+1}+1\leqslant\sqrt{2x^2+9x+4}.$$

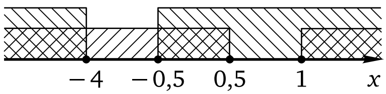
Последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^2-3x+1+2\sqrt{2x^2-3x+1}+1 \leqslant 2x^2+9x+4, \\ 2x^2-3x+1 \geqslant 0, \\ 2x^2+9x+4 \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2-3x+1} \leqslant 6x+1, \\ 2x^2-3x+1 \geqslant 0, \\ 2x^2+9x+4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена $2x^2-3x+1$ являются числа 0,5 и 1, поэтому множеством решений второго неравенства полученной системы является объединение промежутков $(-\infty; 0{,}5] \cup [1; +\infty)$. Корнями квадратного трёхчлена $2x^2+9x+4$ являются числа -4 и $-0{,}5$, поэтому множеством решений второго неравенства полученной системы является объединение промежутков $(-\infty; -4] \cup [-0{,}5; +\infty)$. Пересечением множеств решений второго и третьего неравенств последней системы (т. е. ОДЗ данного неравенства) является множество $(-\infty; -4] \cup$ $\cup\, [-0{,}5; 0{,}5] \cup [1; +\infty)$:



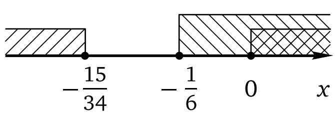
Осталось решить первое неравенство этой системы, которое на ОДЗ неравенства равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2x^2-3x+1 \leqslant (6x+1)^2, \\ 6x+1 \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 34x^2+15x \geqslant 0, \\ x \geqslant -\dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 34x\left(x+\dfrac{15}{34}\right) \geqslant 0, \\ x \geqslant -\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Множеством решений первого неравенства последней системы является объединение промежутков $\left(-\infty; -\dfrac{15}{34}\right] \cup [0; +\infty)$, а множеством решений всей системы — множество $[0; +\infty)$ $\left(\text{так как } -\dfrac{15}{34} < -\dfrac{1}{6}\right)$:



Для решения данного неравенства осталось найти пересечение множеств $[0;+\infty)$ и $(-\infty;-4]\cup[-0{,}5;0{,}5]\cup[1;+\infty)$. Этим пересечением является, очевидно, множество $[0;0{,}5]\cup[1;+\infty)$.

Ответ: $[0;0{,}5]\cup[1;+\infty)$.

Иногда приведение иррационального неравенства к стандартному виду (т. е. к виду, когда обе части неравенства неотрицательны на ОДЗ) является нецелесообразным, поскольку возведение в квадрат обеих частей неравенства приводит к высоким степеням переменной. В таких случаях можно выполнить возведение в квадрат, не приводя неравенство к стандартному виду. В этом случае обычно неравенство приводят к виду, когда одна из его частей неотрицательна на ОДЗ, и выполняют возведение в квадрат обеих частей неравенства при обязательном условии неотрицательности другой его части.

Пример 10. Решите неравенство $\sqrt{x^2-7x+10}\leqslant 2-\sqrt{x^2+x-2}$.

Р е ш е н и е. Если привести неравенство к стандартному виду

$$\sqrt{x^2-7x+10}+\sqrt{x^2+x-2}\leqslant 2,$$

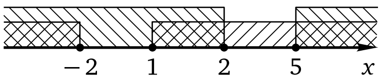
то последовательные преобразования, связанные с двукратным возведением в квадрат, приведут к неравенству четвёртой степени. Поэтому поступим иначе. Левая часть данного неравенства неотрицательна на ОДЗ в силу неотрицательности квадратного корня. Значит, если правая часть неравенства отрицательна, то неравенство не имеет решений. Если же правая часть неравенства неотрицательна, то возведение обеих частей неравенства в квадрат является равносильным преобразованием на ОДЗ неравенства. Таким образом, данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-7x+10\leqslant 4-4\sqrt{x^2+x-2}+x^2+x-2,\\ x^2+x-2\geqslant 0,\\ x^2-7x+10\geqslant 0,\\ 2-\sqrt{x^2+x-2}\geqslant 0, \end{cases}$$

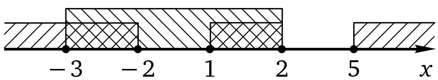
откуда

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x-2}\leqslant 2x-2,\\ x^2+x-2\geqslant 0,\\ x^2-7x+10\geqslant 0,\\ \sqrt{x^2+x-2}\leqslant 2. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена x^2+x-2 являются числа -2 и 1, поэтому множество решений второго неравенства полученной системы — множество $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$. Корнями квадратного трёхчлена $x^2-7x+10$ являются числа 2 и 5, поэтому множество решений второго неравенства полученной системы — множество $(-\infty; 2] \cup [5; +\infty)$. Пересечением множеств решений второго и третьего неравенств последней системы (т. е. ОДЗ данного неравенства) является множество $(-\infty; -2] \cup [1; 2] \cup [5; +\infty)$:



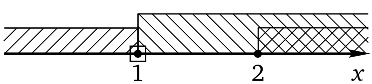
Четвёртое неравенство системы равносильно (на ОДЗ данного неравенства) неравенству $x^2+x-2 \leqslant 4$, откуда $x^2+x-6 \leqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена x^2+x-6 являются числа -3 и 2, а множеством решений последнего неравенства — отрезок $[-3; 2]$. Пересечением этого множества с множеством $(-\infty; -2] \cup [1; 2] \cup [5; +\infty)$ является множество $[-3; -2] \cup [1; 2]$:



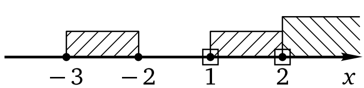
Осталось найти множество решений неравенства $\sqrt{x^2+x-2} \leqslant 2x-2$, которое на ОДЗ данного неравенства равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+x-2 \leqslant (2x-2)^2, \\ 2x-2 \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x^2-3x+2 \geqslant 0, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена x^2-3x+2 являются числа 1 и 2, поэтому множеством решений первого неравенства полученной системы будет $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$, а множеством решений всей системы — $\{1\} \cup \cup [2; +\infty)$:



Пересечение этого множества с множеством $[-3; -2] \cup [1; 2]$, т. е. $\{1; 2\}$, и является множеством решений данного неравенства:



Ответ: $\{1; 2\}$.

Для решения неравенств вида $f(x)\sqrt{g(x)} \vee 0$ можно рассмотреть два случая ($g(x)=0$ и $g(x)>0$) либо применить метод интервалов (см. соответствующий пункт ниже).

Пример 11. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{3x-1} \leqslant \dfrac{\sqrt{2x-3}}{2x+1}$.

Р е ш е н и е. Найдём ОДЗ неравенства. Она задаётся системой

$$\begin{cases} 2x-3 \geqslant 0, \\ x \neq \dfrac{1}{3}, \\ x \neq -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

откуда $x \geqslant 1{,}5$.

Ясно, что $x=1{,}5$ — решение неравенства. Пусть теперь $x>1{,}5$. Тогда $\sqrt{2x-3}>0$ и данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3x-1} \leqslant \dfrac{1}{2x+1}, \\ x > 1{,}5. \end{cases}$$

Первое неравенство системы легко решить методом интервалов, перенеся дробь из правой части в левую и приведя полученную разность дробей к общему знаменателю. Но в данном случае можно упростить решение, заметив, что $x>1{,}5$ и тогда $3x-1>0$ и $2x+1>0$. Значит, первое неравенство равносильно неравенству $2x+1 \leqslant 3x-1$, откуда $x \geqslant 2$. Таким образом, множеством решений данного неравенства является объединение $\{1{,}5\} \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $\{1{,}5\} \cup [2; +\infty)$.

Обратим внимание на то, что для решения неравенств вида $f(x)\sqrt{g(x)} \geqslant 0$ указанным способом всегда нужно рассматривать два случая:

$$1)\ g(x) = 0; \qquad 2)\ \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

(для неравенств вида $f(x)\sqrt{g(x)} \leqslant 0$ знак второго неравенства системы надо изменить на противоположный). При этом недостаточно заменить первое неравенство системы нестрогим и рассмотреть только этот случай, ведь нули подкоренного выражения вовсе не обязательно являются решениями второго неравенства системы. Поэтому, опустив первый случай, можно потерять решения данного неравенства.

Метод интервалов

Как уже отмечалось метод интервалов является, в сущности, единственным универсальным методом решения неравенств школьного курса математики. В частности, любой из примеров 1–10 предыдущего пункта мог быть решён с помощью метода интервалов, т. е. изложенные выше традиционные схемы решения стандартных иррациональных неравенств вполне можно было бы опустить; их наличие в этой книге — своего рода дань традиции

Для иррациональных неравенств алгоритм метода интервалов состоит из тех же четырёх стандартных шагов, как и для любых других: 1) находим ОДЗ неравенства; 2) с помощью равносильных преобразований приводим неравенство к виду $f(x) \vee 0$; 3) находим нули функции $f(x)$, т. е. корни уравнения $f(x)=0$; 4) отмечаем эти нули и ОДЗ неравенства на числовой прямой, в результате чего ОДЗ неравенства разбивается нулями функции $f(x)$ на несколько интервалов, затем определяем знак функции $f(x)$ на каждом из полученных интервалов по её знаку в одной из точек интервала (их иногда называют пробными) либо иным способом. Часто пункты 1 и 2 объединяют в один.

Пример 12. Решите неравенство $\sqrt{2x+7}-\sqrt{x} \geqslant \sqrt{x+3}$.

Р е ш е н и е. 1. Приведём неравенство к виду

$$\sqrt{2x+7}-\sqrt{x}-\sqrt{x+3} \geqslant 0,$$

обозначим его левую часть через $f(x)$ и найдём D_f — область определения функции $y=f(x)$, совпадающую в данном случае с ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} 2x+7 \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \\ x+3 \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда $x \geqslant 0$.

2. Найдём нули функции $f(x)$, т. е. корни уравнения $f(x)=0$. Для этого решим уравнение

$$\sqrt{2x+7}-\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=0$$

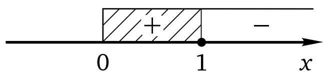
с помощью равносильных преобразований:

$$\sqrt{2x+7}-\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+7}=\sqrt{x}+\sqrt{x+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+7=x+x+3+2\sqrt{x(x+3)}, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(x+3)}=2, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x=4, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4=0, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x=1, \\ &x=-4, \end{aligned}\right. \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

3. Отметим D_f и нули функции $f(x)$ на числовой прямой и применим метод интервалов. Поскольку $f(x)=\sqrt{2x+7}-\sqrt{x}-\sqrt{x+3}$, в качестве пробных точек удобно брать такие, для которых хотя бы одно подкоренное выражение является полным квадратом. Например, $f(21)=7-\sqrt{21}-\sqrt{24}<0$, поскольку значение каждого корня больше 4, а $f(0)=\sqrt{7}-\sqrt{3}>0$ (вообще, когда это возможно, в качестве одной из пробных точек нужно брать не являющуюся нулём функции граничную точку её области определения: это упрощает вычисления):



Ответ: [0; 1].

Для решения неравенств вида $f(x)\sqrt{g(x)}\vee 0$, как уже отмечалось, можно рассмотреть два случая ($g(x)=0$ и $g(x)>0$) — пример решения рассмотрен выше — либо применить метод интервалов.

Пример 13. Решите неравенство $(2x^2-5x-25)\sqrt{2x^2-11x+5}\leqslant 0$.

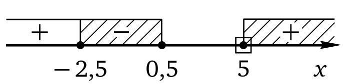
Р е ш е н и е. 1. Обозначим левую часть неравенства через $f(x)$ и найдём D_f — область определения функции $y=f(x)$. Она задаётся неравенством $2x^2-11x+5\geqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена $2x^2-11x+5$ являются числа 0,5 и 5, а множеством решений неравенства — множество $(-\infty;0{,}5]\cup[5;+\infty)$.

2. Найдём нули функции $f(x)$, которыми являются корни уравнения

$$(2x^2-5x-25)\sqrt{2x^2-11x+5}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x^2-5x-25=0, \\ 2x^2-11x+5=0, \end{array}\right. \\ 2x^2-11x+5\geqslant 0. \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения $2x^2-11x+5=0$ уже найдены: это числа 0,5 и 5. Корнями квадратного уравнения $2x^2-5x-25=0$ являются числа $-2{,}5$ и 5. Оба эти числа принадлежат D_f и, следовательно, удовлетворяют неравенству $2x^2-11x+5\geqslant 0$.

3. Отметим D_f и нули функции $f(x)$ на числовой прямой и применим метод интервалов, учитывая, что $\sqrt{2x^2-11x+5}\geqslant 0$ при всех $x\in D_f$, а знаки квадратного трёхчлена $2x^2-5x-25$ определяются стандартным образом:



Заметим, что в отличие от предыдущего примера граничные точки области определения являются ещё и нулями функции $f(x)$ и, значит, обязательно должны быть включены в ответ.

Ответ: $[-2{,}5; 0{,}5] \cup \{5\}$.

Иногда, прежде чем применять метод интервалов, необходимо сделать некоторые предварительные алгебраические преобразования.

Пример 14. Решите неравенство $\dfrac{-6+\sqrt{35x-19}}{11} \leqslant \dfrac{x+1}{4x-5}$.

Р е ш е н и е. Умножив обе части неравенства на 11, получим

$$-6+\sqrt{35x-19} \leqslant \frac{11x+11}{4x-5},$$

откуда

$$\frac{11x+11}{4x-5}+6 \geqslant \sqrt{35x-19} \Leftrightarrow \frac{35x-19}{4x-5} \geqslant \sqrt{35x-19} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{35x-19}{4x-5} - \sqrt{35x-19} \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{35x-19}\left(\frac{\sqrt{35x-19}}{4x-5}-1\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{35x-19}\cdot\frac{\sqrt{35x-19}-4x+5}{4x-5} \geqslant 0.$$

Для решения полученного неравенства применим метод интервалов.

1. Обозначим левую часть неравенства через $f(x)$ и найдём D_f — область определения функции $y=f(x)$. Она задаётся системой неравенств $\begin{cases} x \geqslant \dfrac{19}{35}, \\ x \neq \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

2. Найдём нули функции $f(x)$, которыми являются корни уравнения

$$\sqrt{35x-19}\cdot\frac{\sqrt{35x-19}-4x+5}{4x-5} = 0,$$

принадлежащие D_f. Приходим к системе

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &\sqrt{35x-19}-4x+5=0, \\ &x=\frac{19}{35}, \end{aligned}\right. \\ x \geqslant \dfrac{19}{35}, \\ x \neq \dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Решим первое уравнение:

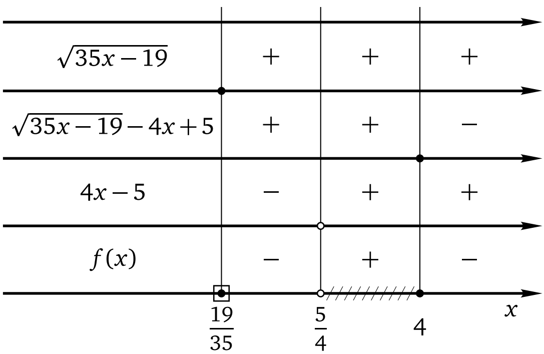
$$\sqrt{35x-19}-4x+5=0 \Leftrightarrow \sqrt{35x-19}=4x-5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 35x-19=(4x-5)^2, \\ 4x-5 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 35x-19=16x^2-40x+25, \\ x \geqslant \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2-75x+44=0, \\ x \geqslant \dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Корнями уравнения $16x^2-75x+44=0$ являются числа $\frac{11}{16}$ и 4, из которых только второе удовлетворяет условию $x \geqslant \frac{5}{4}$. Итак, нулями функции $f(x)$ являются числа $\frac{19}{35}$ и 4.

3. Отметим D_f и нули функции $f(x)$ на числовой прямой и применим метод интервалов для решения неравенства $f(x) \geqslant 0$, определив знаки каждого множителя в числителе и знаменателя по отдельности:



Заметим, что для определения знаков выражения $\sqrt{35x-19}-4x+5$ удобно взять в качестве пробных точки $\frac{19}{35}$ и 5.

Ответ: $\left\{\dfrac{19}{35}\right\} \cup \left(\dfrac{5}{4}; 4\right]$.

Метод знакотождественных множителей

Метод знакотождественных множителей (см. § 1.6) достаточно эффективен при решении некоторых типов иррациональных неравенств. Напомним, что он позволяет любой из множителей в левой части неравенства вида

$$a_1(x)\cdot a_2(x)\cdot \ldots \cdot a_n(x) \vee 0 \quad \text{или} \quad \frac{a_1(x)\cdot a_2(x)\cdot \ldots \cdot a_n(x)}{a_{n+1}(x)\cdot a_{n+2}(x)\cdot \ldots \cdot a_{n+m}(x)} \vee 0$$

заменить знакотождественным. Для решения иррациональных неравенств обычно используют то, что знакотождественными являются следующие алгебраические выражения: 1) разность (сумма) двух корней одной и той же нечётной степени и соответственно разность (сумма) подкоренных выражений: 2) разность двух корней одной и той же чётной степени и разность подкоренных выражений при условии неотрицательности каждого из них. Кроме того, полезно помнить, что разность двух неотрицательных при любом допустимом значении переменной алгебраических выражений и разность двух одинаковых чётных степеней этих выражений знакотождественны на ОДЗ неравенств указанного вида (например, $\operatorname{sign}\left(|f(x)|-\sqrt{g(x)}\,\right)=\operatorname{sign}(f^2(x)-g(x))$ при условии $g(x)\geqslant 0$).

Пример 15. Решите неравенство

$$(2x^2-15x+18)(\sqrt{2x-3}-\sqrt[4]{9x+4})\leqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Левая часть неравенства определена при всех $x\geqslant 1{,}5$. В этом случае $\sqrt{2x-3}=\sqrt[4]{(2x-3)^2}$, поэтому

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt[4]{9x+4}=\sqrt[4]{(2x-3)^2}-\sqrt[4]{9x+4},$$

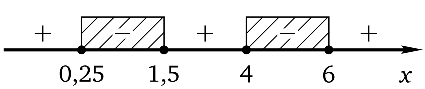
и полученную разность двух корней четвёртой степени можно заменить знакотождественной ей на ОДЗ неравенства разностью подкоренных выражений. Получим систему неравенств

$$\begin{cases}(2x^2-15x+18)((2x-3)^2-(9x+4))\leqslant 0,\\ x\geqslant 1{,}5,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}(2x^2-15x+18)(4x^2-21x+5)\leqslant 0,\\ x\geqslant 1{,}5.\end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена $2x^2-15x+18$ являются числа 1,5 и 6. Корнями квадратного трёхчлена $4x^2-21x+5$ являются числа 0,25 и 5. Разложив эти трёхчлены на множители, первое неравенство системы можно привести к виду $2(x-1{,}5)(x-6)\cdot 4(x-0{,}25)(x-4)\leqslant 0$, или $(x-1{,}5)(x-6)(x-0{,}25)(x-4)\leqslant 0$. Решим полученное неравенство методом интервалов:



Множество решений этого неравенства: $[0{,}25; 1{,}5] \cup [5; 6]$. С учётом второго неравенства $x \geqslant 1{,}5$ найдём, что множеством решений системы, а значит, и данного неравенства будет объединение $\{1{,}5\} \cup [5; 6]$.

Ответ: $\{1{,}5\} \cup [5; 6]$.

Другие примеры применения метода знакотождественных множителей к решению иррациональных неравенств см. в § 1.6 (примеры 5, 6, 7, 10). Отметим ещё, что метод знакотождественных множителей может быть использован и как вспомогательная составная часть решения некоторых иррациональных неравенств, например тех, идея решения которых основана на введении новой переменной.

Метод введения новой переменной

Наиболее часто встречающиеся иррациональные неравенства, которые решаются с помощью введения новой переменной, — это неравенства вида $af(x) + b\sqrt{f(x)} + c \vee 0$ (в этом случае используется замена $z = \sqrt{f(x)}$, $z \geqslant 0$, после которой неравенство сводится к квадратному относительно z), а также неравенства вида $a\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}} + b\sqrt{\dfrac{g(x)}{f(x)}} + c \vee 0$ (в этом случае неравенство сводится к квадратному после замены $z = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$, $z > 0$). В обоих случаях после разложения квадратного относительно z трёхчлена на множители можно либо сразу сделать обратную замену, после чего применить метод знакотождественных множителей и рационализировать неравенство, либо сначала перейти к системе или совокупности линейных относительно z неравенств, равносильной полученному квадратному неравенству, а уже после этого сделать обратную замену и получить два простейших иррациональных неравенства.

Пример 16. Решите неравенство

$$5x^2 + 20x + 8\sqrt{-3 - 4x - x^2} + 12 \leqslant 0.$$

Решение. Заметим, что $5x^2 + 20x = 5(x^2 + 4x + 3) - 15$. Поэтому если обозначить $\sqrt{-3-4x-x^2}$ через t (здесь $t \geqslant 0$), то $t^2 = -3-4x-x^2$, откуда $x^2 + 4x + 3 = -t^2$. Тогда данное неравенство можно переписать в виде $-5t^2 - 15 + 8t + 12 \leqslant 0$, или $5t^2 - 8t + 3 \geqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена $5t^2 - 8t + 3$ являются числа $\dfrac{3}{5}$ и 1. Разложив этот трёхчлен на множители, получим $5\left(t - \dfrac{3}{5}\right)(t - 1) \geqslant 0$, или $(5t - 3)(t - 1) \geqslant 0$. Сделаем обратную замену и применим метод знакотождественных множителей:

$$(5\sqrt{-3-4x-x^2}-3)(\sqrt{-3-4x-x^2}-1)\geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(25(-3-4x-x^2)-9)(-3-4x-x^2-1)\geqslant 0,\\ -3-4x-x^2\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

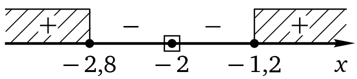
$$\Leftrightarrow \begin{cases}(-84-100x-25x^2)(-4-4x-x^2)\geqslant 0,\\ x^2+4x+3\leqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(25x^2+100x+84)(x^2+4x+4)\geqslant 0,\\ x^2+4x+3\leqslant 0.\end{cases}$$

Решим первое неравенство системы. Корнями квадратного трёхчлена $25x^2+100x+84$ являются числа $-2{,}8$ и $-1{,}2$, а $x^2+4x+4=$ $=(x+2)^2$. Поэтому первое неравенство можно переписать в виде

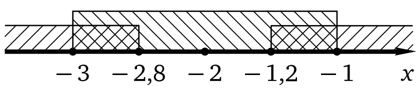
$$25(x+2{,}8)(x+1{,}2)(x+2)^2\geqslant 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Получим множество $(-\infty;\,-2{,}8]\cup\{-2\}\cup[-1{,}2;\,+\infty)$.

Решим второе неравенство системы. Корнями квадратного трёхчлена x^2+4x+3 являются числа -3 и -1, а множеством решений неравенства — отрезок $[-3;\,-1]$. Осталось найти пересечение полученных множеств $(-\infty;\,-2{,}8]\cup\{-2\}\cup[-1{,}2;\,+\infty)$ и $[-3;\,-1]$:



Этим пересечением является множество $[-3;\,-2{,}8]\cup\{-2\}\cup[-1{,}2;\,-1]$.

Ответ: $[-3;\,-2{,}8]\cup\{-2\}\cup[-1{,}2;\,-1]$.

Пример 17. Решите неравенство $2\cdot\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}}+\sqrt{\dfrac{x+1}{2x-1}}\geqslant 3$.

Р е ш е н и е. Введём новую переменную $t=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}}$, $t>0$. Получим систему

$$\begin{cases}2t+\dfrac{1}{t}\geqslant 3,\\ t>0.\end{cases}$$

Поскольку $t>0$, обе части первого неравенства системы можно умножить на t, после чего система легко приводится к виду

$$\begin{cases}2t^2-3t+1\geqslant 0,\\ t>0.\end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена $2t^2-3t+1$ являются числа $\frac{1}{2}$ и 1. Поэтому множество решений первого неравенства системы — $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right] \cup$ $\cup\,[1;+\infty)$. Таким образом,

$$\begin{cases}\left[\begin{aligned}&t \leqslant 0{,}5,\\&t \geqslant 1,\end{aligned}\right.\\ t>0.\end{cases}$$

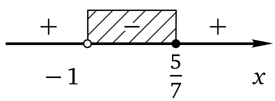
Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases}\left[\begin{aligned}&\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} \leqslant \frac{1}{2},\\&\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} \geqslant 1,\end{aligned}\right.\\ \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{aligned}&\frac{2x-1}{x+1} \leqslant \frac{1}{4},\\&\frac{2x-1}{x+1} \geqslant 1,\end{aligned}\right.\\ \frac{2x-1}{x+1} > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{aligned}&\frac{2x-1}{x+1}-\frac{1}{4} \leqslant 0,\\&\frac{2x-1}{x+1}-1 \geqslant 0,\end{aligned}\right.\\ \frac{2x-1}{x+1} > 0.\end{cases}$$

Приведя дроби в левой части каждого из неравенств совокупности к общему знаменателю, после упрощений получим

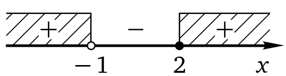
$$\begin{cases}\left[\begin{aligned}&\frac{7x-5}{x+1} \leqslant 0,\\&\frac{x-2}{x+1} \geqslant 0,\end{aligned}\right.\\ \frac{2x-1}{x+1} > 0.\end{cases}$$

Решим первое неравенство совокупности:



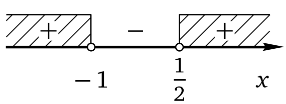
Получим $\left(-1;\ \frac{5}{7}\right]$.

Решим второе неравенство совокупности:



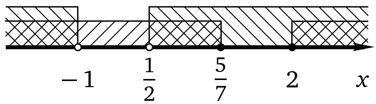
Получим $(-\infty;-1)\cup[2;+\infty)$.

Решим третье неравенство системы:



Получим $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Найдём множество решений всей системы:



Получим $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{7}\right] \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{7}\right] \cup [2; +\infty)$.

Разумеется, типы иррациональных неравенств, которые целесообразно решать с помощью введения новой переменной, не исчерпываются двумя рассмотренными.

Пример 18. Решите неравенство

$$\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}} \geqslant 5.$$

Решение. Введём новую переменную $z=\sqrt{x+1}$, $z \geqslant 0$. Тогда $z^2 = x+1$, откуда $x=z^2-1$. Неравенство примет вид

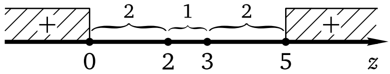
$$\sqrt{z^2-1+5-4z}+\sqrt{z^2-1+10-6z} \geqslant 5,$$

откуда

$$\sqrt{z^2-4z+4}+\sqrt{z^2-6z+9} \geqslant 5,$$

или $\sqrt{(z-2)^2}+\sqrt{(z-3)^2} \geqslant 5$, и, значит, $|z-2|+|z-3| \geqslant 5$. Для решения полученного неравенства воспользуемся геометрическим смыслом модуля. Левая часть неравенства равна сумме расстояний от точки z числовой оси до точек 2 и 3. Для того чтобы решить неравенство, найдём сначала точки z числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек 2 и 3 равна 5. Понятно, что на отрезке $[2; 3]$ искомых точек быть не может, поскольку сумма расстояний от любой точки отрезка до его концов равна длине отрезка и в данном случае равна 1. Значит, искомые точки лежат вне отрезка. Рассмотрим точку, лежащую правее точки 3 на числовой оси. Сумма расстояний от этой точки до концов отрезка складывается из длины отрезка и удвоенного расстояния от этой точки до точки 3. Таким образом, это удвоенное расстояние равно $5-1=4$, и искомая точка находится правее точки 3 на расстоянии $4:2=2$ от неё. Следовательно, первая из искомых точек — это $z=5$. Абсолютно аналогично получаем, что вторая искомая точка находится на числовой оси левее точки 2 на расстоянии 2 от неё. Следовательно, вторая из искомых точек — это $z=0$. Поэтому все точки

z числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек 2 и 3 больше 5, лежат либо правее точки $z=5$, либо левее точки $z=0$:



Значит, множеством решений неравенства $|z-2|+|z-3|\geqslant 5$ является $(-\infty;\,0]\cup[5;\,+\infty)$. Итак,

$$\begin{cases}\left[\begin{aligned}&z\leqslant 0,\\&z\geqslant 5,\end{aligned}\right.\\ z\geqslant 0,\end{cases}\quad \text{откуда}\quad \left[\begin{aligned}&z=0,\\&z\geqslant 5.\end{aligned}\right.$$

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{aligned}&\sqrt{x+1}=0,\\&\sqrt{x+1}\geqslant 5\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x+1=0,\\&x+1\geqslant 25\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=-1,\\&x\geqslant 24.\end{aligned}\right.$$

Ответ: $\{-1\}\cup[24;\,+\infty)$.

В некоторых случаях замена переменной может играть вспомогательную роль, позволяя понять, как «устроено» неравенство, и найти ключ к решению.

Пример 19. Решите неравенство

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2-3x+2}<2x-3.$$

Решение. Правая часть неравенства равна сумме двух первых подкоренных выражений в левой части, а третье подкоренное выражение в левой части равно их произведению. Поэтому если обозначить $\sqrt{x-2}$ через a (здесь $a\geqslant 0$), а $\sqrt{x-1}$ через b (ясно, что и $b\geqslant 0$), то неравенство можно переписать в виде $a-b+2ab<a^2+b^2$, откуда $a-b<a^2-2ab+b^2$, или $a-b<(a-b)^2$. Если теперь обозначить $a-b$ через z, то получим неравенство $z<z^2$, откуда $z(z-1)>0$, и, значит, $\left[\begin{aligned}&z<0,\\&z>1.\end{aligned}\right.$ Сделав обратные замены, получим последовательно:

$$\left[\begin{aligned}&a-b<0,\\&a-b>1\end{aligned}\right. \quad\text{и}\quad \left[\begin{aligned}&\sqrt{x-2}-\sqrt{x-1}<0,\\&\sqrt{x-2}-\sqrt{x-1}>1,\end{aligned}\right. \quad\text{откуда}\quad \left[\begin{aligned}&\sqrt{x-2}<\sqrt{x-1},\\&\sqrt{x-2}>\sqrt{x-1}+1.\end{aligned}\right.$$

Неравенства последней совокупности можно даже не решать: ведь при любых допустимых значениях переменной $\sqrt{x-2}<\sqrt{x-1}$, поскольку число под корнем в левой части меньше числа под корнем в правой части! Значит, первое неравенство совокупности выполняется при всех допустимых значениях переменной (т. е. при $x \geqslant 2$), а второе не выполняется ни при каких её значениях.

Ответ: $[2; +\infty)$.

Пример 20. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2-10x+24} \leqslant \sqrt{2x^2-18x+39}.$$

Решение. Подкоренное выражение в правой части неравенства равно сумме подкоренных выражений левой части, т. е. неравенство имеет вид $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant \sqrt{a+b}$. На ОДЗ неравенства (т. е. при $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$) обе его части неотрицательны, поэтому возведение их в квадрат будет равносильным преобразованием, после которого придём к неравенству $a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b \leqslant a+b$, откуда $\sqrt{a}\sqrt{b} \leqslant 0$. В силу неотрицательности арифметического квадратного корня последнее неравенство будет выполняться только в двух случаях:

$$1)\ \begin{cases} a=0, \\ b \geqslant 0, \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} b=0, \\ a \geqslant 0. \end{cases}$$

Рассмотрим оба случая, выполнив обратные замены. В первом случае получим систему

$$\begin{cases} x^2-8x+15=0, \\ x^2-10x+24 \geqslant 0. \end{cases}$$

Корнями уравнения системы являются числа 3 и 5, из которых только 3 удовлетворяет неравенству системы. Во втором случае получим систему

$$\begin{cases} x^2-10x+24=0, \\ x^2-8x+15 \geqslant 0. \end{cases}$$

Корнями уравнения системы являются числа 4 и 6, из которых только 6 удовлетворяет неравенству системы.

Ответ: $\{-3; 6\}$.

Пример 21. Решите неравенство

$$\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{4x^2+3x+2} \leqslant \sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{2x^2+2x+5}.$$

Решение. Заметим, что все подкоренные выражения являются квадратными трёхчленами, которые положительны при любом значении переменной, поскольку их дискриминанты отрицательны, а старшие коэффициенты положительны. Неравенство имеет вид $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant \sqrt{c}+\sqrt{d}$, причём $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ и $a-c=b-d$. Перепишем его в виде $(\sqrt{a}-\sqrt{c})+(\sqrt{b}-\sqrt{d})\leqslant 0$. Умножим и разделим каждую разность корней в скобках на сумму этих корней:

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{d})(\sqrt{b}+\sqrt{d})}{\sqrt{b}+\sqrt{d}}\leqslant 0,$$

откуда $\dfrac{a-c}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\dfrac{b-d}{\sqrt{b}+\sqrt{d}}\leqslant 0$, и, поскольку $a-c=b-d$, получим неравенство $\dfrac{a-c}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\dfrac{a-c}{\sqrt{b}+\sqrt{d}}\leqslant 0$. Вынесем за скобки общий множитель:

$$(a-c)\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{d}}\right)\leqslant 0.$$

Поскольку $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{d}}>0$, приходим к неравенству $a-c\leqslant 0$, откуда $a\leqslant c$. Таким образом,

$$\sqrt{3x^2+2x+1}\leqslant\sqrt{x^2+x+4}\Leftrightarrow 3x^2+2x+1\leqslant x^2+x+4\Leftrightarrow 2x^2+x-3\leqslant 0.$$

Корнями квадратного трёхчлена $2x^2+x-3$ являются числа $-1{,}5$ и 1. Поэтому множество решений последнего неравенства — отрезок $[-1{,}5;\,1]$.

Ответ: $[-1{,}5;\,1]$.

В заключение этого пункта рассмотрим пример, в котором замена переменной помогает найти корни уравнения, с тем чтобы решить неравенство методом интервалов.

Пример 22. Решите неравенство $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{2-x}\leqslant 1$.

Р е ш е н и е. Перепишем неравенство в виде $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{2-x}-1\leqslant 0$, обозначим левую часть полученного неравенства через $f(x)$ и применим метод интервалов к решению неравенства $f(x)\leqslant 0$. Найти D_f не представляет труда: $D_f=(-\infty;\,2]$. Найдём нули функции $f(x)$. Для этого решим уравнение $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{2-x}-1=0$. Заметим, что сумма подкоренных выражений равна 1. Пусть $\sqrt[3]{x-1}=a$, $\sqrt{2-x}=b$. Тогда

$$\begin{cases} a+b=1,\\ a^3+b^2=1,\\ b\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=1-a,\\ a^3+(1-a)^2=1,\\ 1-a\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=1-a,\\ a^3+a^2-2a+1=1,\\ a\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} b=1-a,\\ a^3+a^2-2a=0,\\ a\leqslant 1.\end{cases}$$

Второе уравнение системы легко приводится к виду $a(a^2+a-2)=0$, откуда

$$\left[\begin{array}{l} a=0, \\ a^2+a-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a=1, \\ a=-2. \end{array}\right.$$

Все три корня удовлетворяют неравенству $a \leqslant 1$. Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x-1}=0, \\ \sqrt[3]{x-1}=1, \\ \sqrt[3]{x-1}=-2, \end{array}\right. \quad \text{откуда} \quad \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2, \\ x=-7. \end{array}\right.$$

Применим метод интервалов. Знак функции $f(x)$ на каждом интервале определим, выбирая удобные пробные точки, например такие, при которых кубический корень является рациональным числом. На интервале $(1;2)$ возьмём точку $\frac{9}{8}$. Тогда

$$f\left(\frac{9}{8}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{7}{8}}-1=\sqrt{\frac{7}{8}}-\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{7}{8}}-\sqrt{\frac{2}{8}}>0.$$

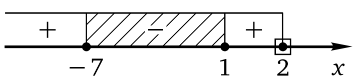
На интервале $(-7;1)$ возьмём точку 0. Тогда

$$f(0)=-1+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-2<0.$$

На интервале $(-\infty;-7)$ возьмём точку -26. Тогда

$$f(-26)=-3+\sqrt{28}-1=\sqrt{28}-4>0.$$

Таким образом, получаем



Множеством решений неравенства является объединение $[-7;1]\cup\cup\{2\}$.

Ответ: $[-7;1]\cup\{2\}$.

Исследование ОДЗ неравенства

Существует не слишком многочисленная группа иррациональных неравенств, единственным ключом к решению которых является исследование ОДЗ неравенства. Это, как правило, относительно громоздкие неравенства, ОДЗ которых состоит всего из нескольких чисел. Найдя эти числа, нужно проверить, какие из них являются решениями неравенства, а какие — нет.

Пример 23. Решите неравенство

$$x+\sqrt{(3x^2-4x-7)(x^2-3x+2)}<1+\sqrt{(1-x^2)(3x^2-13x+14)}.$$

Р е ш е н и е. Разложим выражения в скобках на линейные множители, найдя корни квадратных трёхчленов. Получим неравенство

$$x+\sqrt{3(x+1)\left(x-\frac{7}{3}\right)(x-1)(x-2)}<1+\sqrt{-3(x+1)(x-1)\left(x-\frac{7}{3}\right)(x-2)}.$$

ОДЗ неравенства задаётся системой

$$\begin{cases}(x+1)\left(x-\frac{7}{3}\right)(x-1)(x-2)\geqslant 0,\\ (x+1)\left(x-\frac{7}{3}\right)(x-1)(x-2)\leqslant 0,\end{cases}$$

откуда $(x+1)\left(x-\frac{7}{3}\right)(x-1)(x-2)=0$. Таким образом, ОДЗ неравенства состоит из четырёх чисел -1, 1, 2, $\frac{7}{3}$. Легко (поскольку для любого из этих чисел каждый из корней обращается в нуль) проверить, что только -1 является решением данного неравенства.

Ответ: $\{-1\}$.

Применение свойств функций

Рассмотрим несколько примеров применения свойств монотонности и ограниченности функций к решению иррациональных неравенств (более подробно об этом см. в § 1.5). Напомним, что функция $y=\sqrt[n]{x}$ (n — натуральное число; $n>1$) монотонно возрастает на своей области определения, а характер монотонности функции $y=k\sqrt[n]{ax+b}+l$ зависит от знаков коэффициентов k и a: если $ak>0$, то эта функция монотонно возрастает, а если $ak<0$ — монотонно убывает на своей области определения. Заметим, что даже вполне стандартные по внешнему виду неравенства можно решить с помощью свойств монотонных функций.

Пример 24. Решите неравенство $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}<3$.

Р е ш е н и е. Пусть $f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}$. Функция $y=f(x)$ монотонно возрастает на всей области определения $D_f=[-2;+\infty)$. Поскольку $f(-1)=3$, неравенство $f(x)<3$ будет выполнено при всех $x<-1$, принадлежащих D_f, т. е. при всех $x\in[-2;-1)$.

Ответ: $[-2;-1)$.

Аналогично решаются и некоторые несколько более сложные неравенства.

Пример 25. Решите неравенство $\sqrt{10-x}+\sqrt[5]{2-x}\leqslant 4$.

Решение. Пусть $f(x)=\sqrt{10-x}+\sqrt[5]{2-x}$. Функция $y=f(x)$ монотонно убывает на всей области определения $D_f=(-\infty;10]$. Поскольку $f(1)=4$, неравенство $f(x)\leqslant 4$ будет выполнено при всех $x\geqslant 1$, принадлежащих D_f, т. е. при всех $x\in[1;10]$.

Ответ: $[1;10]$.

Пример 26. Решите неравенство $\sqrt[3]{x^3-19}+6>\sqrt{7-x}$.

Решение. Ясно, что с помощью возведения в степень неравенство не решить. Перебирая небольшие по модулю целые числа, довольно быстро можно найти, что левая и правая части данного неравенства равны при $x=-2$. Функция $f(x)=\sqrt[3]{x^3-19}+6$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, а функция $g(x)=\sqrt{7-x}$ монотонно убывает на всей области определения $D_g=(-\infty;7]$. Поэтому неравенство $f(x)>g(x)$ выполняется, если $x>-2$ и $x\in D_g$. Таким образом, $\begin{cases} x>-2,\\ x\leqslant 7,\end{cases}$ откуда $-2<x\leqslant 7$.

Ответ: $(-2;7]$.

Пример 27. Решите неравенство

$$7\sqrt{7-6x}+3|2x-5|\leqslant 7x+3|2\sqrt{7-6x}-5|.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$7\sqrt{7-6x}-3|2\sqrt{7-6x}-5|\leqslant 7x-3|2x-5|$$

и рассмотрим функцию $f(t)=7t-3|2t-5|$. Поскольку

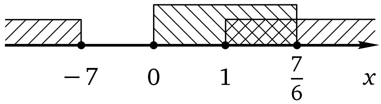
$$f(t)=\left[\begin{array}{ll} t+15, & \text{если } t\geqslant 2{,}5,\\ 13t-15, & \text{если } t<2{,}5,\end{array}\right.$$

функция $y=f(t)$ монотонно возрастает на всей области определения. В силу возрастания функции $y=f(t)$ неравенство $f(\alpha)\leqslant f(\beta)$ будет выполняться при допустимых α и β в том и только том случае, если $\alpha\leqslant\beta$. В нашем случае $\alpha=\sqrt{7-6x}$, $\beta=x$. Таким образом,

$$\sqrt{7-6x}\leqslant x \Leftrightarrow \begin{cases} 7-6x\leqslant x^2,\\ x\geqslant 0,\\ x\leqslant \dfrac{7}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x-7\geqslant 0,\\ 0\leqslant x\leqslant \dfrac{7}{6}.\end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена x^2+6x-7 являются числа -7 и 1. Поэтому множество решений первого неравенства системы — $(-\infty;-7]\cup$

$\cup\,[1;+\infty)$, а множество решений всей системы — отрезок $\left[1;\frac{7}{6}\right]$:



Ответ: $\left[1;\frac{7}{6}\right]$.

В заключение рассмотрим два примера, ключевыми для решения которых являются свойства ограниченных функций.

Пример 28. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2+4}+3\sqrt{x^2+9}\leqslant 14.$$

Р е ш е н и е. Заметим, что $\sqrt{x^2+1}\geqslant 1$, $\sqrt{x^2+4}\geqslant 2$, $\sqrt{x^2+9}\geqslant 3$, причём каждое из неравенств обращается в равенство только при $x=0$. Значит, наименьшее значение левой части данного неравенства будет равно $1+2\cdot 2+3\cdot 3=14$. Следовательно, неравенство выполняется, только если его левая часть достигает своего наименьшего значения, т. е. только при $x=0$.

Ответ: $\{0\}$.

Пример 29. Найдите все пары $(x;y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых $\sqrt{4-|x|}-2y^2\geqslant\sqrt{y-x^2-1}$.

Р е ш е н и е. Перепишем данное неравенство в виде

$$\sqrt{4-|x|}\geqslant 2y^2+\sqrt{y-x^2-1}$$

и оценим левую и правую части полученного неравенства. С левой частью проблем нет: $4-|x|\leqslant 4$ (поскольку $|x|\geqslant 0$), и, значит, $\sqrt{4-|x|}\leqslant 2$. Правая часть неравенства определена только при условии $y-x^2-1\geqslant 0$, откуда $y\geqslant x^2+1$ и, следовательно, $y\geqslant 1$. Но тогда $y^2\geqslant 1$, а $2y^2\geqslant 2$. Следовательно, и $2y^2+\sqrt{y-x^2-1}\geqslant 2$, поскольку $\sqrt{y-x^2-1}\geqslant 0$. Поэтому неравенство будет выполняться, только если и левая, и правая его части равны 2. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases}|x|=0,\\ y=1,\\ \sqrt{y-x^2-1}=0,\end{cases}\qquad\text{откуда}\qquad\begin{cases}x=0,\\ y=1.\end{cases}$$

Ответ: $(0;1)$.

Упражнения к § 5.2

Решите неравенство.

1. а) $\sqrt[3]{3x-64}<x-4$; **б)** $\sqrt[3]{27-5x}<x+3$.

2. а) $\sqrt[3]{x^4-4x^3+7x^2+3x+1}\leqslant x+1$; **б)** $\sqrt[3]{x^4-2x^3-4x^2+12x-8}\leqslant x-2$.

3. а) $\sqrt[3]{x-2}\geqslant\sqrt[3]{x^2-3x+2}$; **б)** $\sqrt[3]{x-3}\geqslant\sqrt[3]{x^2+7x+6}$.

4. а) $\sqrt{x^4-2x+6}\geqslant x^2$; **б)** $\sqrt{x^4-4x+8}\geqslant x^2$.

5. а) $\sqrt{5x^4-28x^2+16}\geqslant x^2+4$; **б)** $\sqrt{4x^4-38x^2+25}\geqslant x^2+5$.

6. а) $\sqrt{x^2-17x-29}\geqslant 3|x+2|$; **б)** $\sqrt{x^2-31x+45}\geqslant|2x-5|$.

7. а) $\sqrt{\dfrac{33-4x}{2x-3}}\geqslant 1$; **б)** $\sqrt{\dfrac{5x-1}{x-1}}\geqslant 3$.

8. а) $\sqrt{\dfrac{5x-3}{x-3}}\leqslant 3$; **б)** $\sqrt{\dfrac{3x+38}{3x+5}}\leqslant 2$.

9. а) $\sqrt{5x+3}>\sqrt{6x-1}$; **б)** $\sqrt{4x+7}>\sqrt{8x+3}$.

10. а) $\sqrt{2x+5}<\sqrt{25-2x}$; **б)** $\sqrt{2x+9}<\sqrt{25-3x}$.

11. а) $\sqrt{3x+5}\geqslant\sqrt{9-x}$; **б)** $\sqrt{x+6}\geqslant\sqrt{-2-x}$.

12. а) $\sqrt{4x+3}\leqslant\sqrt{5x+1}$; **б)** $\sqrt{3x+5}\leqslant\sqrt{4x+1}$.

13. а) $2\sqrt{20x-9}<4x+3$; **б)** $2\sqrt{12x-5}<4x+1$.

14. а) $\sqrt{3x^2+5x+1}>\sqrt{1-3x}$; **б)** $\sqrt{3x^2+5x+2}>\sqrt{2-5x}$.

15. а) $\sqrt{3x^2+5x-1}\geqslant\sqrt{-1-2x}$; **б)** $\sqrt{2x^2+4x-3}\geqslant\sqrt{-3-5x}$.

16. а) $\sqrt{2x^2-8x}\leqslant\sqrt{2x^2-9x+4}$; **б)** $\sqrt{4x^2-8x}\leqslant\sqrt{4x^2-9x+2}$.

17. а) $\sqrt{24x-5x^2}>\sqrt{2x^2-23x+66}$; **б)** $\sqrt{12x-5x^2}>\sqrt{5x^2-29x+42}$.

18. а) $\sqrt{2x-3}<x-3$; **б)** $\sqrt{2x-5}<x-4$.

19. а) $\sqrt{6x+13}\leqslant x+3$; **б)** $\sqrt{4x+5}\leqslant x+2$.

20. а) $\sqrt{x-3}>x-5$; **б)** $\sqrt{x-2}>x-4$.

21. а) $\sqrt{2x-3}\geqslant x-1$; **б)** $\sqrt{2x-5}\geqslant x-2$.

22. а) $\sqrt{2x^2-11x+15}\leqslant x-1$; **б)** $\sqrt{2x^2-5x-3}\leqslant x+3$.

23. а) $\sqrt{2x^2-23x+30}\leqslant x+2$; **б)** $\sqrt{2x^2-11x-21}\leqslant x+5$.

24. а) $\sqrt{24x^2-2x-1}\leqslant 2x+1$; **б)** $\sqrt{6x^2-5x-25}\leqslant x+5$.

25. а) $\sqrt{x^2+3x-10}<x+1$; **б)** $\sqrt{x^2+5x-6}<x+2$.

26. а) $\sqrt{9x^2+9x-4}<3x+1$; **б)** $\sqrt{9x^2-3x-2}<3x-1$.

27. а) $\sqrt{-x^2-5x-4}\geqslant x+4$; **б)** $\sqrt{-x^2+7x-12}\geqslant x-3$.

28. а) $\sqrt{x^2-x-2}>x-2$; **б)** $\sqrt{x^2+x-2}>x-1$.

29. а) $\sqrt{2x^2+5x-3}>3x-1$; **б)** $\sqrt{2x^2+x-6}>3x-4$.

30. а) $\sqrt{3x^2+2x-1}>5x-3$; **б)** $\sqrt{12x^2+4x-1}>10x-3$.

31. а) $\sqrt{\dfrac{2x^2-x-6}{2}}\geqslant x-1$; **б)** $\sqrt{\dfrac{3x^2+x-4}{2}}\geqslant x-2$.

32. а) $4\sqrt{x^2+x-2}\geqslant 5x-2$; **б)** $4\sqrt{x^2+4x-32}\geqslant 5x-8$.

33. а) $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x-1}\geqslant 1$; **б)** $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-2}\geqslant 1$.

34. а) $\sqrt{5x+115}-\sqrt{4x+76}>2$; **б)** $\sqrt{6x+138}-\sqrt{5x+95}>2$.

35. а) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}\leqslant\sqrt{x+2}$; **б)** $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2}\leqslant\sqrt{x+5}$.

36. а) $\sqrt{x-2}+\sqrt{3x-5}\leqslant\sqrt{4x-7}$; **б)** $\sqrt{x-3}+\sqrt{4x+11}\leqslant\sqrt{5x+8}$.

37. а) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}<\sqrt{2x-3}$; **б)** $\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}<\sqrt{2x+1}$.

38. а) $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+1}\geqslant\sqrt{x+4}$; **б)** $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x-1}\geqslant\sqrt{x+2}$.

39. а) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{5x+4}\geqslant\sqrt{10x+7}$; **б)** $\sqrt{5x+2}-\sqrt{5x-1}\geqslant\sqrt{10x-3}$.

40. а) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}\geqslant\sqrt[3]{2x}$; **б)** $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+2}\geqslant\sqrt[3]{2x}$.

41. а) $\sqrt{2x^2+x-6}-1\geqslant\sqrt{2x^2-11x+15}$; **б)** $\sqrt{2x^2+5x-3}-1\geqslant\sqrt{2x^2-7x+6}$.

42. а) $\sqrt{x^2-13x+40}\leqslant 2-\sqrt{x^2-5x+4}$; **б)** $\sqrt{x^2-9x+18}\leqslant 2-\sqrt{x^2-x-2}$.

43. а) $(16-x^2)\sqrt{49-x^2}\geqslant 0$; **б)** $(25-x^2)\sqrt{36-x^2}\geqslant 0$.

44. а) $(x+4)\sqrt{13-|x|}\leqslant 0$; **б)** $(x+3)\sqrt{7-|x|}\leqslant 0$.

45. а) $(x^2-7x+6)\sqrt{-3x^2-4x+4}\leqslant 0$; **б)** $(x^2-9x+14)\sqrt{-3x^2+9x-6}\leqslant 0$.

46. а) $\dfrac{x+8}{x+1}\sqrt{\dfrac{x-3}{x-8}}\leqslant 0$; **б)** $\dfrac{x+5}{x-3}\sqrt{\dfrac{x-4}{x-6}}\leqslant 0$.

47. а) $\dfrac{x-3}{x+7}\sqrt{49-7x-2x^2}\geqslant 0$; **б)** $\dfrac{x+2}{x+7}\sqrt{-7-29x-4x^2}\geqslant 0$.

48. а) $\dfrac{(x^2+6x+8)\sqrt{x^2-6x+8}}{65-7x-4x^2}\leqslant 0$; **б)** $\dfrac{(x^2+5x+4)\sqrt{x^2-5x+4}}{25-10x-3x^2}\leqslant 0$.

49. а) $(x^2-15x)\sqrt{\dfrac{x^2-x-6}{3x^2-16x+16}}\geqslant 0$; **б)** $(x^2-6x)\sqrt{\dfrac{x^2+x-12}{4x^2-25x+25}}\geqslant 0$.

50. а) $\dfrac{(x^2-4)\sqrt{7x-x^2}}{2x^2-19x+35}\leqslant 0$; **б)** $\dfrac{(x^2-9)\sqrt{6x-x^2}}{2x^2-19x+42}\leqslant 0$.

51. а) $\left(\sqrt{7x+1}-x-1\right)\left(\sqrt{x+20}-x\right)\leqslant 0$; **б)** $\left(\sqrt{7x+4}-x-2\right)\left(\sqrt{x+6}-x\right)\leqslant 0$.

52. а) $\dfrac{\sqrt{23x+9}-4x-3}{\sqrt{3x+4}-2}\leqslant 0$; **б)** $\dfrac{\sqrt{35x+16}-5x-4}{\sqrt{3x+16}-4}\leqslant 0$.

53. а) $(2x-3)\sqrt{5-2x}\leqslant 2x-3$; **б)** $(2x-1)\sqrt{3-2x}\leqslant 2x-1$.

54. а) $(3x-1)\sqrt{2x^2-5x+3}\leqslant 2-6x$; **б)** $(6x-1)\sqrt{9x^2-15x+4}\leqslant 2-12x$.

55. а) $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{5x-4} \leqslant \dfrac{\sqrt{2x-3}}{3x+2}$; **б)** $\dfrac{\sqrt{3x-4}}{5x-2} \leqslant \dfrac{\sqrt{3x-4}}{2x+7}$.

56. а) $(2x^2+3x-2)\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{3x-2}\right) \leqslant 0$;

б) $(2x^2+7x+6)\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt[4]{3x+4}\right) \leqslant 0$.

57. а) $(2x^2-19x+35)(\sqrt{2x-5}-\sqrt[4]{9x-5}) \leqslant 0$;

б) $(2x^2-11x+5)(\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{9x+13}) \leqslant 0$.

58. а) $\dfrac{x+1}{2x-1} \geqslant -2+\sqrt{5x-1}$; **б)** $\dfrac{x+2}{2x+1} \geqslant -2+\sqrt{5x+4}$.

59. а) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{3-x} \leqslant 1$; **б)** $\sqrt[3]{x-3}+\sqrt{4-x} \leqslant 1$.

60. а) $15\sqrt{x}-7x \geqslant 2$; **б)** $16\sqrt{x}-3x \geqslant 21$.

61. а) $2\sqrt{x}+3 \geqslant 5\sqrt[4]{x}$; **б)** $2\sqrt{x}+1 \geqslant 3\sqrt[4]{x}$.

62. а) $x^2+9\sqrt{25-x^2} \leqslant 45$; **б)** $x^2+8\sqrt{25-x^2} \leqslant 40$.

63. а) $\dfrac{1-2x}{4x+1}+5\sqrt{\dfrac{2x-1}{4x+1}} > 6$; **б)** $\dfrac{1-x}{x+4}+13\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}} > 40$.

64. а) $\sqrt{\dfrac{3x-1}{5x-2}}+\sqrt{\dfrac{5x-2}{x-5}} \geqslant 2\sqrt[4]{\dfrac{3x-1}{x-5}}$;

б) $\sqrt{\dfrac{x+3}{3x+1}}+\sqrt{\dfrac{3x+1}{4x-5}} \geqslant 2\sqrt[4]{\dfrac{x+3}{4x-5}}$.

65. а) $x^2+14x+9+8\sqrt{-x^2-14x-24} \leqslant 0$;

б) $x^2+12x+9\sqrt{-x^2-12x-11} \leqslant 9$.

66. а) $x^2-18x+18\sqrt{19+18x-x^2} \leqslant 99$;

б) $x^2-14x+16\sqrt{51+14x-x^2} \leqslant 111$.

67. а) $\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}} \geqslant 4$;

б) $\sqrt{x+7-4\sqrt{x+3}}+\sqrt{x+19-8\sqrt{x+3}} \geqslant 6$.

68. а) $\sqrt{x+12-8\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+60-16\sqrt{x-4}} \leqslant 6$;

б) $\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+22-10\sqrt{x-3}} \leqslant 4$.

69. а) $\sqrt{x^2+8x+7}+\sqrt{x^2-4x-12} \leqslant \sqrt{2x^2+4x-5}$;

б) $\sqrt{x^2+2x-15}+\sqrt{x^2-7x+6} \leqslant \sqrt{2x^2-5x-9}$.

70. а) $\sqrt{x^2+2x-8}+\sqrt{x^2-4x-21} \leqslant \sqrt{2x^2-2x-29}$;

б) $\sqrt{x^2+2x-15}+\sqrt{x^2-6x-16} \leqslant \sqrt{2x^2-4x-31}$.

71. а) $\sqrt{x-4}-\sqrt{x-3}+2\sqrt{x^2-7x+12} < 2x-7$;

б) $\sqrt{x-6}-\sqrt{x-5}+2\sqrt{x^2-11x+30} < 2x-11$.

72. **а)** $\sqrt{4x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2+3x+2}\leqslant\sqrt{x^2+3x+6}+\sqrt{3x^2+2x+7}$;

б) $\sqrt{5x^2+3x+2}+\sqrt{3x^2+x+5}\leqslant\sqrt{4x^2+3x+11}+\sqrt{2x^2+x+14}$.

73. **а)** $x+\sqrt{(x^2-x-6)(2x^2-7x+6)}<2+\sqrt{(4-x^2)(2x^2-9x+9)}$;

б) $x+\sqrt{(x^2-x-12)(2x^2-7x+3)}>2+\sqrt{(9-x^2)(2x^2-9x+4)}$.

74. **а)** $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+11}<5$; **б)** $\sqrt{x+7}+\sqrt{x+19}<6$.

75. **а)** $\sqrt{6-x}+\sqrt[7]{3-x}\leqslant 3$; **б)** $\sqrt{12-x}+\sqrt[9]{4-x}\leqslant 4$.

76. **а)** $\sqrt[3]{4x+13}-\sqrt{22-x}\geqslant -4$; **б)** $\sqrt[3]{x+3}-\sqrt{-6-5x}\geqslant -1$.

77. **а)** $\sqrt[3]{x^3-19}+3>\sqrt{28-x}$; **б)** $\sqrt[3]{x^3-26}+7>\sqrt{15-x}$.

78. **а)** $9\sqrt{8-7x}+2|4x-7|\leqslant 9x+2|4\sqrt{8-7x}-7|$;

б) $7\sqrt{9-8x}+2|3x-7|\leqslant 7x+2|3\sqrt{9-8x}-7|$.

79. **а)** $3\sqrt{9-x^2}+2\sqrt{4-x^2}+\sqrt{1-x^2}\geqslant 14$;

б) $6\sqrt{36-x^2}+5\sqrt{25-x^2}+4\sqrt{16-x^2}\geqslant 77$.

80. **а)** $\sqrt{x^2+1}+5\sqrt{x^2+25}+7\sqrt{x^2+49}\leqslant 75$;

б) $\sqrt{x^2+1}+4\sqrt{x^2+16}+6\sqrt{x^2+36}\leqslant 53$.

81. Найдите все пары $(x;\, y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых:

а) $\sqrt{16-|x|-y^2}\geqslant\sqrt{y-3x^2-2}$; **б)** $\sqrt{9-|x|-y^2}\geqslant\sqrt{y-2x^2-3}$.

Диагностическая работа 8

Вариант 1

Решите неравенство.

1. $\sqrt{\dfrac{10x-3}{2x-3}}\leqslant 3$.

2. $\sqrt{5x+6}\geqslant\sqrt{-2-5x}$.

3. $\sqrt{4x-3}\geqslant 2x-1$.

4. $\sqrt{12x+13}\leqslant 2x+3$.

5. $\sqrt{9x^2+9x-10}<3x+1$.

6. $\sqrt{9x^2-3x-2}>3x-2$.

7. $\sqrt{3x-8}-\sqrt{x-4}\geqslant 2$.

8. $(9-x^2)\sqrt{100-x^2}\geqslant 0$.

9. $(2x-3)\sqrt{x^2-7x+10}\leqslant 6-4x$.

10. $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}}+2\sqrt{\dfrac{x+1}{2x-1}}\geqslant 3$.

11. $\sqrt[3]{4-x}-\sqrt{x+5}>1$.

12. $\dfrac{2}{\sqrt{x^2-2x+5}}+\dfrac{4}{\sqrt{x^2-2x+17}}+\dfrac{6}{\sqrt{x^2-2x+37}}\geqslant 3$

Вариант 2

Решите неравенство.

1. $\sqrt{\dfrac{5x-1}{x-1}} \leqslant 3.$

2. $\sqrt{6x+5} \geqslant \sqrt{9-2x}.$

3. $\sqrt{6x-5} \geqslant 3x-2.$

4. $\sqrt{4x+13} \leqslant x+4.$

5. $\sqrt{25x^2+25x-6} < 5x+2.$

6. $\sqrt{9x^2+3x-2} > 3x-1.$

7. $\sqrt{3x-20} - \sqrt{x-8} \geqslant 2.$

8. $(4-x^2)\sqrt{81-x^2} \geqslant 0.$

9. $(2x-1)\sqrt{x^2-5x+4} \leqslant 2-4x.$

10. $\sqrt{\dfrac{3x-1}{x+3}} + 3 \cdot \sqrt{\dfrac{x+3}{3x-1}} \geqslant 4.$

11. $\sqrt[3]{x+4} - \sqrt{5-x} > 1$

12. $\dfrac{3}{\sqrt{8-x^2-2x}} + \dfrac{5}{\sqrt{24-x^2-2x}} + \dfrac{7}{\sqrt{48-x^2-2x}} \leqslant 3.$

Глава 6. Тригонометрические неравенства

Тригонометрическими выражениями будем называть выражения, алгебраическая запись которых содержит переменную под знаком одной из тригонометрических функций — синуса, косинуса, тангенса или котангенса. Неравенства, одна или обе части которых содержат тригонометрические выражения, называются тригонометрическими. В соответствии с принятой в книге классификацией алгебраическая запись таких неравенств может включать в себя наряду с тригонометрическими рациональные и/или иррациональные алгебраические выражения.

Школьная программа предполагает знакомство лишь с простейшими тригонометрическими неравенствами; на профильном уровне эти неравенства обычно изучаются более подробно. В любом случае тригонометрические неравенства находятся несколько на периферии школьного математического образования, они почти не встречаются в учебниках, на диагностических, контрольных и вступительных испытаниях; поэтому знакомство с ними носит своего рода факультативный характер.

§ 6.1. Простейшие тригонометрические неравенства

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида $\sin x \vee a$, $\cos x \vee a$, $\operatorname{tg} x \vee a$, $\operatorname{ctg} x \vee a$, где a — действительное число, а символом «$\vee$» обозначен, как и везде в этой книге, один из четырех возможных знаков неравенства. Решать такие неравенства целесообразно с помощью единичной окружности.

Рассмотрим подробно каждое из простейших тригонометрических неравенств.

Неравенство $\sin x \vee a$

Напомним, что синусом числа x называется ордината точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P_0(1;0)$ вокруг начала координат на угол x радиан против часовой стрелки (при $x>0$) или по часовой стрелке (при $x<0$). Поэтому для того чтобы решить неравенство $\sin x < a$ ($\sin x \leqslant a$), нужно найти все точки единичной окружности, ордината каждой из которых меньше (не больше) a (см. рис. 1).

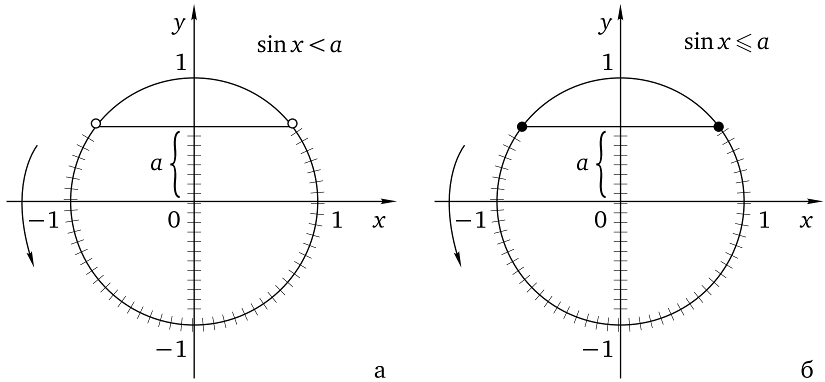


Рис. 1

Для того чтобы решить неравенство $\sin x > a$ ($\sin x \geqslant a$), нужно найти все точки единичной окружности, ордината каждой из которых больше (не меньше) a (см. рис. 2).

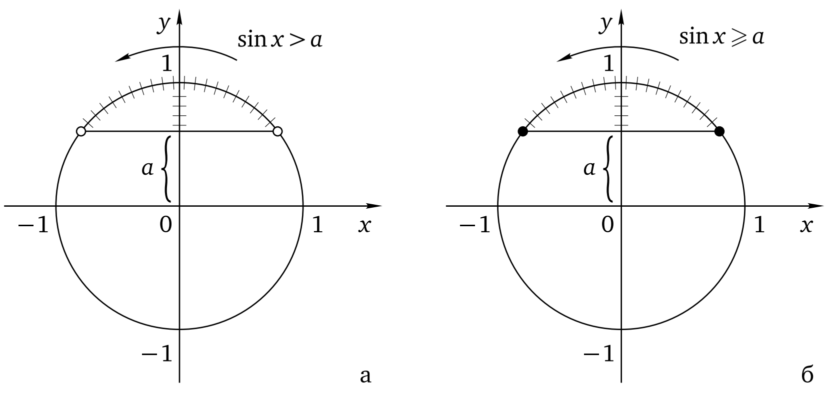


Рис. 2

После того как это сделано, остается записать ответ, учитывая, что углы поворота увеличиваются в направлении против часовой стрелки и уменьшаются в направлении по часовой стрелке. Поэтому над заштрихованной дугой единичной окружности, отвечающей решению данного неравенства, настоятельно рекомендуется поставить стрелку, указывающую направление возрастания, как это сделано на рис. 1 и 2. Тогда тот конец дуги, на который указывает стрелка, будет соответствовать большему углу поворота, т. е. большему значению переменной, а другой конец дуги — меньшему значению переменной. Это нехитрое правило позволит избежать частых ошибок в записи решения неравенства в виде промежутка, в котором левый конец больше его правого конца. Теперь остается выписать ответ, учитывая, что основной (главный) период синуса равен 2π. Сделаем сначала это в общем виде для всех таких значений a, что $|a|<1$.

$$\sin x \geqslant a \Leftrightarrow \arcsin a + 2\pi n \leqslant x \leqslant \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $[\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\sin x > a \Leftrightarrow \arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\sin x \leqslant a \Leftrightarrow \pi - \arcsin a + 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi + \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $[\pi - \arcsin a + 2\pi n; 2\pi + \arcsin a + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\sin x < a \Leftrightarrow \pi - \arcsin a + 2\pi n < x < 2\pi + \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(\pi - \arcsin a + 2\pi n; 2\pi + \arcsin a + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Разумеется, ответ может быть записан в иной форме, поскольку каждая точка единичной окружности отвечает бесконечному числу углов поворота, отличающихся друг от друга на 2π. Так, если при записи последнего из приведенных выше четырех неравенств считать, что левый конец заштрихованной дуги на рис. 2б соответствует углу поворота $-\pi - \arcsin a$ радиан, то ее правый конец будет соответствовать углу поворота $\arcsin a$ радиан, и ответ будет записан в виде $(-\pi - \arcsin a + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $a < -1$, то неравенства $\sin x \leqslant a$ и $\sin x < a$ не имеют решений, а неравенства $\sin x \geqslant a$ и $\sin x > a$ справедливы при любом действительном значении переменной.

Если $a > 1$, то неравенства $\sin x \leqslant a$ и $\sin x < a$ справедливы при любом действительном значении переменной, а неравенства $\sin x \geqslant a$ и $\sin x > a$ не имеют решений.

Если $a = -1$, то неравенство $\sin x \leqslant -1$ равносильно уравнению $\sin x = -1$, неравенство $\sin x < -1$ не имеет решений, неравенство $\sin x \geqslant -1$ справедливо при любом действительном значении переменной, а неравенство $\sin x > -1$ равносильно неравенству $\sin x \neq -1$.

Если $a = 1$, то неравенство $\sin x \leqslant 1$ справедливо при любом действительном значении переменной, неравенство $\sin x < 1$ равносильно неравенству $\sin x \neq 1$, неравенство $\sin x \geqslant 1$ равносильно уравнению $\sin x = 1$, а неравенство $\sin x > 1$ не имеет решений.

Пример 1. Решите неравенство $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Р е ш е н и е. Изобразим на единичной окружности дугу, отвечающую решению неравенства (см. рис. 3).

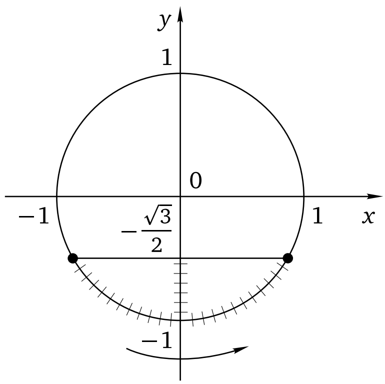


Рис. 3

Считая, что левый конец дуги соответствует углу поворота $-\frac{2\pi}{3}$ радиан, получим, что правый ее конец соответствует углу поворота $-\frac{\pi}{3}$ радиан.

Ответ: $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

Еще раз обратим внимание на то, что каждая точка единичной окружности соответствует бесконечному числу углов поворота. Поэтому если в качестве угла поворота для левого конца дуги выбрать, например, $\frac{4\pi}{3}$ радиан, то правый ее конец будет соответствовать углу поворота $\frac{5\pi}{3}$ радиан, и ответ примет вид $\left[\frac{4\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

Пример 2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \sin x \leqslant \frac{1}{2}, \\ \sin x \geqslant -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Изобразим на единичной окружности дуги, отвечающие решению данной системы неравенств, и запишем соответствующие их концам углы поворота, выбрав в качестве в качестве начального угол поворота, соответствующий концу правой дуги, лежащему в IV четверти (см. рис. 4).

Считая, что этот конец выбранной дуги соответствует углу поворота $-\arcsin\frac{1}{3}$ радиан, получим, что второй ее конец соответствует углу

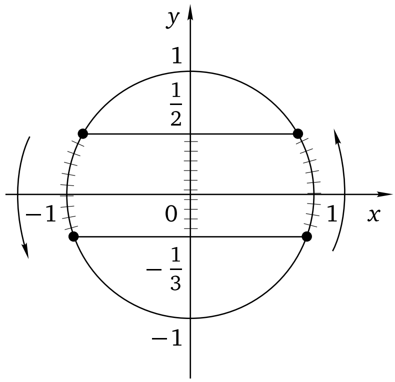


Рис. 4

поворота $\frac{\pi}{6}$ радиан. Тогда конец второй дуги, лежащий во II четверти, будет соответствовать углу поворота $\frac{5\pi}{6}$ радиан, а ее конец, лежащий в III четверти, — углу поворота $\pi + \arcsin\frac{1}{3}$ радиан.

Ответ: $\left[-\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Неравенство $\cos x \vee a$

Напомним, что косинусом числа x называется абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол x радиан против часовой стрелки (при $x > 0$) или по часовой стрелке (при $x < 0$). Поэтому для того чтобы решить неравенство $\cos x < a$ ($\cos x \leqslant a$), нужно найти все точки единичной окружности, абсцисса каждой из которых меньше (не больше) a (см. рис. 5).

Для того чтобы решить неравенство $\cos x > a$ ($\cos x \geqslant a$), нужно найти все точки единичной окружности, абсцисса каждой из которых больше (не меньше) a (см. рис. 6).

После того как это сделано, остается записать ответ, учитывая, как обычно, что углы поворота увеличиваются в направлении против часовой стрелки и уменьшаются в направлении по часовой стрелке и что основной (главный) период косинуса равен 2π. Сделаем сначала это в общем виде для всех таких значений a, что $|a| < 1$.

$$\cos x \geqslant a \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n \leqslant x \leqslant \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

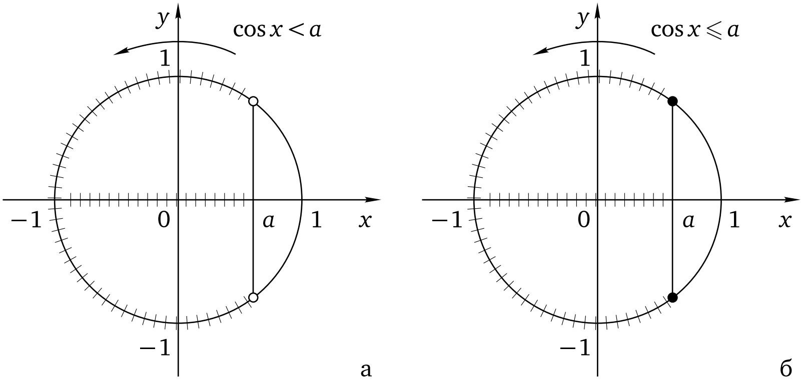


Рис. 5

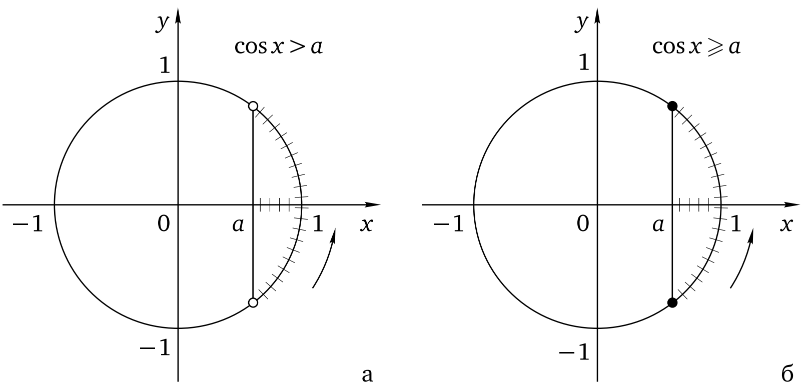


Рис. 6

Ответ: $[-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\cos x > a \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-\arccos + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\cos x \leqslant a \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi - \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $[\arccos a + 2\pi n; 2\pi - \arccos a + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\cos x < a \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(\arccos a + 2\pi n; 2\pi - \arccos a + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $a < -1$, то неравенства $\cos x \leqslant a$ и $\cos x < a$ не имеют решений, а неравенства $\cos x \geqslant a$ и $\cos x > a$ справедливы при любом действительном значении переменной.

Если $a > 1$, то неравенства $\cos x \leqslant a$ и $\cos x < a$ справедливы при любом действительном значении переменной, а неравенства $\cos x \geqslant a$ и $\cos x > a$ не имеют решений.

Если $a = -1$, то неравенство $\cos x \leqslant -1$ равносильно уравнению $\cos x = -1$, неравенство $\cos x < -1$ не имеет решений, неравенство $\cos x \geqslant -1$ справедливо при любом действительном значении переменной, а неравенство $\cos x > -1$ равносильно неравенству $\cos x \neq -1$.

Если $a = 1$, то неравенство $\cos x \leqslant 1$ справедливо при любом действительном значении переменной, неравенство $\cos x < 1$ равносильно неравенству $\cos x \neq 1$, неравенство $\cos x \geqslant 1$ равносильно уравнению $\cos x = 1$, а неравенство $\cos x > 1$ не имеет решений.

Пример 3. Решите неравенство $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Изобразим на единичной окружности дугу, отвечающую решению неравенства (см. рис. 7).

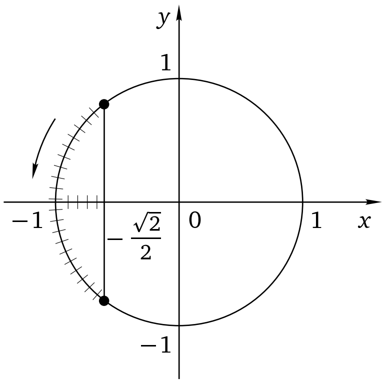


Рис. 7

Считая, что верхний конец дуги соответствует углу поворота $\frac{3\pi}{4}$ радиан, получим, что нижний ее конец соответствует углу поворота $\frac{5\pi}{4}$ радиан.

Ответ: $\left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. Решите систему неравенств $\begin{cases} \cos x \leqslant 0{,}6, \\ \cos x \geqslant -0{,}7. \end{cases}$

Решение. Изобразим на единичной окружности дуги, отвечающие решению данной системы неравенств, и запишем соответствующие их концам углы поворота, выбрав в качестве в качестве начального угол поворота, соответствующий концу верхней дуги, лежащему в I четверти (см. рис. 8).

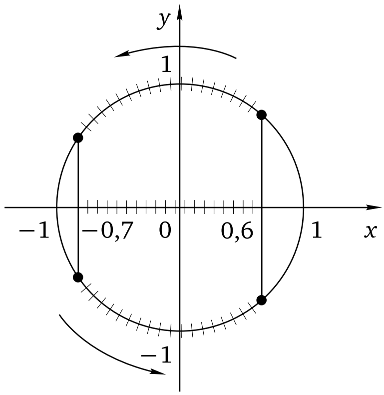


Рис. 8

Считая, что этот конец выбранной дуги соответствует углу поворота $\arccos 0{,}6$ радиан, получим, что второй ее конец соответствует углу поворота $\pi - \arccos 0{,}7$ радиан. Тогда конец второй дуги, лежащий в III четверти, будет соответствовать углу поворота $\pi + \arccos 0{,}7$ радиан, а ее конец, лежащий в IV четверти, — углу поворота $2\pi - \arccos 0{,}6$ радиан.

Ответ: $[\arccos 0{,}6 + 2\pi n; \pi - \arccos 0{,}7 + 2\pi n] \cup [\pi + \arccos 0{,}7 + 2\pi n; 2\pi - \arccos 0{,}6 + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Неравенство $\operatorname{tg} x \vee a$

Напомним, что линией тангенса называется касательная к единичной окружности, проходящая через точку $P_0(1; 0)$. Для того чтобы найти точки единичной окружности, соответствующие углам поворота, тангенсы которых равны $a \neq 0$, поступают следующим образом: на линии тангенса откладывают отрезок длиной $|a|$, одним из концов которого является точка $P_0(1; 0)$, а второй конец (точка A) расположен либо в первой четверти (при $a > 0$), либо в четвертой четверти (при $a < 0$), после чего проводят прямую через точку A и начало координат. Иными словами, отмечают точку $A(1; a)$ и проводят прямую OA. Точки, в которых указанная прямая пересекает единичную окружность, соответствуют углам поворота x, для которых $\operatorname{tg} x = a$ (см. рис. 9). Если $a = 0$, соответствующие точки являются концами горизонтального диаметра единичной окружности.

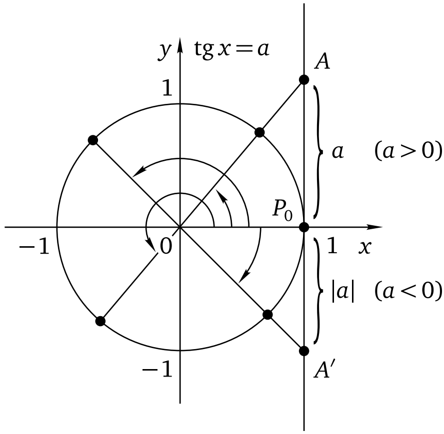


Рис. 9

Для того чтобы решить неравенство $\operatorname{tg} x < a$ ($\operatorname{tg} x \leqslant a$), на единичной окружности отмечают дуги, соответствующие части линии тангенса, лежащей ниже (не выше) точки A (см. рис. 10).

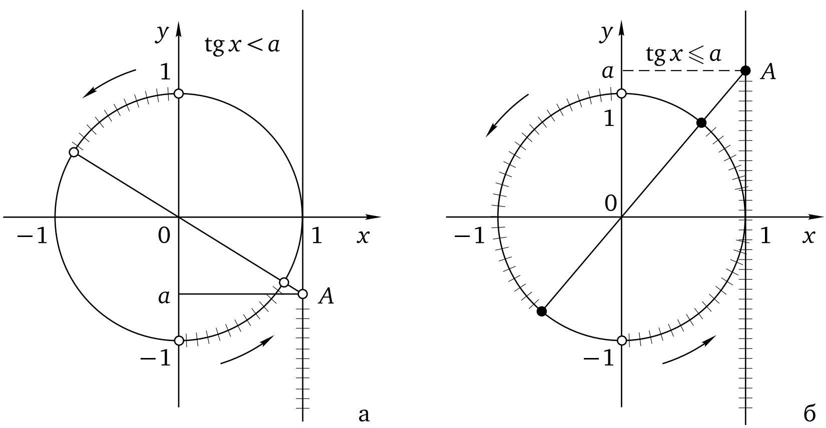


Рис. 10

Для того чтобы решить неравенство $\operatorname{tg} x > a$ ($\operatorname{tg} x \geqslant a$), на единичной окружности отмечают дуги, соответствующие части линии тангенса, лежащей выше (не ниже) точки A (см. рис. 11).

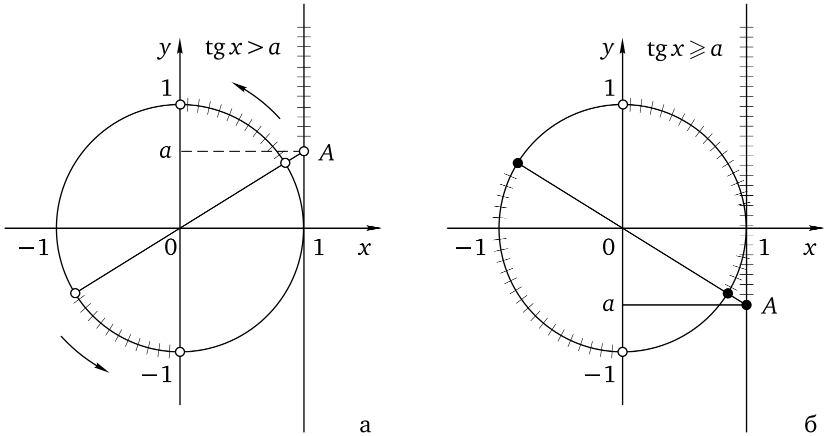


Рис. 11

После того как это сделано, остается записать ответ, учитывая область определения тангенса и то, что его основной (главный) период равен π (каждая из двух заштрихованных дуг может быть получена поворотом другой на угол π радиан). Сделаем это в общем виде.

$\operatorname{tg} x \leqslant a \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$

$\operatorname{tg} x < a \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

$\operatorname{tg} x \geqslant a \Leftrightarrow \operatorname{arctg} a + \pi n \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left[\operatorname{arctg} a + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

$\operatorname{tg} x > a \Leftrightarrow \operatorname{arctg} a + \pi n < x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left(\operatorname{arctg} a + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

Пример 5. Решите неравенство $\operatorname{tg} x \geqslant -1$.

Решение. Изобразим на единичной окружности дуги, отвечающие решению неравенства (см. рис. 12).

Считая, что нижний конец дуги, расположенной в правой координатной полуплоскости, соответствует углу поворота $-\dfrac{\pi}{4}$ радиан, получим, что правый ее конец соответствует углу поворота $\dfrac{\pi}{2}$ радиан.

Ответ: $\left[-\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

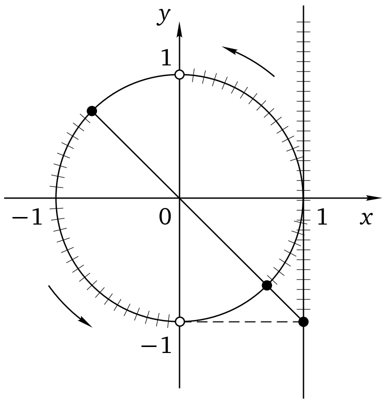


Рис. 12

Пример 6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x \geqslant -1{,}5. \end{cases}$$

Решение. Изобразим на единичной окружности дуги, отвечающие решению данной системы неравенств (см. рис. 13), и запишем соответствующие концам одной из дуг (другая, как уже отмечалось, получается поворотом первой на угол π радиан) углы поворота, выбрав в качестве начального угол поворота, соответствующий концу правой дуги, лежащему в IV четверти.

Считая, что этот конец выбранной дуги соответствует углу поворота $-\operatorname{arctg} 1{,}5$ радиан, получим, что второй ее конец соответствует углу поворота $\frac{\pi}{3}$ радиан. Осталось записать ответ.

Ответ: $\left[-\operatorname{arctg} 1{,}5 + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Неравенство $\operatorname{ctg} x \vee a$

Напомним, что линией котангенса называется касательная к единичной окружности, проходящая через точку $M(0; 1)$. Для того чтобы найти точки единичной окружности, соответствующие углам поворота, котангенсы которых равны $a \neq 0$, поступают следующим образом: на линии котангенса откладывают отрезок длиной $|a|$, одним из концов которого является точка $M(0; 1)$, а второй конец (точка A) расположен либо в первой четверти (при $a > 0$), либо во второй четверти (при $a < 0$), после чего проводят прямую через точку A и начало

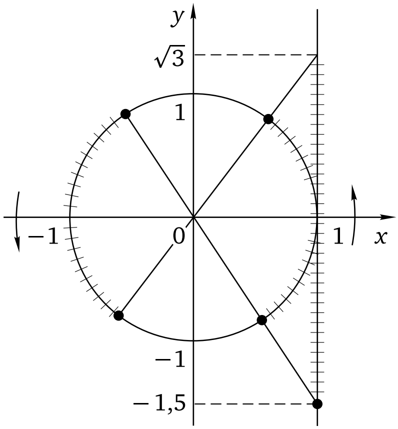


Рис. 13

координат. Иными словами, отмечают точку $A(a;1)$ и проводят прямую OA (см. рис. 14). Точки, в которых указанная прямая пересекает единичную окружность, соответствуют углам поворота x, для которых $\operatorname{ctg} x = a$. Если $a = 0$, соответствующие точки являются концами вертикального диаметра единичной окружности.

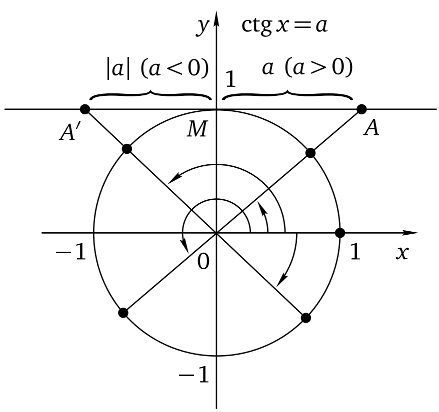


Рис. 14

Для того чтобы решить неравенство $\operatorname{ctg} x < a$ ($\operatorname{ctg} x \leqslant a$), на единичной окружности отмечают дуги, соответствующие части линии котангенса, лежащей левее (не правее) точки A (см. рис. 15).

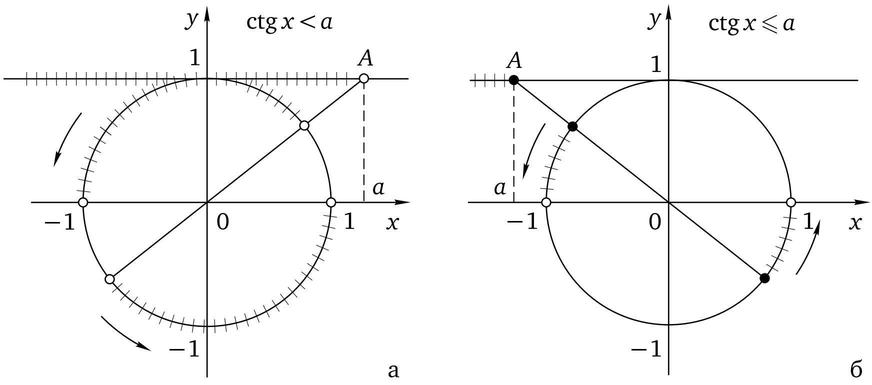


Рис. 15

Для того чтобы решить неравенство $\operatorname{ctg} x > a$ ($\operatorname{ctg} x \geqslant a$), на единичной окружности отмечают дуги, соответствующие части линии котангенса, лежащей правее (не левее) точки A (см. рис. 16).

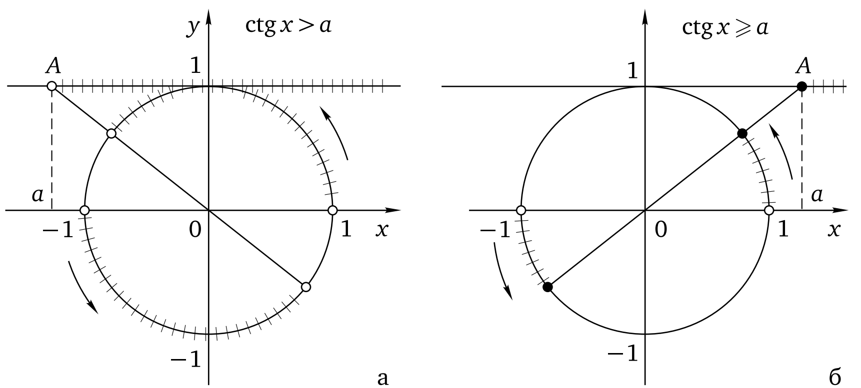


Рис. 16

После того как это сделано, остается записать ответ, учитывая область определения котангенса и то, что его основной (главный) период равен π (каждая из двух заштрихованных дуг может быть получена поворотом другой на угол π радиан). Сделаем это в общем виде.

$$\operatorname{ctg} x \leqslant a \Leftrightarrow \operatorname{arcctg} a + \pi n \leqslant x < \pi + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $[\operatorname{arcctg} a + \pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\operatorname{ctg} x < a \Leftrightarrow \operatorname{arcctg} a + \pi n < x < \pi + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(\operatorname{arcctg} a + \pi n;\ \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\operatorname{ctg} x \geqslant a \Leftrightarrow \pi n < x \leqslant \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(\pi n;\ \operatorname{arcctg} a + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\operatorname{ctg} x > a \Leftrightarrow \pi n < x < \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(\pi n;\ \operatorname{arcctg} a + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 7. Решите неравенство $\operatorname{ctg} x \geqslant \sqrt{3}$.

Решение. Изобразим на единичной окружности дуги, отвечающие решению неравенства (см. рис. 17).

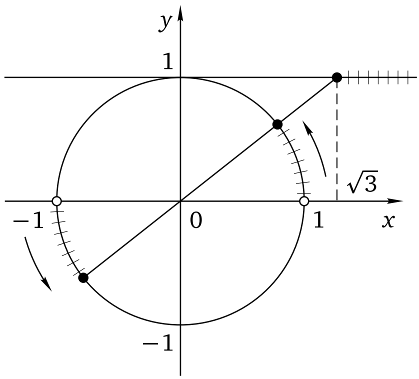


Рис. 17

Считая, что нижний конец дуги, расположенной в первой четверти, соответствует углу поворота 0 радиан, получим, что правый ее конец соответствует углу поворота $\frac{\pi}{6}$ радиан.

Ответ: $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{6} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x \leqslant 1{,}1, \\ \operatorname{ctg} x \geqslant -1{,}2. \end{cases}$$

Решение. Изобразим на единичной окружности дуги, отвечающие решению данной системы неравенств (см. рис. 18), и запишем соответствующие концам одной из дуг (другая, как уже отмечалось, получается поворотом первой на угол π радиан) углы поворота, выбрав в качестве начального угол поворота, соответствующий концу верхней дуги, лежащему в I четверти.

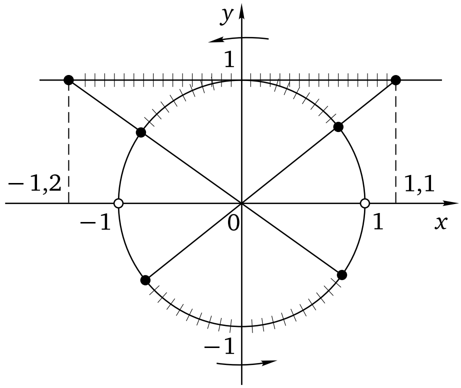


Рис. 18

Считая, что этот конец выбранной дуги соответствует углу поворота $\operatorname{arcctg} 1{,}1$ радиан, получим, что второй ее конец соответствует углу поворота $\pi - \operatorname{arcctg} 1{,}2$ радиан. Осталось записать ответ.

Ответ: $[\operatorname{arcctg} 1{,}1 + \pi n;\ \pi - \operatorname{arcctg} 1{,}2 + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

В заключение этого параграфа рассмотрим, как решаются чуть более сложные системы двух простейших тригонометрических неравенств, левые части которых представляют собой разноименные тригонометрические функции.

Пример 9. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \sin x \leqslant \dfrac{\sqrt{7}}{3}, \\ \cos x \geqslant \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Решение. Сначала заметим, что если $\cos x = \frac{1}{3}$, то $\sin x = \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$, а $\frac{\sqrt{8}}{3} > \frac{\sqrt{7}}{3}$. Значит, $\arccos\frac{1}{3} > \arcsin\frac{\sqrt{7}}{3}$ Теперь изобразим на единичной окружности дугу, отвечающую данной системе неравенств, после чего запишем углы поворота, соответствующие ее концам, начав с конца, лежащего в IV четверти (см. рис. 19).

Считая, что этот конец выбранной дуги соответствует углу поворота $-\arccos\frac{1}{3}$ радиан, получим, что второй ее конец соответствует углу поворота $\arcsin\frac{\sqrt{7}}{3}$ радиан.

Ответ: $\left[-\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n;\ \arcsin\frac{\sqrt{7}}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

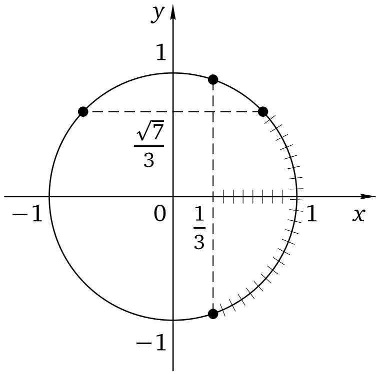


Рис. 19

Пример 10. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \leqslant 0{,}7, \\ \cos x \leqslant 0{,}8. \end{cases}$$

Решение. Сначала заметим, что если $\cos x = 0{,}8$, то $\sin x = \pm 0{,}6$, а $\operatorname{tg} x = \pm 0{,}75$. Но $0{,}75 > 0{,}7$. Значит, $\arccos 0{,}8 > \operatorname{arctg} 0{,}7$. Теперь изобразим на единичной окружности дуги, отвечающие данной системе неравенств, после чего запишем углы поворота, соответствующие концам этих дуг, выбрав в качестве начального угол поворота $\frac{\pi}{2}$ радиан, соответствующий верхнему концу большей из дуг (см. рис. 20).

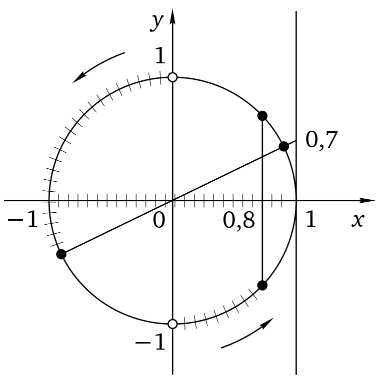


Рис. 20

Тогда второй конец этой дуги соответствует углу поворота $\pi + \operatorname{arctg} 0{,}7$ радиан, а концы меньшей дуги — углам поворота $\frac{3\pi}{2}$ радиан и $2\pi - \arccos 0{,}8$ радиан соответственно.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \pi+\operatorname{arctg} 0{,}7+2\pi n\right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n; 2\pi-\arccos 0{,}8+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

Упражнения к § 6.1

Решите неравенство (систему неравенств).

1. а) $\sin x \geqslant 1$; **б)** $\sin x \leqslant -1$.

2. а) $\sin x < -\frac{1}{2}$; **б)** $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. а) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; **б)** $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$.

4. а) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; **б)** $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. а) $\sin x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$; **б)** $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$.

6. а) $\sin x < 0{,}3$; **б)** $\sin x < 0{,}4$.

7. а) $\sin x \leqslant -0{,}2$; **б)** $\sin x \leqslant -0{,}1$.

8. а) $\sin x > -0{,}7$; **б)** $\sin x > -0{,}6$.

9. а) $\sin x \geqslant 0{,}4$; **б)** $\sin x \geqslant 0{,}9$.

10. а) $\begin{cases} \sin x > -\frac{1}{2}, \\ \sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} \sin x < 0{,}23, \\ \sin x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x \geqslant -0{,}32. \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} \sin x \leqslant 0{,}34, \\ \sin x \geqslant -0{,}12; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \sin x \leqslant 0{,}21, \\ \sin x \geqslant -0{,}43. \end{cases}$

13. а) $\cos x > -1$; **б)** $\cos x < 1$.

14. а) $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; **б)** $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

15. а) $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$; **б)** $\cos x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. а) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; **б)** $\cos x < -\frac{1}{2}$.

17. а) $\cos x > \frac{1}{2}$; **б)** $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

18. а) $\cos x < 0{,}11$; **б)** $\cos x < 0{,}22$.

19. а) $\cos x > -0{,}33$; **б)** $\cos x > -0{,}44$.

20. а) $\cos x \leqslant -0{,}71$; **б)** $\cos x \leqslant -0{,}62$.

21. а) $\cos x \geqslant 0{,}321$; **б)** $\cos x \geqslant 0{,}123$.

22. а) $\begin{cases} \cos x > -0{,}5, \\ \cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \cos x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x \leqslant 0{,}5. \end{cases}$

23. а) $\begin{cases} \cos x \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x < 0{,}89; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \cos x \geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x < 0{,}98. \end{cases}$

24. а) $\begin{cases} \cos x \leqslant 0{,}43, \\ \cos x \geqslant -0{,}65; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \cos x \leqslant 0{,}34, \\ \cos x \geqslant -0{,}56. \end{cases}$

25. а) $\operatorname{tg} x \geqslant 0$; **б)** $\operatorname{tg} x \leqslant 0$.

26. а) $\operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}$; **б)** $\operatorname{tg} x \geqslant -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

27. а) $\operatorname{tg} x \leqslant -1$; **б)** $\operatorname{tg} x \leqslant 1$.

28. а) $\operatorname{tg} x > 1$; **б)** $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.

29. а) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$; **б)** $\operatorname{tg} x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

30. а) $\operatorname{tg} x \geqslant 2$; **б)** $\operatorname{tg} x \geqslant 3$.

31. а) $\operatorname{tg} x \leqslant -3$; **б)** $\operatorname{tg} x \leqslant -2$.

32. а) $\operatorname{tg} x > -5$; **б)** $\operatorname{tg} x > -4$.

33. а) $\operatorname{tg} x < 7$; **б)** $\operatorname{tg} x < 6$.

34. а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x < \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x \geqslant -1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \operatorname{tg} x < 1, \\ \operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}. \end{cases}$

35. а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leqslant 7, \\ \operatorname{tg} x > -\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leqslant 8, \\ \operatorname{tg} x > -1. \end{cases}$

36. а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leqslant 4, \\ \operatorname{tg} x \geqslant -10; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leqslant 10, \\ \operatorname{tg} x \geqslant -4. \end{cases}$

37. а) $\operatorname{ctg} x < 0$; **б)** $\operatorname{ctg} x > 0$.

38. а) $\operatorname{ctg} x \leqslant -\sqrt{3}$; **б)** $\operatorname{ctg} x \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

39. а) $\operatorname{ctg} x \geqslant -1$; **б)** $\operatorname{ctg} x \geqslant -\sqrt{3}$.

40. а) $\operatorname{ctg} x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; **б)** $\operatorname{ctg} x < 1$.

41. а) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$; **б)** $\operatorname{ctg} x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

42. а) $\operatorname{ctg} x > -2$; **б)** $\operatorname{ctg} x > -3$.

43. а) $\operatorname{ctg} x < -5$; **б)** $\operatorname{ctg} x < -4$.

44. а) $\operatorname{ctg} x \geqslant 0{,}2$; **б)** $\operatorname{ctg} x \geqslant 0{,}1$.

45. а) $\operatorname{ctg} x \leqslant 12$; **б)** $\operatorname{ctg} x \leqslant 13$.

46. а) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x < \sqrt{3}, \\ \operatorname{ctg} x \geqslant -1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \operatorname{ctg} x < 1, \\ \operatorname{ctg} x \geqslant -\sqrt{3}. \end{cases}$

47. а) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \leqslant 6, \\ \operatorname{ctg} x > -\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{ctg} x > -6. \end{cases}$

48. а) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \leqslant 30, \\ \operatorname{ctg} x \geqslant -20; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \leqslant 20, \\ \operatorname{ctg} x \geqslant -30. \end{cases}$

49. а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geqslant 1, \\ \cos x \geqslant 0{,}5; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \cos x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

50. а) $\begin{cases} \sin x \geqslant 0{,}75, \\ \cos x \geqslant 0{,}6; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \sin x \geqslant 0{,}55, \\ \cos x \geqslant 0{,}8. \end{cases}$

51. а) $\begin{cases} \sin x \leqslant \dfrac{5}{13}, \\ \cos x \leqslant \dfrac{11}{13}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \sin x \leqslant \dfrac{12}{13}, \\ \cos x \leqslant \dfrac{4}{13}. \end{cases}$

52. а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geqslant 2{,}5, \\ \operatorname{ctg} x \geqslant 0{,}3; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geqslant 1{,}25, \\ \operatorname{ctg} x \geqslant 0{,}7. \end{cases}$

53. а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}, \\ \cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leqslant 1, \\ \cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

54. а) $\begin{cases} \sin x \leqslant 0{,}7, \\ \operatorname{ctg} x \leqslant 7; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \sin x \leqslant 0{,}8, \\ \operatorname{ctg} x \leqslant 8. \end{cases}$

Диагностическая работа 9

Вариант 1

Решите неравенство (систему неравенств).

1. $\sin x \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $\sin x > -0{,}77$.

3. $\begin{cases} \sin x < 0{,}07, \\ \sin x \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

4. $\cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5. $\cos x \geqslant -0{,}78$.

6. $\begin{cases} \cos x \geqslant -0{,}5, \\ \cos x < 0{,}17. \end{cases}$

7. $\operatorname{tg} x \leqslant -\sqrt{3}$.

8. $\operatorname{tg} x > 18$.

9. $\begin{cases} \operatorname{tg} x < 3, \\ \operatorname{tg} x \geqslant -1. \end{cases}$

10. $\operatorname{ctg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11. $\operatorname{ctg} x \geqslant 2{,}2$.

12. $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{ctg} x > -9. \end{cases}$

Вариант 2

Решите неравенство (систему неравенств).

1. $\sin x \leqslant -\frac{1}{2}$.

2. $\sin x > -0{,}88$.

3. $\begin{cases} \sin x < 0{,}06, \\ \sin x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

4. $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. $\cos x \geqslant -0{,}69$.

6. $\begin{cases} \cos x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x < 0{,}19. \end{cases}$

7. $\operatorname{tg} x \leqslant -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

8. $\operatorname{tg} x > 15$.

9. $\begin{cases} \operatorname{tg} x < 1, \\ \operatorname{tg} x \geqslant -3. \end{cases}$

10. $\operatorname{ctg} x < -\sqrt{3}$.

11. $\operatorname{ctg} x \geqslant 1{,}1$.

12. $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \leqslant 8, \\ \operatorname{ctg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

§ 6.2. Более сложные тригонометрические неравенства

Перейдем теперь к обзору методов решения более сложных тригонометрических неравенств. Многие из таких неравенств сводятся к одному или нескольким простейшим с помощью равносильных алгебраических преобразований или метода введения новой переменной. Метод интервалов используется при решении тригонометрических неравенств с учетом периодичности и свойств четности/нечетности тригонометрических функций. Метод знакотождественных множителей для решения тригонометрических неравенств практически не используется, что опять-таки во многом обусловлено периодичностью тригонометрических функций и связанной с ней невозможностью подобрать простую рациональную функцию с теми же промежутками знакоположительности, знакоотрицательности и нулями. Отдельную группу составляют неравенства, связанные с обратными тригонометрическими функциями. Прежде чем переходить к разбору примеров, напомним некоторые основные формулы тригонометрии:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
2) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$;
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;

3) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$;
$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$;
$\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$;

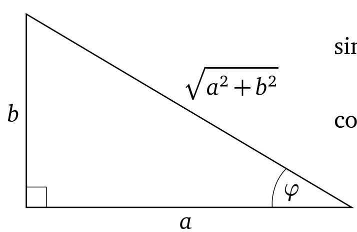
4) $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$;
$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$;

5) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

6) $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$;
$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$;
$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$;

7) $a\sin\alpha \pm b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha\pm\varphi)$, где $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (здесь $a>0$, $b>0$; при $a<0$ выражение указанного вида легко получить, если вынести за скобки -1).

Метод преобразования выражения $a\sin\alpha \pm b\cos\alpha$ в выражение $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha\pm\varphi)$ называется методом вспомогательного аргумента (угла). Этот метод удобно применять к решению неравенств вида $a\sin\alpha \pm b\cos\alpha \vee c$, рассмотрев прямоугольный треугольник с катетами a и b и острым углом φ, противолежащим катету b:



$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Рис. 21

После деления обеих частей такого неравенства на $\sqrt{a^2+b^2}$ приходим к неравенству $\sin\alpha\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\pm\cos\alpha\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\vee\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, откуда $\sin\alpha\cdot\cos\varphi\pm\cos\alpha\cdot\sin\varphi\vee\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, и $\sin(\alpha\pm\varphi)\vee\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Последнее неравенство является по сути простейшим. Кроме того, из равенства $a\sin\alpha\pm b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha\pm\varphi)$ следует, что

$$-\sqrt{a^2+b^2}\leqslant a\sin\alpha\pm b\cos\alpha\leqslant\sqrt{a^2+b^2},$$

т. е. $|a\sin\alpha\pm b\cos\alpha|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

Далее для экономии места рисунки, иллюстрирующие решение простейших тригонометрических неравенств (эти неравенства подробно рассмотрены в предыдущем параграфе), будут опускаться.

Равносильные преобразования

Рассмотрим примеры задач, в которых равносильные преобразования позволяют свести данное неравенство к одному или нескольким простейшим.

Пример 1. Решите неравенство $\cos 2x+\sin^2 x\leqslant 0{,}75$.

Решение. Поскольку $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, приходим к неравенству $\cos 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}\leqslant\frac{3}{4}$, откуда

$$\cos 2x\leqslant\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}+2\pi n\leqslant 2x\leqslant\frac{5\pi}{3}+2\pi n\Leftrightarrow\frac{\pi}{6}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

Пример 2. Решите неравенство $|\sin x|>|\cos x|$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству $\sin^2 x>\cos^2 x$, откуда

$$\cos^2 x-\sin^2 x<0\Leftrightarrow\cos 2x<0\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}+2\pi n<2x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Пример 3. Решите неравенство $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x \leqslant -1$.

Решение. Применим метод вспомогательного аргумента, разделив обе части неравенства на $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$. Получим

$$\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 2x\cdot\frac{1}{2}\leqslant -\frac{1}{2},$$

откуда

$$\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}\leqslant -\frac{1}{2}$$

и

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant -\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6}+2\pi n\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant -\frac{\pi}{6}+2\pi n\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\pi+2\pi n\leqslant 2x\leqslant -\frac{\pi}{3}+2\pi n\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+\pi n\leqslant x\leqslant -\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

Пример 4. Решите неравенство $4\cos 7x\cdot\cos 3x\geqslant 2\cos 10x+\sqrt{3}$.

Решение. Преобразуем произведение косинусов в левой части неравенства в сумму. Получим

$$4\cdot\frac{1}{2}(\cos 10x+\cos 4x)\geqslant 2\cos 10x+\sqrt{3},$$

откуда

$$\cos 4x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6}+2\pi n\leqslant 2x\leqslant\frac{\pi}{6}+2\pi n\Leftrightarrow -\frac{\pi}{12}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+\pi n,$$
$$n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{12}+\pi n; \frac{\pi}{12}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

В следующем примере ключевой идеей решения является разложение на множители.

Пример 5. Решите неравенство $\sin 2x+\sqrt{2}\sin x<2\cos x+\sqrt{2}$.

Решение. Воспользуемся формулой синуса удвоенного аргумента и вынесем за скобки общий множитель:

$$2\sin x\cos x+\sqrt{2}\sin x<2\cos x+\sqrt{2}\Leftrightarrow\sin x\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)<2\cos x+\sqrt{2}.$$

Перенесем все слагаемые в правую часть неравенства и еще раз вынесем общий множитель:

$$2\cos x+\sqrt{2}-\sin x\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)>0\Leftrightarrow\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)(1-\sin x)>0.$$

Поскольку $\sin x \leqslant 1$ при любом действительном значении переменной, последнее неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \sin x \neq 1, \\ \cos x > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n < x \leqslant \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим пример, в котором приходится учитывать ОДЗ неравенства.

Пример 6. Решите неравенство $\dfrac{\sin 4x}{\sin 2x} \leqslant \sqrt{2}$.

Решение. Применим формулу удвоенного аргумента:

$$\frac{2\sin 2x \cos 2x}{\sin 2x} \leqslant \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant 2x < \pi + 2\pi n, \\ \pi + 2\pi n < 2x \leqslant \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi n, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{8} + \pi n \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ \dfrac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant \dfrac{7\pi}{8} + \pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[\dfrac{\pi}{8} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{7\pi}{8} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 7. Решите неравенство $|3\sin x - 1| \geqslant \sin x$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 3\sin x - 1 \geqslant \sin x, \\ 3\sin x - 1 \leqslant -\sin x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ \sin x \leqslant \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, \\ \pi - \arcsin\dfrac{1}{4} + 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi + \arcsin\dfrac{1}{4} + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[\pi - \arcsin\dfrac{1}{4} + 2\pi n; 2\pi + \arcsin\dfrac{1}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Метод введения новой переменной

Метод введения новой переменной позволяет свести тригонометрическое неравенство к алгебраическому и после решения алгебраического неравенства и обратной замены получить одно или несколько простейших или более простых по сравнению с данным тригонометрических неравенств.

Пример 8. Решите неравенство $6\sin^2 x - \sin x - 1 \leqslant 0$.

Решение. Пусть $\sin x = z$. Тогда $6z^2 - z - 1 \leqslant 0$. Корнями квадратного трехчлена в левой части полученного неравенства являются числа $-\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$, поэтому оно равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} z \geqslant -\frac{1}{3}, \\ z \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} \sin x \geqslant -\frac{1}{3}, \\ \sin x \leqslant \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \left[\begin{array}{l} -\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n, \end{array} \right. \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[-\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 9. Решите неравенство $2\sin^2 x - \cos x - 1 \leqslant 0$.

Решение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и приведем неравенство к квадратному относительно $\cos x$. Получим

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 \geqslant 0.$$

Пусть $\cos x = z$. Тогда $2z^2 + z - 1 \geqslant 0$. Корнями квадратного трехчлена в левой части последнего неравенства являются числа -1 и $0{,}5$, поэтому оно равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} z \geqslant 0{,}5, \\ z \leqslant -1. \end{array} \right.$$

Сделав обратную замену, получим

$$\left[\begin{array}{l} \cos x \geqslant 0{,}5, \\ \cos x \leqslant -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x \geqslant 0{,}5, \\ \cos x = -1, \end{array} \right.$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = \pi + 2\pi n, \end{array} \right. \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right] \cup \{\pi + 2\pi n\}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 10. Решите неравенство $\dfrac{1}{\cos^2 x}+\operatorname{tg} x-3\geqslant 0$.

Р е ш е н и е. Приведем неравенство к квадратному относительно $\operatorname{tg} x$. Воспользовавшись тем, что $\dfrac{1}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}^2 x+1$, получим неравенство $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-2\geqslant 0$. Пусть $\operatorname{tg} x=z$. Неравенство примет вид $z^2+z-2\geqslant 0$. Корнями квадратного трехчлена в левой части последнего неравенства являются числа -2 и 1, поэтому оно равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} z\geqslant 1,\\ z\leqslant -2.\end{array}\right.$ Сделав обратную замену, получим

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x\geqslant 1,\\ \operatorname{tg} x\leqslant -2,\end{array}\right. \quad \text{откуда} \quad \left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{4}+\pi n\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n<x\leqslant \pi-\operatorname{arctg} 2+\pi n,\end{array}\right. \qquad n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi-\operatorname{arctg} 2+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

При решении биквадратных относительно синуса или косинуса неравенств целесообразно после обратной замены использовать формулы понижения степени — это позволит уменьшить число простейших неравенств на последнем этапе решения.

Пример 11. Решите неравенство $16\cos^4 x-16\cos^2 x+3<0$.

Р е ш е н и е. Пусть $\cos^2 x=z$. Неравенство примет вид $16z^2-16z+3<0$. Корнями квадратного трехчлена в левой части последнего неравенства являются числа $\dfrac{1}{4}$ и $\dfrac{3}{4}$, поэтому оно равносильно системе неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} z>\dfrac{1}{4},\\ z<\dfrac{3}{4}.\end{array}\right.$$

Сделав обратную замену, получим

$$\left\{\begin{array}{l} \cos^2 x>\dfrac{1}{4},\\ \cos^2 x<\dfrac{3}{4},\end{array}\right.$$

откуда

$$\left\{\begin{array}{l} 2\cos^2 x>\dfrac{1}{2},\\ 2\cos^2 x<\dfrac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+\cos 2x>\dfrac{1}{2},\\ 1+\cos 2x<\dfrac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos 2x>-\dfrac{1}{2},\\ \cos 2x<\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}+\pi n<2x<\frac{2\pi}{3}+\pi n \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{2};\ \dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi n}{2}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Следующее неравенство сводится к однородному неравенству второй степени.

Пример 12. Решите неравенство $3\sin^2 x - 2\sin 2x + 5\cos^2 x \geqslant 2$.

Р е ш е н и е. Перепишем неравенство в виде

$$3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x \geqslant 2\sin^2 x + 2\cos^2 x,$$

откуда

$$\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x \geqslant 0.$$

Рассмотрим 2 случая.

1. Пусть $\cos x = 0$, т. е. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $\sin^2 x = 1$, и неравенство принимает вид $1 \geqslant 0$, т. е. выполняется при всех $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Пусть теперь $\cos x \neq 0$. Тогда $\cos^2 x > 0$. Разделив обе части неравенства на $\cos^2 x$, приходим к неравенству $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 \geqslant 0$. Пусть $\operatorname{tg} x = z$. Неравенство примет вид $z^2 - 4z + 3 \geqslant 0$. Корнями квадратного трехчлена в левой части последнего неравенства являются числа 3 и 1, поэтому оно равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} z \geqslant 3, \\ z \leqslant 1. \end{array}\right.$$

Сделав обратную замену, получим

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x \geqslant 3, \\ \operatorname{tg} x \leqslant 1, \end{array}\right. \quad \text{откуда} \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg} 3 + \pi n \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ \dfrac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant \dfrac{5\pi}{4} + \pi n, \end{array}\right. \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Объединив множества решений, полученные в двух рассмотренных случаях, находим, что $x \in \left[\operatorname{arctg} 3 + \pi m; \frac{5\pi}{4} + \pi m\right]$, $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left[\operatorname{arctg} 3 + \pi m; \frac{5\pi}{4} + \pi m\right]$, $m \in \mathbb{Z}$.

Завершим обзор неравенств, решаемых с помощью метода введения новой переменной, неравенством, которое требует менее стандартной замены.

Пример 13. Решите неравенство $\sin 2x < \sin x + \cos x + 1$.

Р е ш е н и е. Пусть $\sin x + \cos x = z$. Заметим, что $|z| \leqslant \sqrt{2}$ (это следует из неравенства $|a\sin\alpha \pm b\cos\alpha| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$ — см. формулу 7 в начале параграфа). Тогда $(\sin x + \cos x)^2 = z^2$, откуда $1 + \sin 2x = z^2$ и $\sin 2x = z^2 - 1$. Данное неравенство примет вид $z^2 - 1 < z + 1$, откуда $z^2 - z - 2 < 0$. Корнями квадратного трехчлена в левой части последнего неравенства являются числа -1 и 2, поэтому оно равносильно системе неравенств $\begin{cases} z > -1, \\ z < 2. \end{cases}$ Из условия $|z| \leqslant \sqrt{2}$ вытекает, что неравенство $z < 2$ будет выполнено и его можно опустить. Сделав обратную замену, получим неравенство $\sin x + \cos x > -1$. Воспользуемся методом вспомогательного аргумента, разделив обе части этого неравенства на $\sqrt{2}$. Получим

$$\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} > -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4} > -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

и

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Метод интервалов

Применение метода интервалов к решению тригонометрических неравенств существенным образом основывается на таких свойствах основных тригонометрических функций, как периодичность и четность или нечетность. Сам алгоритм метода интервалов не претерпевает существенных изменений: сначала неравенство приводится к виду $f(x) \vee \vee 0$; затем определяется основной период T функции $y = f(x)$; далее решение неравенства ищется на любом отрезке длины T стандартным образом (находятся D_f, нули функции $f(x)$, и определяются промежутки знакопостоянства $f(x)$, после чего с учетом периодичности записывается ответ). Если функция $y = f(x)$ является четной или нечетной, то решение неравенства ищется на отрезке $\left[0; \frac{T}{2}\right]$, затем с учетом четности (нечетности) находится решение на отрезке $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$, после чего записывается ответ с учетом периодичности функции $y = f(x)$.

Напомним следующее утверждение.

Утверждение. *Если T — основной период функции $y = f(x)$, то $\frac{T}{|a|}$ — основной период функции $y = f(ax + b)$.*

В самом деле, график функции $y = f(ax + b)$ получается из графика функции $y = f(x)$ путем последовательного сжатия в $|a|$ раз к оси ординат (если $|a| > 1$) или растяжения в $\frac{1}{|a|}$ от оси ординат (если $|a| < 1$), параллельного переноса вдоль оси абсцисс и (если $a<0$) симметрии относительно оси абсцисс. Параллельный перенос и симметрия не влияют на величину основного периода, а сжатие в $|a|$ раз, очевидно, уменьшает в $|a|$ раз и величину основного периода (так же как и растяжение в $\frac{1}{|a|}$ раз увеличивает в $\frac{1}{|a|}$ раз эту величину).

Что касается общего периода T двух функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, основные периоды которых равны соответственно T_1 и T_2, то число T будет их общим периодом, если существуют такие натуральные числа n и k, что $nT_1=T$, $kT_2=T$. Отсюда вытекает, что $nT_1=kT_2$, т. е. $\frac{T_1}{T_2}=\frac{k}{n}$ (отношение периодов T_1 и T_2 должно быть рациональным числом). Если это не так (т. е. отношение периодов иррационально), то общего периода для таких функций не существует.

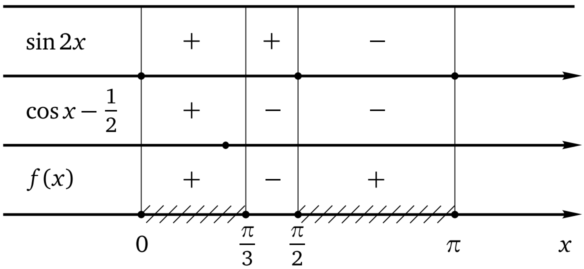
Вопрос о периодичности суммы, разности, произведения, частного двух периодических функций с основными периодами T_1 и T_2 однозначно не решается. Например, период суммы или произведения двух функций может оказаться меньше периода каждой из них, эти сумма или произведение могут оказаться непериодическими функциями и т. п.

На практике для определения общего периода суммы или произведения нескольких периодических функций, как правило, оказывается достаточно приведенного выше утверждения.

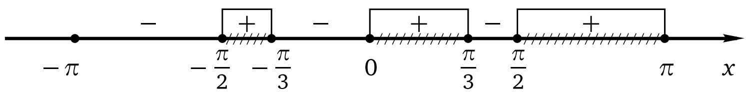
Пример 14. Решите неравенство $\sin x+\sin 3x \geqslant \sin 2x$.

Р е ш е н и е. Преобразуем сумму синусов в левой части неравенства в произведение, после чего вынесем за скобки общий множитель. Получим $2\sin 2x\cos x \geqslant \sin 2x$, откуда $2\sin 2x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\geqslant 0$, или $\sin 2x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\geqslant 0$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\sin 2x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$ и решим неравенство $f(x)\geqslant 0$ методом интервалов. Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечетной (поскольку $f(-x)=-f(x)$) периодической функцией, один из периодов которой равен, очевидно, 2π (совершенно необязательно доказывать, что это будет основной период функции). Поэтому сначала решим неравенство на отрезке $[0;\pi]$, а затем воспользуемся нечетностью и периодичностью функции $y=f(x)$. Найдем нули этой функции на указанном отрезке. Для этого решим уравнения $\sin 2x=0$ и $\cos x=\frac{1}{2}$. Из первого уравнения находим $x=\frac{\pi m}{2}$, $m\in\mathbb{Z}$. Отрезку $[0;\pi]$ принадлежат корни 0; $\frac{\pi}{2}$; π. Из второго уравнения находим $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Отрезку $[0;\pi]$ принадлежит единственный корень $\frac{\pi}{3}$. Применим метод интервалов на указанном отрезке:



Теперь, воспользовавшись нечетностью функции $y=f(x)$, найдем множество решений неравенства на отрезке $[-\pi;\,\pi]$:



Получим $\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[0;\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$. Наконец, воспользовавшись периодичностью функции $y=f(x)$, найдем множество решений данного неравенства: $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup$ $\cup\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\pi+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\pi+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

Применение свойств функций

При решении некоторых тригонометрических неравенств используются свойства ограниченности синуса и косинуса; свойства же монотонности тригонометрических функций (на каких-либо промежутках числовой оси) практически не используются.

Пример 15. Решите неравенство $\sin^{17}x+\cos^{19}x\geqslant 1$.

Решение. Так как $0\leqslant|\sin x|\leqslant 1$ и $0\leqslant|\cos x|\leqslant 1$, получаем, что $\sin^{17}x\leqslant\sin^2 x$, $\cos^{19}x\leqslant\cos^2 x$. Поэтому левая часть данного неравенства не превосходит $\sin^2 x+\cos^2 x$, т. е. 1. Тем самым, данное неравенство будет выполнено, только когда его левая часть равна 1, что возможно в том и только том случае, если

$$\begin{cases}\sin^{17}x=\sin^2 x,\\ \cos^{19}x=\cos^2 x,\end{cases}\quad\text{откуда}\quad\begin{cases}\sin^2 x(\sin^{15}x-1)=0,\\ \cos^2 x(\cos^{17}x-1)=0.\end{cases}$$

Из первого уравнения последней системы получаем, что $\sin x = 1$ или $\sin x = 0$. Если $\sin x = 1$, то $\cos x = 0$ и второе уравнение системы выполнено. Следовательно, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Если $\sin x = 0$, то $\cos x = \pm 1$, но второму уравнению последней системы удовлетворяет только $\cos x = 1$. Значит, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\{2\pi n\}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 16. Решите неравенство $\sin 5x \cdot \cos 4x \leqslant -1$.

Решение. Так как $|\sin 5x| \leqslant 1$ и $|\cos 4x| \leqslant 1$, левая часть неравенства не меньше -1. Поэтому неравенство будет выполнено, только если его левая часть равна -1. Равной -1 она может быть в том и только том случае, если

$$\begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \cos 4x = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin 5x = -1, \\ \cos 4x = 1. \end{cases}$$

Вместо двух систем можно получить одну, если сначала воспользоваться формулой

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

и перейти к неравенству $\sin 9x + \sin x \leqslant -2$, откуда

$$\begin{cases} \sin 9x = -1, \\ \sin x = -1, \end{cases} \quad \text{и, значит,} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{9}, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. Остается установить, существуют ли такие целые k и n, при которых последняя система имеет решения. Для этого приравняем правые части уравнений системы: $-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{9} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, откуда после упрощений получим $-1 + 4n = -9 + 36k$. Следовательно, $n = 9k - 2$, и решениями системы являются корни ее второго уравнения, т. е. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 17. Решите неравенство $16\sin 17x + 17\cos 16x \geqslant 33$.

Решение. Так как $\sin 17x \leqslant 1$ и $\cos 16x \leqslant 1$, левая часть данного неравенства не превосходит 33. Следовательно, неравенство имеет решения в том и только том случае, если его левая часть равна 33. Равной 33 она будет тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \sin 17x = 1, \\ \cos 16x = 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{34} + \frac{2\pi n}{17}, \\ x = \frac{\pi k}{8}, \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. Остается установить, существуют ли такие целые k и n, при которых последняя система имеет хотя бы одно решение. Для этого приравняем правые части уравнений системы: $\frac{\pi}{34}+\frac{2\pi n}{17}=\frac{\pi k}{8}$, откуда после умножения обеих частей полученного равенства на $17\cdot 8$ и деления на π получим $4+16n=17k$. Стандартный способ решения полученного уравнения в целых числах не входит в программу средней школы. Для решения подобных задач, как правило, достаточно использовать элементарные соображения, связанные с делимостью целых чисел. Перепишем равенство $4+16n=17k$ в виде $k-4=16n-16k$. Очевидно, что при любых целых k и n число $16n-16k$ делится на 16. Поэтому равенство возможно лишь в случае, если $k-4$ делится на 16, т. е. если $k-4=16l$, где $l\in\mathbb{Z}$. Таким образом, $k=16l+4$, где $l\in\mathbb{Z}$. Но тогда $4+16n=17(16l+4)$, откуда $n=17l+4$. Таким образом, найдены целые k и n, при которых выполняется система

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{34}+\dfrac{2\pi n}{17}, \\ x=\dfrac{\pi k}{8}. \end{cases}$$

Осталось правую часть любого из уравнений этой системы выразить через l. Получим $x=\frac{\pi}{2}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi l\right\}$, $l\in\mathbb{Z}$.

Пример 18. Найдите все пары $(x;\, y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых $9\cos x-y^2\geqslant\sqrt{y-4x^2-3}$.

Р е ш е н и е. Перепишем данное неравенство в виде

$$9\cos x\geqslant y^2+\sqrt{y-4x^2-3}$$

и попытаемся оценить левую и правую части полученного неравенства. С левой частью все понятно: $-9\leqslant 9\cos x\leqslant 9$. Правая часть неравенства определена только при условии $y-4x^2-3\geqslant 0$, откуда $y\geqslant 4x^2+3$ и, следовательно, $y\geqslant 3$. Но тогда $y^2\geqslant 9$. Таким образом, правая часть неравенства не меньше 9, а левая — не больше 9. Поэтому неравенство будет выполняться, только если и левая, и правая его части равны 9. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} \cos x=1, \\ y=3, \\ \sqrt{y-4x^2-3}=0, \end{cases} \qquad \text{откуда} \qquad \begin{cases} x=0, \\ y=3. \end{cases}$$

Ответ: $(0;\, 3)$.

Пример 19. Решите неравенство $\cos(\pi x)+\cos(\sqrt{7}\pi x)\geqslant 2$.

Решение. Так как $\cos(\pi x)\leqslant 1$ и $\cos(\sqrt{7}\pi x)\leqslant 1$, левая часть данного неравенства не превосходит 2. Поэтому неравенство будет выполнено, только если его левая часть равна 2. Равной 2 она может быть в том и только том случае, если

$$\begin{cases}\cos(\pi x)=1,\\ \cos(\sqrt{7}\pi x)=1,\end{cases}\quad \text{откуда}\quad \begin{cases}\pi x=2\pi n,\\ \sqrt{7}\pi x=2\pi k,\end{cases}\quad \text{и, значит,}\quad \begin{cases}x=2n,\\ \sqrt{7}x=2k,\end{cases}$$

где $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$. Если $n=k=0$, то $x=0$ — решение системы. Если $n\neq 0$, то $x\neq 0$ и можно второе уравнение системы почленно разделить на первое. Получим $\sqrt{7}=\dfrac{k}{n}$. Поскольку $\sqrt{7}$ — число иррациональное, а $\dfrac{k}{n}$ — число рациональное, равенство $\sqrt{7}=\dfrac{k}{n}$ не может выполняться ни при каких целых k и n. Следовательно, $x=0$ является единственным решением системы $\begin{cases}x=n,\\ \sqrt{2}x=k,\end{cases}$ а вместе с ней и данного неравенства.

Ответ: $\{0\}$.

Неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции

Последнюю группу задач этого параграфа составляют неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции. Решение таких неравенств существенным образом основывается на определении и свойствах арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса. Напомним эти определения и свойства.

I. Арксинусом числа a (обозначение: $\arcsin a$) называется такое число α, что а) $\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$; б) $\sin\alpha=a$, т. е. $\alpha=\arcsin a$, если $\alpha\in$ $\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\alpha=a$.

Из этого определения и свойств синуса вытекают следующие свойства функции $y=\arcsin x$:

1) областью определения $D(\arcsin x)$ функции является отрезок $[-1;1]$;
2) множеством значений $E(\arcsin x)$ функции является отрезок $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$;
3) функция $y=\arcsin x$ нечетна: $\arcsin(-x)=-\arcsin x$;
4) функция $y=\arcsin x$ монотонно возрастает на всей области определения.

II. Арккосинусом числа a (обозначение: $\arccos a$) называется такое число α, что а) $\alpha\in[0;\pi]$; б) $\cos\alpha=a$, т. е. $\alpha=\arccos a$, если $\alpha\in[0;\pi]$

и $\cos\alpha = a$. Из этого определения и свойств косинуса вытекают следующие свойства функции $y = \arccos x$:

1) областью определения $D(\arccos x)$ функции является отрезок $[-1; 1]$;
2) множеством значений $E(\arccos x)$ функции является отрезок $[0; \pi]$;
3) функция $y = \arccos x$ не является ни четной, ни нечетной;

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

4) функция $y = \arccos x$ монотонно убывает на всей области определения;
5) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ для любого $x \in [-1; 1]$.

III. Арктангенсом числа a (обозначение: $\operatorname{arctg} a$) называется такое число α, что а) $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\operatorname{tg}\alpha = a$, т. е. $\alpha = \operatorname{arctg} a$, если $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}\alpha = a$. Из этого определения и свойств тангенса вытекают следующие свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$:

1) областью определения $D(\operatorname{arctg} x)$ функции является вся числовая прямая;
2) множеством значений $E(\operatorname{arctg} x)$ функции является промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
3) функция $y = \operatorname{arctg} x$: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;
4) функция $y = \operatorname{arctg} x$ монотонно возрастает на всей области определения.

IV. Арккотангенсом числа a (обозначение: $\operatorname{arcctg} a$) называется такое число α, что а) $\alpha \in (0; \pi)$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = a$, т. е. $\alpha = \operatorname{arcctg} a$, если $\alpha \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg}\alpha = a$.

Из этого определения и свойств котангенса вытекают следующие свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$:

1) областью определения $D(\operatorname{arcctg} x)$ функции является вся числовая прямая;
2) множеством значений $E(\operatorname{arcctg} x)$ функции является промежуток $(0; \pi]$;
3) функция $y = \operatorname{arcctg} x$ не является ни четной, ни нечетной;

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$

4) функция $y = \operatorname{arcctg} x$ монотонно убывает на всей области определения;
5) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Свойства монотонности обратных тригонометрических функций с учетом областей определения этих функций существенным образом используются при решении стандартных неравенств вида $f(g(x)) \vee f(h(x))$, где f — одна из четырех обратных тригонометрических функций:

$$\arcsin(g(x)) < \arcsin(h(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < h(x), \\ g(x) \geqslant -1, \\ h(x) \leqslant 1; \end{cases}$$

$$\arccos(g(x)) < \arccos(h(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > h(x), \\ g(x) \leqslant 1, \\ h(x) \geqslant -1; \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg}(g(x)) < \operatorname{arctg}(h(x)) \Leftrightarrow g(x) < h(x);$$

$$\operatorname{arcctg}(g(x)) < \operatorname{arcctg}(h(x)) \Leftrightarrow g(x) > h(x).$$

Для нестрогих неравенств все неравенства после знаков равносильности также будут нестрогими.

Пример 20. Решите неравенство

$$\arcsin(12x^2 - 8x - 1) \leqslant \arcsin(2x + 1).$$

Р е ш е н и е. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 12x^2 - 8x - 1 \leqslant 2x + 1, \\ 12x^2 - 8x - 1 \geqslant -1, \\ 2x + 1 \leqslant 1, \end{cases} \qquad \text{откуда} \qquad \begin{cases} 6x^2 - 5x - 1 \leqslant 0, \\ x\left(x - \frac{2}{3}\right) \geqslant 0, \\ x \leqslant 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трехчлена $6x^2 - 5x - 1$ являются числа $-\frac{1}{6}$ и 1, поэтому множеством решений первого неравенства системы является промежуток $\left[-\frac{1}{6}; 1\right]$. Множеством решений второго неравенства системы является объединение промежутков $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. Множеством решений всей системы является промежуток $\left[-\frac{1}{6}; 0\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{6}; 0\right]$.

Пример 21. Решите неравенство

$$\arccos(4x^2 - 3x - 2) + \arccos(3x^2 - 8x - 4) \geqslant \pi.$$

Р е ш е н и е. Перепишем данное неравенство в виде

$$\arccos(4x^2 - 3x - 2) \geqslant \pi - \arccos(3x^2 - 8x - 4)$$

и воспользуемся тем, что $\pi - \arccos a = \arccos(-a)$. Получим неравенство

$$\arccos(4x^2 - 3x - 2) \geqslant \arccos(-3x^2 + 8x + 4).$$

Это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 4x^2 - 3x - 2 \leqslant -3x^2 + 8x + 4, \\ 4x^2 - 3x - 2 \geqslant -1, \\ -3x^2 + 8x + 4 \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} 7x^2 - 11x - 6 \leqslant 0, \\ 4x^2 - 3x - 1 \geqslant 0, \\ 3x^2 - 8x - 3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трехчлена $7x^2 - 11x - 6$ являются числа $-\frac{3}{7}$ и 2, поэтому множеством решений первого неравенства системы является промежуток $\left[-\frac{3}{7}; 2\right]$. Корнями квадратного трехчлена $4x^2 - 3x - 1$ являются числа $-\frac{1}{4}$ и 1, поэтому множеством решений второго неравенства системы является объединение промежутков $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup [1; +\infty)$. Корнями квадратного трехчлена $3x^2 - 8x - 3$ являются числа $-\frac{1}{3}$ и 3, поэтому множеством решений третьего неравенства системы является объединение промежутков $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup [3; +\infty)$. Множеством решений всей системы является промежуток $\left[-\frac{3}{7}; -\frac{1}{3}\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{3}{7}; -\frac{1}{3}\right]$.

При решении неравенств, левая и правая части которых представляют собой разноименные обратные тригонометрические функции, целесообразно использовать метод интервалов либо свойства монотонности этих функций.

Пример 22. Решите неравенство $\arcsin \frac{x+2}{5} \leqslant \arccos \frac{3x+1}{5}$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \arcsin \frac{x+2}{5} - \arccos \frac{3x+1}{5}$$

и решим неравенство $f(x) \leqslant 0$ методом интервалов.

1. Найдем $D(f)$. Для этого решим систему неравенств

$$\begin{cases} -1 \leqslant \dfrac{x+2}{5} \leqslant 1, \\ -1 \leqslant \dfrac{3x+1}{5} \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leqslant x+2 \leqslant 5, \\ -5 \leqslant 3x+1 \leqslant 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leqslant x \leqslant 3, \\ -2 \leqslant x \leqslant \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}.$$

2. Найдем нули функции $f(x)$. Для этого решим уравнение

$$\arcsin\frac{x+2}{5}=\arccos\frac{3x+1}{5}.$$

Для решения уравнений, левая и правая части которых представляют собой разноименные обратные тригонометрические функции можно использовать следующий алгоритм. Пусть

$$\alpha=\arcsin\frac{x+2}{5}=\arccos\frac{3x+1}{5}.$$

Тогда $\sin\alpha=\frac{x+2}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3x+1}{5}$, откуда

$$\left(\frac{x+2}{5}\right)^2+\left(\frac{3x+1}{5}\right)^2=1.$$

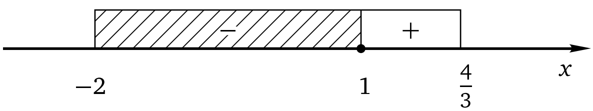
Кроме того, поскольку $\alpha=\arcsin\frac{x+2}{5}$, получаем, что $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, а поскольку $\alpha=\arccos\frac{3x+1}{5}$, получаем, что $\alpha\in[0;\pi]$. Таким образом, $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, откуда $\frac{x+2}{5}\geqslant 0$ (т. е. $x\geqslant -2$) и $\frac{3x+1}{5}\geqslant 0$ $\left(\text{т. е. } x\geqslant -\frac{1}{3}\right)$. Итак, для нахождения нулей функции $f(x)$ нужно решить уравнение

$$\left(\frac{x+2}{5}\right)^2+\left(\frac{3x+1}{5}\right)^2=1$$

с учетом $D(f)$ и условия $x\geqslant-\frac{1}{3}$. Приходим к системе

$$\begin{cases}\left(\frac{x+2}{5}\right)^2+\left(\frac{3x+1}{5}\right)^2=1,\\ -\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-2=0,\\ -\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=1,\end{array}\right.\\ -\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

3. Применим метод интервалов:



Для расстановки знаков наиболее удобно использовать граничные точки области определения: $f(-2)<0$, $f\left(\frac{4}{3}\right)>0$.

Ответ: $[-2;1]$.

Заметим, что, решив систему в п. 3, можно было не применять метод интервалов, а воспользоваться тем, что функция $y=\arcsin\frac{x+2}{5}$

монотонно возрастает, а функция $y = \arccos\dfrac{3x+1}{5}$ монотонно убывает на $D(f)$, поэтому решением данного неравенства является отрезок $[-2; 1]$. Следует, однако, понимать, что метод интервалов является более универсальным: он применим и в тех случаях, когда свойства монотонности использовать не удается.

Заметим также, что

$$\arcsin(g(x)) = \arccos(h(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} (g(x))^2 + (h(x))^2 = 1, \\ g(x) \geqslant 0, \\ h(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Для вычисления корней уравнений, левая и правая части которых представляют собой обратные тригонометрические функции, полезными могут оказаться и следующие равносильные переходы:

$$\operatorname{arctg}(g(x)) = \operatorname{arcctg}(h(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\cdot h(x) = 1, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\cdot h(x) = 1, \\ h(x) > 0; \end{cases}$$

$$\arcsin(g(x)) = \operatorname{arcctg}(h(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} (g(x))^2 = \dfrac{1}{(h(x))^2+1}, \\ g(x) > 0, \\ h(x) \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg}(g(x)) = \arccos(h(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} (h(x))^2 = \dfrac{1}{(g(x))^2+1}, \\ h(x) > 0, \\ g(x) \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\arcsin(g(x)) = \operatorname{arctg}(h(x)) \Leftrightarrow (g(x))^2 = \frac{(h(x))^2}{(h(x))^2+1};$$

$$\arccos(g(x)) = \operatorname{arcctg}(h(x)) \Leftrightarrow (g(x))^2 = \frac{(h(x))^2}{(h(x))^2+1}.$$

Рассмотрим теперь два примера, решение которых основано на таких свойствах обратных тригонометрических функций, как монотонность и ограниченность.

Пример 23. Решите неравенство

$$\arccos x + \arccos x\sqrt{2} + \arccos x\sqrt{3} \leqslant \frac{3\pi}{4}.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \arccos x + \arccos x\sqrt{2} + \arccos x\sqrt{3}.$$

Эта функция монотонно убывает на всей области определения $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ (как сумма убывающих функций). Кроме того, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$. Значит, множеством решений данного неравенства является промежуток $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Ответ: $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Пример 24. Решите неравенство

$$\arccos(2x^2-7x+5)+\arcsin(6x^2-19x+15) \geqslant \frac{3\pi}{2}.$$

Решение. Поскольку

$$\arccos(2x^2-7x+5) \leqslant \pi, \quad \arcsin(6x^2-19x+15) \leqslant \frac{\pi}{2},$$

левая часть данного неравенства не больше $\frac{3\pi}{2}$. Поэтому неравенство будет выполнено в том и только том случае, когда его левая часть равна $\frac{3\pi}{2}$, что возможно, только если

$$\begin{cases} \arccos(2x^2-7x+5) = \pi, \\ \arcsin(6x^2-19x+15) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-7x+5 = -1, \\ 6x^2-19x+15 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-7x+6 = 0, \\ 6x^2-19x+14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 1{,}5, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = \frac{7}{6} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $\{2\}$.

В заключение обзора методов решения неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции, рассмотрим два примера на метод введения новой переменной.

Пример 25. Решите неравенство $\arccos^2 x - 3\arccos x + 2 \geqslant 0$.

Решение. Пусть $t = \arccos x$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Тогда

$$t^2-3t+2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geqslant 2, \\ t \leqslant 1. \end{array}\right.$$

Поскольку $0 \leqslant t \leqslant \pi$, получим

$$\left[\begin{array}{l} 2 \leqslant t \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{array}\right.$$

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l}2 \leqslant \arccos x \leqslant \pi,\\ 0 \leqslant \arccos x \leqslant 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1 \leqslant x \leqslant \cos 2,\\ \cos 1 \leqslant x \leqslant 1.\end{array}\right.$$

Ответ: $[-1; \cos 2] \cup [\cos 1; 1]$.

Пример 26. Решите неравенство $\arccos x \cdot \arcsin x \leqslant \frac{\pi^2}{18}$.

Р е ш е н и е. Поскольку $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, данное неравенство равносильно следующему:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) \cdot \arcsin x \leqslant \frac{\pi^2}{18},$$

откуда

$$18 \arcsin^2 x - 9\pi \arcsin x + \pi^2 \geqslant 0.$$

Пусть $t = \arcsin x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$18t^2 - 9\pi t + \pi^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t \geqslant \frac{\pi}{3},\\ t \leqslant \frac{\pi}{6}.\end{array}\right.$$

Поскольку $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, получим

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{3} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},\\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{6}.\end{array}\right.$$

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{3} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2},\\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{6}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant x \leqslant 1,\\ -1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[-1; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$.

Упражнения к § 6.2

Решите неравенство.

1. а) $\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) \geqslant -0{,}5$; **б)** $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. а) $\sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$; **б)** $\sin\left(5x + \frac{2\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. а) $\cos\left(3x - \frac{5\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$; **б)** $\cos\left(2x - \frac{5\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. а) $\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **б)** $\cos\left(5x-\frac{4\pi}{3}\right)\leqslant-0{,}5$.

5. а) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{7\pi}{6}\right)\geqslant-\frac{1}{\sqrt{3}}$; **б)** $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{11\pi}{6}\right)\geqslant-\sqrt{3}$.

6. а) $\operatorname{ctg}\left(5x-\frac{8\pi}{3}\right)>-\frac{1}{\sqrt{3}}$; **б)** $\operatorname{ctg}\left(10x+\frac{9\pi}{4}\right)>-1$.

7. а) $\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{7\pi}{6}\right)\leqslant\sqrt{3}$; **б)** $\operatorname{ctg}\left(3x-\frac{7\pi}{3}\right)\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$.

8. а) $\cos 2x+0{,}5\leqslant\cos^2 x$; **б)** $\cos 2x+\sin^2 x\leqslant 0{,}25$.

9. а) $2\cos^2 x+\cos 2x\geqslant\sqrt{3}+1$; **б)** $1+\cos 2x\geqslant\sqrt{2}+2\sin^2 x$.

10. а) $1+\sqrt{2}+2\cos 2x+\sin 2x\geqslant(\sin x+\cos x)^2$;

б) $1+\sqrt{3}+2\cos 2x-\sin 2x\geqslant(\sin x-\cos x)^2$.

11. а) $4\sin 5x\cos 3x\leqslant 2\sin 8x+\sqrt{3}$; **б)** $4\sin 7x\cos 5x+\sqrt{3}\leqslant 2\sin 12x$.

12. а) $2\cos 7x\cos 6x\leqslant 0{,}5+\cos 13x$; **б)** $2\cos 8x\cos 7x+0{,}5\leqslant\cos 15x$.

13. а) $4\cos 4x\cos 6x\geqslant 2\cos 2x+\sqrt{3}$; **б)** $4\cos 3x\cos 7x+\sqrt{3}\leqslant 2\cos 4x$.

14. а) $4\sin 3x\sin 2x+1<2\cos x$; **б)** $4\sin 4x\sin 3x<2\cos x+1$.

15. а) $2\sin 5x\sin 3x+\cos 8x>0{,}3$; **б)** $2\sin 7x\sin 2x+\cos 9x>0{,}2$.

16. а) $\sin 4x>\cos 4x$; **б)** $\cos 2x>\sin 2x$.

17. а) $\sin x<\sqrt{3}\cos x$; **б)** $\cos x<\sqrt{3}\sin x$.

18. а) $\sin x+\cos x\geqslant 1$; **б)** $\sin x-\cos x\leqslant 1$.

19. а) $\sin x-\sqrt{3}\cos x\leqslant\sqrt{2}$; **б)** $\sqrt{3}\sin x+\cos x\geqslant\sqrt{2}$.

20. а) $|\sin 5x|\leqslant|\cos 5x|$; **б)** $|\sin 7x|\geqslant|\cos 7x|$.

21. а) $|5\sin x-1|\geqslant 3\sin x$; **б)** $|7\sin x-1|\geqslant 5\sin x$.

22. а) $|5\sin x-2|\leqslant\sin x$; **б)** $|7\sin x-3|\leqslant\sin x$.

23. а) $|5\cos x-4|\geqslant\cos x$; **б)** $|6\cos x-5|\geqslant\cos x$.

24. а) $|5\operatorname{tg} x-2|>3\operatorname{tg} x$; **б)** $|7\operatorname{tg} x-3|>4\operatorname{tg} x$.

25. а) $|9\operatorname{ctg} x-8|<\operatorname{ctg} x$; **б)** $|8\operatorname{ctg} x-7|<\operatorname{ctg} x$.

26. а) $|\operatorname{tg} x+0{,}5|+|\operatorname{tg} x-0{,}5|\leqslant 2$; **б)** $|\operatorname{tg} x+0{,}25|+|\operatorname{tg} x-0{,}25|\leqslant 2$.

27. а) $|\operatorname{tg} x|+|\operatorname{tg} x-1|\leqslant 1$; **б)** $|\operatorname{tg} x|+|\operatorname{tg} x+1|\leqslant 1$.

28. а) $|\operatorname{ctg} x|+|\operatorname{ctg} x-2|\geqslant 4$; **б)** $|\operatorname{ctg} x|+|\operatorname{ctg} x+2|\geqslant 4$.

29. а) $\sqrt{2}\operatorname{tg} 5x\cdot\cos 5x\leqslant 1$; **б)** $2\operatorname{tg} 3x\cdot\cos 3x\leqslant\sqrt{3}$.

30. а) $2\operatorname{tg} 4x\cdot\cos 4x\geqslant 1$; **б)** $\sqrt{2}\operatorname{tg} 6x\cdot\cos 6x\geqslant 1$.

31. а) $2\operatorname{ctg} 8x\cdot\sin 8x+\sqrt{3}\leqslant 0$; **б)** $2\operatorname{ctg} 5x\cdot\sin 5x+\sqrt{2}\leqslant 0$.

32. а) $2\operatorname{ctg} 10x\cdot\sin 10x\geqslant\sqrt{2}$; **б)** $2\operatorname{ctg} 12x\cdot\sin 12x\geqslant\sqrt{3}$.

33. а) $\frac{\sin 8x}{\sin 4x}\leqslant\sqrt{2}$; **б)** $\frac{\sin 4x}{\sin 2x}\geqslant\sqrt{3}$.

34. а) $\sin 2x \leqslant 5\sin x$; **б)** $\sin 2x \geqslant 7\cos x$.

35. а) $2\sin^3 x - 2\sin x + \cos^2 x \geqslant 0$; **б)** $\sqrt{2}\cos^3 x - \sqrt{2}\cos x + \sin^2 x \geqslant 0$.

36. а) $2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 \leqslant 0$; **б)** $\sqrt{2}\sin^3 x - \sin^2 x + \sqrt{2}\sin x - 1 \leqslant 0$.

37. а) $6\sin^2 x + 5\sin x - 4 < 0$; **б)** $4\sin^2 x - 12\sin x + 5 < 0$.

38. а) $6\cos^2 x - 7\cos x - 5 > 0$; **б)** $4\cos^2 x + 4\cos x - 3 > 0$.

39. а) $3\cos 2x - 5\cos x - 1 \geqslant 0$; **б)** $2\cos 2x + 8\cos x - 3 \geqslant 0$.

40. а) $2\cos 2x - 12\sin x + 5 \leqslant 0$; **б)** $2\cos 2x + 16\sin x + 7 \leqslant 0$.

41. а) $10\sin^2 x - 9\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 7 > 0$; **б)** $6\sin^2 x + 13\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - 8 > 0$.

42. а) $6\cos^2 x \geqslant 5\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$; **б)** $4\cos^2 x \geqslant 4\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

43. а) $2\cos 2x + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 \leqslant 0$; **б)** $2\cos 2x + 4\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 \leqslant 0$.

44. а) $2 + \frac{9}{\cos x} \leqslant \frac{5}{\cos^2 x}$; **б)** $6 + \frac{4}{\cos^2 x} \geqslant \frac{11}{\cos x}$.

45. а) $\frac{3}{\sin^2 x} + \frac{4}{\sin x} - 4 \geqslant 0$; **б)** $\frac{5}{\sin^2 x} + \frac{7}{\sin x} - 6 \geqslant 0$.

46. а) $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} + 2 \geqslant 0$; **б)** $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} + 2 \geqslant 0$.

47. а) $7\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos x} + 1 \geqslant 0$; **б)** $6\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos x} + 1 \geqslant 0$.

48. а) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\sin x} - 1 > 0$; **б)** $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{3}{\sin x} + 3 > 0$.

49. а) $\sin^2 x \leqslant 2\sin x$; **б)** $\cos^2 x \leqslant 3\cos x$.

50. а) $8\sin^4 x - 6\sin^2 x + 1 \geqslant 0$; **б)** $8\sin^4 x - 10\sin^2 x + 3 \geqslant 0$.

51. а) $8\cos^4 x - 18\cos^2 x + 9 \leqslant 0$; **б)** $8\cos^4 x - 22\cos^2 x + 5 \leqslant 0$.

52. а) $3\operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 1 \geqslant 0$; **б)** $3\operatorname{tg}^4 x - 10\operatorname{tg}^2 x + 3 \geqslant 0$.

53. а) $\operatorname{ctg}^4 x - 5\operatorname{ctg}^2 x + 4 \leqslant 0$; **б)** $\operatorname{ctg}^4 x - 10\operatorname{ctg}^2 x + 9 \leqslant 0$.

54. а) $\sin^2 x > \sin x \cdot \cos x$; **б)** $\cos^2 x > \sin x \cdot \cos x$.

55. а) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x \leqslant 0$; **б)** $\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 6\cos^2 x \leqslant 0$.

56. а) $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x \geqslant 0$; **б)** $\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 12\cos^2 x \geqslant 0$.

57. а) $4\sin^2 x - 9\sin x\cos x + 11\cos^2 x < 3$; **б)** $3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 9\cos^2 x < 2$.

58. а) $0{,}4\sin x\cos x + 1 \leqslant \sin x + \cos x$; **б)** $0{,}5\sin x\cos x \leqslant \sin x + \cos x + 1$.

59. а) $2\sin x\cos x + 5(\sin x - \cos x) > 5$; **б)** $2\sin x\cos x + 3(\sin x - \cos x) + 3 > 0$.

60. а) $\cos x + \cos 5x \leqslant \cos 3x$; **б)** $\sin x + \sin 5x \leqslant \sin 3x$.

61. а) $\frac{\cos x\sin 3x}{\cos 2x} \leqslant 0$; **б)** $\frac{\sin x\cos 3x}{\cos 2x} \leqslant 0$.

62. а) $\sin^{15} 3x + \cos^{25} 3x \geqslant 1$; **б)** $\sin^{27} 4x + \cos^{29} 4x \geqslant 1$.

63. а) $16\sin 10x+15\cos 12x\leqslant -31$; **б)** $21\sin 22x+23\cos 24x\geqslant 44$.

64. а) $5\cos 4x-11\sin 5x\geqslant 16$; **б)** $7\sin 5x+8\cos 6x\leqslant -15$.

65. а) $\sin 9x\cdot\cos 8x\leqslant -1$; **б)** $\cos 11x\cdot\cos 13x\geqslant 1$.

66. Найдите все пары $(x;\,y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых

а) $27\cos x\geqslant y^3+\sqrt{y-5x^4-3}$; **б)** $64\cos x\geqslant y^3+\sqrt{y-7x^2-4}$.

Решите неравенство.

67. а) $5\cos\left(\sqrt{5}\pi x\right)+9\cos(\pi x)\geqslant 14$; **б)** $6\cos\left(\sqrt{6}\pi x\right)+5\cos(\pi x)\geqslant 11$.

68. а) $\arcsin(3x^2+2x-2)\leqslant\arcsin(x+2)$;

б) $\arcsin(3x^2-4x-1)\leqslant\arcsin(x+1)$.

69. а) $\operatorname{arcctg}(8x^2-6x-1)\leqslant\operatorname{arcctg}(4x^2-x+8)$;

б) $\operatorname{arcctg}(2x^2-3x-1)\leqslant\operatorname{arcctg}(x^2-0{,}5x+8)$.

70. а) $\arccos(x^2-2x-2)\leqslant\arccos(x+2)$;

б) $\arccos(x^2+2x-2)\leqslant\arccos(x+4)$.

71. а) $\arccos(4x^2+5x-1)+\arccos(3x^2-2x-9)\geqslant\pi$;

б) $\arccos(4x^2-11x+5)+\arccos(3x^2-14x+7)\geqslant\pi$.

72. а) $\arcsin\dfrac{4x-5}{5}\geqslant\arccos\dfrac{5x-6}{5}$; **б)** $\arcsin\dfrac{3x-5}{5}\geqslant\arccos\dfrac{7x-18}{5}$.

73. а) $\arcsin\dfrac{2x+1}{13}\leqslant\arccos\dfrac{5x+2}{13}$; **б)** $\arcsin\dfrac{5x-3}{13}\leqslant\arccos\dfrac{2x-1}{13}$.

74. а) $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{3}}+\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{4}}+\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{6}}+\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{12}}\leqslant\dfrac{5\pi}{4}$.

б) $\arccos\sqrt{\dfrac{x}{6}}+\arccos\sqrt{\dfrac{x}{8}}+\arccos\sqrt{\dfrac{x}{12}}+\arccos\sqrt{\dfrac{x}{24}}\leqslant\dfrac{3\pi}{4}$.

75. а) $\arccos(2x^2+3x)-\arcsin(3x^2+4x)\geqslant\dfrac{3\pi}{2}$;

б) $\arccos(5x^2+6x)-\arcsin(4x^2+5x)\geqslant\dfrac{3\pi}{2}$.

76. а) $\arccos(-3x^2+8x-4)-\arcsin(6x^2-17x+12)\leqslant -\dfrac{\pi}{2}$;

б) $\arccos(8x^2-10x+3)-\arcsin(-6x^2+13x-6)\leqslant -\dfrac{\pi}{2}$.

77. а) $\arccos^2 x-4\arccos x+3\geqslant 0$; **б)** $\arccos^2 x-5\arccos x+6\geqslant 0$.

78. а) $6\arcsin^2 x-5\arcsin x+1\leqslant 0$; **б)** $8\arcsin^2 x-6\arcsin x+1\leqslant 0$;

79. а) $\operatorname{arctg}^2 x-7\operatorname{arctg} x+12\geqslant 0$. **б)** $\operatorname{arctg}^2 x-7\operatorname{arctg} x+10\geqslant 0$;

80. а) $\operatorname{arcctg}^2 x-9\operatorname{arcctg} x+20\leqslant 0$; **б)** $\operatorname{arcctg}^2 x-12\operatorname{arcctg} x+20\leqslant 0$.

Диагностическая работа 10

Вариант 1

Решите неравенство.

1. $\operatorname{tg}\left(6x+\frac{5\pi}{3}\right)<\sqrt{3}$.

2. $4\sin 4x\cos x+\sqrt{3}\geqslant 2\sin 3x$.

3. $|3\cos x+2|<7\cos x$.

4. $\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x+\sqrt{2}\geqslant 0$.

5. $|\operatorname{ctg} x-0{,}25|+|\operatorname{ctg} x-0{,}75|\geqslant 1$.

6. $\frac{\sin 10x}{\cos 5x}\geqslant 1$.

7. $4\sin^3 x+8\sin^2 x-3\sin x-6\leqslant 0$.

8. $4\sin^2 x+8\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+1<0$.

9. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x\geqslant 0$.

10. $5\cos\left(3\sqrt{5}\pi x\right)+2\cos(4\pi x)\geqslant 7$.

11. $3\arcsin 2x<1$.

12. $12\arcsin^2 x-7\pi\arcsin x+\pi^2\leqslant 0$.

Вариант 2

Решите неравенство.

1. $\operatorname{tg}\left(8x+\frac{7\pi}{6}\right)<\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $4\sin 6x\cos 2x\leqslant 2\sin 4x+\sqrt{2}$.

3. $|2\cos x+3|<8\cos x$.

4. $\cos 4x-\sqrt{3}\sin 4x+\sqrt{3}\geqslant 0$.

5. $|\operatorname{ctg} x+0{,}25|+|\operatorname{ctg} x+0{,}75|\geqslant 1$.

6. $\frac{\sin 12x}{\cos 6x}\geqslant\sqrt{2}$.

7. $4\cos^3 x-24\cos^2 x-3\cos x+18\geqslant 0$.

8. $6\sin^2 x-7\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-1<0$.

9. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x\geqslant 0$.

10. $2\cos\left(2\sqrt{3}\pi x\right)+3\cos(2\pi x)\geqslant 5$.

11. $4\arcsin 3x<1$.

12. $24\arccos^2 x-10\pi\arccos x+\pi^2\leqslant 0$.

Глава 7. Показательные неравенства

Показательными выражениями будем называть выражения, алгебраическая запись которых содержит переменную в показателе (отсюда и название) степени. Неравенства, одна или обе части которых содержат показательные выражения, называются показательными. Как было оговорено ранее, наряду с показательными в таких неравенствах могут встретиться рациональные, иррациональные и тригонометрические алгебраические выражения. Общие методы решения показательных неравенств не отличаются от общих методов решения других неравенств: это равносильные преобразования, метод введения новой переменной, метод знакотождественных множителей, метод интервалов и др. Разумеется, эти методы основываются на свойствах степени с действительным показателем, которые аналогичны свойствам степени с рациональным показателем. Напомним эти свойства.

Если $a>0$, $b>0$, а n и m — действительные числа, то

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n};$$
$$(a^n)^m = a^{nm}; \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

§ 7.1. Простейшие показательные неравенства

Простейшими показательными неравенствами назовём неравенства вида $a^{f(x)} \vee a^b$ или $a^{f(x)} \vee a^{g(x)}$, где a и b — действительные числа, $a>0$, $a \neq 1$, $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены первой или второй степени. Решение простейших показательных неравенств существенным образом основывается на монотонности показательной функции: если $a>1$, то функция $y=a^t$ возрастает на всей числовой прямой, и тогда $a^{t_1}<a^{t_2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow t_1<t_2$, $a^{t_1} \leqslant a^{t_2} \Leftrightarrow t_1 \leqslant t_2$; если $0<a<1$, то функция $y=a^t$ убывает на всей числовой прямой, и тогда $a^{t_1}<a^{t_2} \Leftrightarrow t_1>t_2$, $a^{t_1} \leqslant a^{t_2} \Leftrightarrow t_1 \geqslant t_2$. Из этих свойств следует, что если $a>1$, то

$$\begin{aligned}
a^{f(x)} &< a^b \Leftrightarrow f(x) < b, & a^{f(x)} &\leqslant a^b \Leftrightarrow f(x) \leqslant b,\\
a^{f(x)} &> a^b \Leftrightarrow f(x) > b, & a^{f(x)} &\geqslant a^b \Leftrightarrow f(x) \geqslant b,\\
a^{f(x)} &< a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x), & a^{f(x)} &\leqslant a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x),\\
a^{f(x)} &> a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x), & a^{f(x)} &\geqslant a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geqslant g(x)
\end{aligned}$$

(т. е. при переходе к неравенству для показателей степеней знак неравенства сохраняется); если $0<a<1$, то

$$\begin{aligned}
&a^{f(x)} < a^b \Leftrightarrow f(x) > b, && a^{f(x)} \leqslant a^b \Leftrightarrow f(x) \geqslant b,\\
&a^{f(x)} > a^b \Leftrightarrow f(x) < b, && a^{f(x)} \geqslant a^b \Leftrightarrow f(x) \leqslant b,\\
&a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x), && a^{f(x)} \leqslant a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geqslant g(x),\\
&a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x), && a^{f(x)} \geqslant a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x)
\end{aligned}$$

(т. е. при переходе к неравенству для показателей степеней знак неравенства меняется на противоположный).

Таким образом, под простейшими неравенствами будем понимать неравенства, левая и правая части которых — степени одного и того же положительного числа, а показатели степеней — многочлены степени не выше второй (напомним, что многочленом нулевой степени является по определению любое отличное от нуля число). Иногда, чтобы привести данное показательное неравенство к указанному виду, достаточно в одно или два действия записать его левую и правую части как степени с одним основанием. Такие неравенства также будем относить к простейшим.

Пример 1. Решите неравенство $2^{x^2+2x} \leqslant 0{,}5$.

Р е ш е н и е. Запишем правую часть данного неравенства в виде степени числа 2. Получим

$$2^{x^2+2x} \leqslant 2^{-1} \Leftrightarrow x^2+2x \leqslant -1 \Leftrightarrow x^2+2x+1 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Ответ: $\{-1\}$.

Пример 2. Решите неравенство $(0{,}2)^{x^2-5x} > 25^{x^2-3x+5}$.

Р е ш е н и е. Учитывая, что $0{,}2=5^{-1}$, а $25=5^2$, запишем левую и правую части данного неравенства в виде степеней числа 5. Получим

$$(0{,}2)^{x^2-5x} > 25^{x^2-3x+5} \Leftrightarrow 5^{-x^2+5x} > 5^{2x^2-6x+10} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x^2+5x > 2x^2-6x+10 \Leftrightarrow 3x^2-11x+10 < 0.$$

Корнями квадратного трёхчлена в левой части полученного неравенства являются числа $\frac{5}{3}$ и 2, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $\left(\frac{5}{3}; 2\right)$.

Ответ: $\left(\frac{5}{3}; 2\right)$.

Пример 3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (5{,}67)^{x^2-16} \leqslant 1, \\ 16^x \leqslant 2^{x^2}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. 1. Решим первое неравенство данной системы, приведя его правую часть к основанию 5,67. Получим

$$(5{,}67)^{x^2-16} \leqslant (5{,}67)^0 \Leftrightarrow x^2-16 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+4) \leqslant 0.$$

Значит, множеством решений неравенства является отрезок $[-4; 4]$.

2. Решим второе неравенство данной системы, приведя его левую часть к основанию 2. Получим

$$2^{4x} \leqslant 2^{x^2} \Leftrightarrow 4x \leqslant x^2 \Leftrightarrow x^2-4x \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x-4) \geqslant 0.$$

Множеством решений неравенства является объединение $(-\infty; 0] \cup \cup [4; +\infty)$.

3. Найдём множество решений данной системы как пересечение множеств $[-4; 4]$ и $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$. Получим $[-4; 0] \cup \{4\}$.

Ответ: $[-4; 0] \cup \{4\}$.

Упражнения к § 7.1

Решите неравенство (систему неравенств).

1. а) $2^x \leqslant 4$; **б)** $3^x \leqslant 27$.

2. а) $5^x \geqslant 0{,}04$; **б)** $4^x \geqslant 0{,}25$.

3. а) $9^x < 27$; **б)** $16^x < 64$.

4. а) $8^x > 4$; **б)** $125^x > 25$.

5. а) $\left(\frac{1}{36}\right)^x < 6$; **б)** $\left(\frac{1}{16}\right)^x < 2$.

6. а) $(3{,}45)^x > 1$; **б)** $(5{,}43)^x > 1$.

7. а) $(2{,}5)^x < 0{,}4$; **б)** $(1{,}25)^x < 0{,}8$.

8. а) $(0{,}1)^x \geqslant 100$; **б)** $(0{,}2)^x \geqslant 25$.

9. а) $2^{x^2-3x} \leqslant 0{,}25$; **б)** $10^{x^2+3x} \leqslant 0{,}01$.

10. а) $49^{x^2} > 7^{x+1}$; **б)** $8^{x^2} > 2^{x+2}$.

11. а) $5^{x^2+4x} < (0{,}2)^{-4x-9}$; **б)** $2^{x^2+5x} < (0{,}5)^{-5x-16}$.

12. а) $6^{2x^2-3x} > 36$; **б)** $7^{2x^2+3x} > 49$.

13. а) $3^{x^2-4x+6} \leqslant 9$; **б)** $5^{x^2-6x+11} \leqslant 25$.

14. а) $2^x \cdot 5^x \leqslant 100$; **б)** $3^x \cdot 4^x \leqslant 144$.

15. а) $25^x \cdot 125^x \geqslant 0{,}2$; **б)** $16^x \cdot 64^x \geqslant 0{,}25$.

16. а) $15^x < 25 \cdot 3^x$; **б)** $6^x < 9 \cdot 2^x$.

17. а) $4^x \cdot 2^{x^2} \geqslant 8$; **б)** $9^x \cdot 3^{x^2} \geqslant 27$.

18. а) $17^{x-19} \leqslant 18^{x-19}$; **б)** $14^{x-16} \leqslant 15^{x-16}$.

19. а) $6^{8-5x} \geqslant 5^{5x-8}$; **б)** $4^{7-4x} \geqslant 3^{4x-7}$.

20. а) $23^{x^2-4} < 24^{x^2-4}$; **б)** $13^{x^2-9} < 14^{x^2-9}$.

21. а) $7^{4-25x^2} > 3^{25x^2-4}$; **б)** $5^{25-4x^2} > 2^{4x^2-25}$.

22. а) $3 \cdot 7^{x-10} \leqslant 7 \cdot 3^{x-10}$; **б)** $4 \cdot 9^{x-8} \leqslant 9 \cdot 4^{x-8}$.

23. а) $4 \cdot 3^{x+5} \geqslant 9 \cdot 2^{x+5}$; **б)** $16 \cdot 5^{x-8} \geqslant 25 \cdot 4^{x-8}$.

24. а) $2 \leqslant \dfrac{1}{2^{5x+9}}$; **б)** $64 \leqslant \dfrac{1}{4^{2x+9}}$.

25. а) $2^{4x^2-11x} > \dfrac{1}{64}$; **б)** $3^{4x^2-13x} > \dfrac{1}{27}$.

26. а) $(\sqrt[3]{13})^{6x} \leqslant \sqrt[4]{13}$; **б)** $(\sqrt[5]{17})^{10x} \leqslant \sqrt{17}$.

27. а) $\sqrt[5]{11^x} < 121$; **б)** $\sqrt[7]{13^x} < 169$.

28. а) $\begin{cases} 11^x < 121, \\ 121^x > 11; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 13^x < 169, \\ 169^x > 13. \end{cases}$

29. а) $\begin{cases} 3^{x-2} < 81, \\ 7^{x+2} \geqslant \dfrac{1}{49}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2^{x-3} < 16, \\ 6^{x+3} \geqslant \dfrac{1}{36}. \end{cases}$

30. а) $\begin{cases} \sqrt[7]{7^x} > 49, \\ \sqrt[15]{15^x} < 225; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \sqrt[5]{5^x} > 25, \\ \sqrt[13]{13^x} < 169. \end{cases}$

31. а) $\begin{cases} 17^{x-6} > 13^{x-6}, \\ 5^{x-16} < 9^{16-x}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 15^{x-5} > 11^{x-5}, \\ 6^{x-15} < 7^{15-x}. \end{cases}$

32. а) $\begin{cases} x \cdot 8^x < 8^{x+2}, \\ x \cdot 7^x > 7^{x+1}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x \cdot 5^x < 5^{x+3}, \\ x \cdot 3^x > 3^{x+2}. \end{cases}$

33. а) $\begin{cases} 19^{x^2+6} \geqslant 19^{5x}, \\ 13^{x^2+8} \leqslant 13^{6x}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 11^{x^2+12} \geqslant 11^{7x}, \\ 17^{x^2+15} \leqslant 17^{8x}. \end{cases}$

34. а) $\begin{cases} 3 \cdot 4^{x+6} \geqslant 4 \cdot 3^{x+6}, \\ 5 \cdot 2^{x+6} \geqslant 2 \cdot 5^{x+6}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2 \cdot 7^{x-5} \geqslant 7 \cdot 2^{x-5}, \\ 8 \cdot 5^{x-5} \geqslant 5 \cdot 8^{x-5}. \end{cases}$

35. а) $\begin{cases} 5^x \cdot 7^x \geqslant 35, \\ 6^x < 8 \cdot 3^x; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3^x \cdot 8^x > 24, \\ 6^x \leqslant 27 \cdot 2^x. \end{cases}$

36. а) $\begin{cases} 3^x \cdot 27^{x^2} \leqslant 81, \\ 2^{x^2-4} \geqslant 0{,}125; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2^x \cdot 4^{x^2} \leqslant 8, \\ 5^{x^2-3} \geqslant 0{,}04. \end{cases}$

37. а) $\begin{cases} 2 \cdot 33^x \leqslant 3 \cdot 22^x, \\ 5 \cdot 21^x \geqslant 7 \cdot 15^x; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3 \cdot 26^x \leqslant 2 \cdot 39^x, \\ 11 \cdot 15^x \geqslant 5 \cdot 33^x. \end{cases}$

38. а) $\begin{cases} 4^{2x+11} \leqslant 64, \\ 7^{x^2+2x-35} < 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2^{2x+7} \leqslant 8, \\ 6^{x^2+4x-21} < 1. \end{cases}$

Диагностическая работа 11

Вариант 1

Решите неравенство (систему неравенств).

1. $(2{,}5)^x \geqslant 0{,}16$.

2. $5^{5x^2-6x} \leqslant 0{,}2$.

3. $6^x \cdot 5^x > 900$.

4. $6^{x^2-5x+6} < 36$.

5. $\left(\dfrac{1}{11}\right)^{6+5x-3x^2} > 121$.

6. $17^{x^2-144} < 27^{x^2-144}$.

7. $8^x \cdot 2^{x^2} \geqslant 16$.

8. $\sqrt[6]{7^{x^2-9}} \leqslant 7^{x-3}$.

9. $\begin{cases} 14^x < 196, \\ 196^x > 14. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5^{x-59} \leqslant 125, \\ 9^{x+59} > \dfrac{1}{81}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sqrt[10]{10^x} > 10, \\ \sqrt[12]{12^x} < 12. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 15^{x-7} > 3 \cdot 5^{x-7}, \\ 15^{x-17} < 5 \cdot 3^{x-17}. \end{cases}$

Вариант 2

Решите неравенство.

1. $(1{,}25)^x \geqslant 0{,}8$.

2. $2^{2x^2-3x} \leqslant 0{,}5$.

3. $5^x \cdot 4^x > 400$.

4. $7^{x^2-7x+12} < 49$.

5. $\left(\dfrac{1}{13}\right)^{5+x-6x^2} > 169$.

6. $19^{x^2-121} < 39^{x^2-121}$.

7. $27^x \cdot 3^{x^2} \geqslant 81$.

8. $\sqrt[4]{5^{x^2-4}} \leqslant 5^{x-2}$.

9. $\begin{cases} 12^x < 144, \\ 144^x > 12. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4^{x-47} \leqslant 64, \\ 7^{x+47} > \dfrac{1}{49}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sqrt[14]{14^x} > 14, \\ \sqrt[16]{16^x} < 16. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 14^{x-6} > 2 \cdot 7^{x-6}, \\ 14^{x-16} < 7 \cdot 2^{x-16}. \end{cases}$

§ 7.2. Более сложные показательные неравенства

Перейдём к методам решения более сложных показательных неравенств и систем, содержащих показательные неравенства. Эти методы являются общими для всех неравенств с одной переменной, но основываются на свойствах степени с действительным показателем и свойствах показательной функции (прежде всего её монотонности). В большинстве случаев эти методы позволяют свести решение данного показательного неравенства к решению одного или нескольких простейших показательных неравенств.

Равносильные преобразования

Равносильные преобразования показательных неравенств обычно связаны со свойствами степени с действительным показателем, вынесением общего множителя, разложением на множители.

Для записи множества решений некоторых показательных неравенств может понадобиться (на уровне определения) понимание того, что такое логарифм. Логарифм является, в сущности, обозначением показателя степени в тех случаях, когда этот показатель невозможно указать в «явном» виде, т. е. в виде рационального числа или корня (радикала). Эта ситуация похожа на ситуацию с самими радикалами: можно легко найти положительные числа, квадраты которых равны, скажем, 1 или 4 (это соответственно 1 и 2), и интуитивно понятно (строгое доказательство выходит за рамки школьного курса), что должны существовать числа, квадраты которых равны, например, 2 или 3. Для обозначения таких чисел и вводился знак радикала (корня): $(\sqrt{2})^2 = 2$, $(\sqrt{3})^2 = 3$. Аналогично можно легко найти показатели степени числа 2, при которых эта степень равна, скажем, 4 или 8 (это, очевидно, числа 2 и 3 соответственно). А вот показатели степени числа 2, при которых она равна, например, 5 или 6 (они существуют — это также понятно интуитивно, но доказательство опять-таки выходит за рамки школьного курса), указать в «явном» виде невозможно. Для их обозначения и вводится понятие логарифма: показатель степени с основанием 2, при котором эта степень равна 5, называется логарифмом числа 5 по основанию 2 (обозначение: $\log_2 5$, т. е. $2^{\log_2 5} = 5$); показатель степени с основанием 2, при котором эта степень равна 6, называется логарифмом числа 6 по основанию 2 (обозначение: $\log_2 6$, т. е. $2^{\log_2 6} = 6$). Вообще, показатель степени с основанием b ($b > 0$, $b \neq 1$), при котором эта степень равна числу a, называется логарифмом числа a по основанию b и обозначается $\log_b a$. Таким образом, по определению $b^{\log_b a} = a$. То, что основание логарифма по определению положительно и отлично от 1, должно быть понятно: любая степень единицы есть единица, поэтому единица исключена из возможных оснований логарифма. Возведение в дробную степень не определено для отрицательных чисел (см. главу 5), а возведение в неположительную степень не определено для нуля, поэтому неположительные числа также исключены из возможных оснований логарифмов. Из определения логарифма следует, что и число a может быть только положительным, поскольку оно равно степени положительного числа b. Сам логарифм при этом может принимать любое действительное значение.

Определение логарифма позволяет находить, например, множество решений неравенств вида $b^{f(x)} \vee a$ (напоминающих по внешнему виду простейшие) в тех случаях, когда число a не является рациональной степенью числа b. Достаточно, используя то, что $a = b^{\log_b a}$, привести неравенство к виду $b^{f(x)} \vee b^{\log_b a}$, а затем перейти к неравенству $f(x) \vee \log_b a$ для показателей степеней (сохранив знак данного неравенства, если $b > 1$, и поменяв его на противоположный, если $0 < b < 1$). Понятно, что запись ответа при этом может содержать логарифмы.

Пример 1. Решите неравенство $5 \cdot 21^x \leqslant 4 \cdot 7^x$.

Решение. Поскольку $21^x = 3^x \cdot 7^x$, неравенство легко привести к виду $3^x \leqslant \frac{4}{5}$, или $3^x \leqslant 0{,}8$, или $3^x \leqslant 3^{\log_3 0{,}8}$, откуда $x \leqslant \log_3 0{,}8$.

Ответ: $(-\infty; \log_3 0{,}8]$.

Пример 2. Решите неравенство $2^{2x+1} + 4^{x+1} + 4^{x+2} \geqslant 176$.

Решение. Записав слагаемые в левой части в виде степеней числа 2, придём к неравенству $2^{2x+1} + 2^{2x+2} + 2^{2x+4} \geqslant 176$. Вынесем за скобки общий множитель 2^{2x+1} в левой части неравенства: $2^{2x+1}(1+2+2^3) \geqslant$ $\geqslant 176$, откуда $2^{2x+1} \cdot 11 \geqslant 176$, и $2^{2x+1} \geqslant 16$. Далее, получим последовательно

$$2^{2x+1} \geqslant 16 \Leftrightarrow 2^{2x+1} \geqslant 2^4 \Leftrightarrow 2x+1 \geqslant 4 \Leftrightarrow x \geqslant 1{,}5.$$

Ответ: $[1{,}5; +\infty)$.

Заметим, что вынесение за скобки общего множителя достаточно часто используется при решении показательных неравенств. Иногда такое преобразование необходимо выполнить несколько раз.

Пример 3. Решите неравенство $3^{x+1} + 10^x > 10^{x-1} + 4 \cdot 3^x + 3^{x+2}$.

Решение. Перепишем данное неравенство в виде

$$3^{x+1} + 10^x - 10^{x-1} - 4 \cdot 3^x - 3^{x+2} > 0.$$

Перегруппируем слагаемые в левой части последнего неравенства:

$$(3^{x+1} - 4 \cdot 3^x - 3^{x+2}) + (10^x - 10^{x-1}) > 0.$$

Вынесем за скобки общий множитель:

$$3^x(3 - 4 - 3^2) + 10^{x-1}(10 - 1) > 0,$$

откуда $-10 \cdot 3^x + 10^{x-1} \cdot 9 > 0$. Далее,

$$10^{x-1} \cdot 9 > 10 \cdot 3^x \Leftrightarrow \frac{10^{x-1}}{10} > \frac{3^x}{9} \Leftrightarrow 10^{x-2} > 3^{x-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{10}{3}\right)^{x-2} > 1 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$$

Ответ: $(2; +\infty)$.

Пример 4. Решите неравенство $(x^2-x+1)^{\frac{x-11}{x-4}} \leqslant (x^2-x+1)^3$.

Р е ш е н и е. Заметим, что $x^2-x+1>0$ при всех допустимых значениях переменной (т. е. при $x \neq 4$), поскольку дискриминант квадратного трёхчлена x^2-x+1 отрицателен, а старший коэффициент положителен. Рассмотрим три случая: 1) основание степени в левой и правой частях неравенства больше 1 (в этом случае при переходе к неравенству для показателей степеней знак неравенства сохраняется); 2) основание равно 1 (в этом случае неравенство выполняется для всех $x \neq 4$); 3) основание меньше 1 (в этом случае при переходе к неравенству для показателей степеней знак неравенства меняется на противоположный). Таким образом, в первом случае получим систему неравенств

$$\begin{cases} x^2-x+1>1, \\ \dfrac{x-11}{x-4} \leqslant 3, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x^2-x>0, \\ \dfrac{x-11}{x-4}-3 \leqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)>0, \\ \dfrac{-2x+1}{x-4} \leqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)>0, \\ \dfrac{x-0{,}5}{x-4} \geqslant 0. \end{cases}$$

Множеством решений первого неравенства системы является объединение $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. Множеством решений второго неравенства является объединение $(-\infty; 0{,}5] \cup (4; +\infty)$. Множеством решений системы является объединение $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$. Во втором случае получим систему

$$\begin{cases} x^2-x+1=1, \\ x \neq 4, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x&=0, \\ x&=1. \end{aligned}\right.$$

В третьем случае получим систему неравенств

$$\begin{cases} x^2-x+1<1, \\ \dfrac{x-11}{x-4} \geqslant 3. \end{cases}$$

Эта система аналогична системе, полученной при рассмотрении первого случая (только с противоположными знаками неравенств), поэтому можно сразу записать, что она приводится к виду

$$\begin{cases} x(x-1)<0, \\ \dfrac{x-0{,}5}{x-4} \leqslant 0. \end{cases}$$

Множеством решений первого неравенства последней системы является промежуток $(0; 1)$. Множеством решений её второго неравенства является промежуток $[0{,}5; 4)$. Множеством решений всей системы является промежуток $[0{,}5; 1)$. Осталось объединить множества решений, полученные при рассмотрении трёх случаев:

$$(-\infty; 0) \cup (4; +\infty) \cup \{0; 1\} \cup [0{,}5; 1) = (-\infty; 0] \cup [0{,}5; 1] \cup (4; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [0{,}5; 1] \cup (4; +\infty)$.

Метод знакотождественных множителей и метод интервалов

Как следует из заголовка, речь пойдёт сразу о двух общих методах решения неравенств применительно к показательным неравенствам. Связано это с тем, что показательные неравенства, к решению которых можно применить метод интервалов, как правило, целесообразно сначала рационализировать с помощью метода знакотождественных множителей. Таким образом, в подобных неравенствах метод интервалов играет как бы вспомогательную роль, поскольку применяется не к данному показательному неравенству, а к рациональному неравенству, полученному из данного с помощью метода знакотождественных множителей. Напомним (см. § 1.6), что если $a > 1$, то алгебраические выражения $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ и $f(x) - g(x)$ являются знакотождественными.

Пример 5. Решите неравенство

$$\frac{(x^2-4x+6)^{x^2-4x+6} - (x^2-4x+6)^2}{(0{,}25)^{5x-x^2} - (0{,}125)^x} \geqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Заметим, что $x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 > 1$ при всех значениях переменной. Поэтому алгебраическое выражение в числителе дроби можно заменить знакотождественным ему выражением

$$x^2 - 4x + 6 - 2 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2.$$

Слагаемые в знаменателе дроби можно привести к основанию 2, поскольку

$$(0{,}25)^{5x-x^2} - (0{,}125)^x = 2^{-2(5x-x^2)} - 2^{-3x},$$

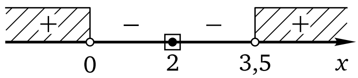
и заменить полученное выражение знакотождественным выражением

$$-2(5x - x^2) - (-3x) = 2x^2 - 7x = 2x(x - 3{,}5).$$

Таким образом, данное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{(x-2)^2}{2x(x-3{,}5)} \geqslant 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Ответ: $(-\infty; 0) \cup \{2\} \cup (3{,}5; +\infty)$.

Пример 6. Решите неравенство

$$(0{,}04)^x \cdot 2^{x^2} + 5^{x^2} \cdot 2^x \leqslant 10^{x^2} + (0{,}08)^x.$$

Р е ш е н и е. Перепишем, используя свойства степеней, неравенство в виде

$$(0{,}04)^x \cdot 2^{x^2} + 5^{x^2} \cdot 2^x \leqslant 5^{x^2} \cdot 2^{x^2} + (0{,}04)^x \cdot 2^x.$$

Перенесём слагаемые из правой части неравенства в его левую часть и выполним группировку:

$$((0{,}04)^x \cdot 2^{x^2} - (0{,}04)^x \cdot 2^x) + (5^{x^2} \cdot 2^x - 5^{x^2} \cdot 2^{x^2}) \leqslant 0.$$

Вынесем за скобки общие множители:

$$(0{,}04)^x (2^{x^2} - 2^x) + 5^{x^2} (2^x - 2^{x^2}) \leqslant 0,$$

откуда

$$(0{,}04)^x (2^{x^2} - 2^x) - 5^{x^2} (2^{x^2} - 2^x) \leqslant 0.$$

Ещё раз вынесем за скобки общий множитель:

$$(2^{x^2} - 2^x)((0{,}04)^x - 5^{x^2}) \leqslant 0.$$

Приведя уменьшаемое во вторых скобках к основанию 5, получим

$$(2^{x^2} - 2^x)(5^{-2x} - 5^{x^2}) \leqslant 0.$$

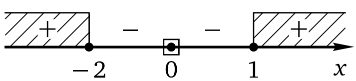
Заменим выражения в скобках знакотождественными:

$$(x^2 - x)(-2x - x^2) \leqslant 0,$$

откуда

$$(x^2 - x)(x^2 + 2x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x-1)x(x+2) \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x+2) \geqslant 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов:



Ответ: $(-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$.

Отметим, что, как и при решении иррациональных неравенств, метод знакотождественных множителей может быть использован в качестве вспомогательной составной части решения некоторых показательных неравенств, в частности тех, решение которых основано на введении новой переменной.

Метод введения новой переменной

Метод введения новой переменной — один из наиболее часто применяемых к решению показательных неравенств методов. Основными типами показательных неравенств, которые после введения новой переменной сводятся к алгебраическим (как правило, квадратным) неравенствам, являются следующие: $a\cdot l^{2f(x)}+b\cdot l^{f(x)}+c\vee 0$ (сводится к квадратному неравенству $at^2+bt+c\vee 0$ заменой $t=l^{f(x)}$, где $t>0$) и $a\cdot l^{2f(x)}+b\cdot (lq)^{f(x)}+c\cdot q^{2f(x)}\vee 0$. Последнее неравенство сводится к квадратному после деления обеих его частей на $q^{2f(x)}$ (такое деление является равносильным преобразованием и не приводит к изменению знака неравенства, в силу того что $q^{2f(x)}>0$ при любом допустимом значении переменной). После деления неравенство принимает вид

$$a\cdot\left(\frac{l}{q}\right)^{2f(x)}+b\cdot\left(\frac{l}{q}\right)^{f(x)}+c\vee 0.$$

Введя новую переменную $t=\left(\dfrac{l}{q}\right)^{f(x)}$, где $t>0$, получим квадратное неравенство $at^2+bt+c\vee 0$.

Ещё одним достаточно часто встречающимся типом показательных неравенств являются неравенства вида $a\cdot l^{f(x)}+b\cdot l^{-f(x)}+c\vee 0$ или $a\cdot l^{f(x)}+\dfrac{b}{l^{f(x)}}+c\vee 0$. Умножив обе части такого неравенства на $l^{f(x)}$ (такое умножение является равносильным преобразованием и не приводит к изменению знака неравенства, в силу того что $l^{f(x)}>0$ при любом действительном значении переменной), получим неравенство $a\cdot l^{2f(x)}+c\cdot l^{f(x)}+b\vee 0$, которое сводится к квадратному неравенству $at^2+ct+b\vee 0$ заменой $t=l^{f(x)}$, где $t>0$.

Пример 7. Решите неравенство $4^x-7\cdot 2^x+10\leqslant 0$.

Решение. Сделаем замену переменной $t=2^x$, $t>0$. Получим квадратное неравенство $t^2-7t+10\leqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части полученного неравенства являются числа 2 и 5, а множеством решений неравенства — отрезок $[2;5]$. Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases}2^x\geqslant 2,\\ 2^x\leqslant 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x\leqslant \log_2 5.\end{cases}$$

Ответ: $[1;\log_2 5]$.

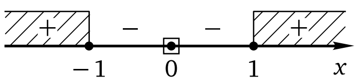
Обратим внимание на следующее. Большинство показательных неравенств сводится с помощью введения новой переменной к квадратному неравенству, множеством решений которого является, как правило, либо числовой промежуток, заключённый между корнями соответствующего квадратного трёхчлена (в этом случае при обратной замене получаем систему двух простейших показательных неравенств), либо объединение числовых промежутков, один из которых расположен левее меньшего корня, другой — правее большего корня соответствующего квадратного трёхчлена (в этом случае при обратной замене получаем совокупность двух простейших показательных неравенств). Вместо перехода к системе или совокупности двух показательных неравенств можно сначала разложить левую часть квадратного неравенства на множители, затем выполнить обратную замену, а после этого воспользоваться методом знакотождественных множителей и получить рациональное неравенство. Какой из двух возможных путей использовать — не принципиально, важно получить в итоге правильный ответ.

Пример 8. Решите неравенство $3\cdot 9^{x^2-1}-12\cdot 3^{x^2-2}+1\geqslant 0$.

Решение. Приведём степени к одному показателю x^2-1, записав неравенство в виде $3\cdot 9^{x^2-1}-4\cdot 3^{x^2-1}+1\geqslant 0$. Пусть $t=3^{x^2-1}$, $t>0$. Неравенство примет вид $3t^2-4t+1\geqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части полученного неравенства являются числа $\frac{1}{3}$ и 1. Значит, это неравенство можно переписать, разложив его левую часть на множители: $3\left(t-\frac{1}{3}\right)(t-1)\geqslant 0$, откуда $\left(t-\frac{1}{3}\right)(t-1)\geqslant 0$. Сделаем обратную замену и применим метод знакотождественных множителей:

$$\left(3^{x^2-1}-\frac{1}{3}\right)(3^{x^2-1}-1)\geqslant 0 \Leftrightarrow (3^{x^2-1}-3^{-1})(3^{x^2-1}-3^{0})\geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2-1+1)(x^2-1-0)\geqslant 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1)\geqslant 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Ответ: $(-\infty;-1]\cup\{0\}\cup[1;+\infty)$.

Заметим, что вместо применения метода знакотождественных множителей можно было использовать переход к совокупности неравенств

$$\left[\begin{aligned}&3^{x^2-1}\leqslant \frac{1}{3},\\&3^{x^2-1}\geqslant 1.\end{aligned}\right.$$

Пример 9. Решите неравенство

$$7^{2x^2-8x+7}-10\cdot 14^{x^2-4x+3}+3^{2x^2-8x+7}\geqslant 0.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$7\cdot 7^{2x^2-8x+6}-10\cdot 3^{x^2-4x+3}\cdot 7^{x^2-4x+3}+3\cdot 3^{2x^2-8x+6}\geqslant 0.$$

Разделим обе части неравенства на $3^{2x^2-8x+6}>0$. Получим

$$7\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{2x^2-8x+6}-10\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{x^2-4x+3}+3\geqslant 0.$$

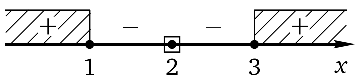
Пусть $t=\left(\frac{7}{3}\right)^{x^2-4x+3}$, $t>0$. Неравенство примет вид $7t^2-10t+3\geqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части полученного неравенства являются числа $\frac{3}{7}$ и 1. Значит, оно равносильно следующему: $7\left(t-\frac{3}{7}\right)(t-1)\geqslant 0$, откуда $\left(t-\frac{3}{7}\right)(t-1)\geqslant 0$. Сделаем обратную замену:

$$\left(\left(\frac{7}{3}\right)^{x^2-4x+3}-\frac{3}{7}\right)\left(\left(\frac{7}{3}\right)^{x^2-4x+3}-1\right)\geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\left(\frac{7}{3}\right)^{x^2-4x+3}-\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}\right)\left(\left(\frac{7}{3}\right)^{x^2-4x+3}-\left(\frac{7}{3}\right)^{0}\right)\geqslant 0.$$

Применив метод знакотождественных множителей, получим

$$(x^2-4x+3+1)(x^2-4x+3-0)\leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2-4x+4)(x^2-4x+3)\geqslant 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x-1)(x-3)\geqslant 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов:



Ответ: $(-\infty;1]\cup\{2\}\cup[3;+\infty)$.

Заметим, что и в данном случае вместо метода знакотождественных множителей можно, разумеется, использовать переход к совокупности неравенств

$$\left[\begin{aligned}&\left(\frac{7}{3}\right)^{x^2-4x+3}\leqslant\frac{3}{7},\\&\left(\frac{7}{3}\right)^{x^2-4x+3}\geqslant 1.\end{aligned}\right.$$

Пример 10. Решите неравенство $\dfrac{80}{(5^{2-x^2}-5)^2}+\dfrac{16}{5^{2-x^2}-5}\leqslant 1.$

Р е ш е н и е. Пусть $t=5^{2-x^2}-5$. Неравенство примет вид $\frac{80}{t^2}+\frac{16}{t}\leqslant 1$, откуда

$$\begin{cases}80+16t\leqslant t^2,\\ t\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow t^2-16t-80\geqslant 0$$

(ясно, что $t=0$ не является решением первого неравенства системы, поэтому её второе неравенство можно опустить). Корнями квадратного трёхчлена в левой части первого неравенства системы являются числа -4 и 20, а множество его решений: $(-\infty; -4] \cup [20; +\infty)$. Таким образом,

$$\left[\begin{aligned} &t \leqslant -4, \\ &t \geqslant 20, \end{aligned}\right.$$

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{aligned} &5^{2-x^2} - 5 \leqslant -4, \\ &5^{2-x^2} - 5 \geqslant 20, \end{aligned}\right.$$

откуда

$$\left[\begin{aligned} &5^{2-x^2} \leqslant 1, \\ &5^{2-x^2} \geqslant 25 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &2-x^2 \leqslant 0, \\ &2-x^2 \geqslant 2 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \geqslant 0, \\ &x^2 \leqslant 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x \geqslant \sqrt{2}, \\ &x \leqslant -\sqrt{2}, \\ &x = 0. \end{aligned}\right.$$

Множеством решений полученной совокупности является объединение $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.

Иногда замену переменной приходится делать дважды.

Пример 11. Решите неравенство

$$(4^x - 9\cdot 2^x)^2 + 4^{x+1} < 9\cdot 2^{x+2} + 140.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$(4^x - 9\cdot 2^x)^2 + 4(4^x - 9\cdot 2^x) - 140 < 0$$

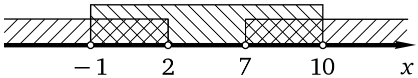
и введём новую переменную $t = 4^x - 9\cdot 2^x$. Неравенство примет вид $t^2 + 4t - 140 < 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части полученного неравенства являются числа -14 и 10. Старший коэффициент квадратного трёхчлена положителен, поэтому множество решений неравенства — промежуток $(-14; 10)$. Сделаем обратную замену, перейдя к системе неравенств:

$$\begin{cases} 4^x - 9\cdot 2^x > -14, \\ 4^x - 9\cdot 2^x < 10, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} 4^x - 9\cdot 2^x + 14 > 0, \\ 4^x - 9\cdot 2^x - 10 < 0. \end{cases}$$

Пусть $2^x = z$. Система примет вид

$$\begin{cases} z^2 - 9z + 14 > 0, \\ z^2 - 9z - 10 < 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена в левой части первого неравенства системы являются числа 2 и 7, старший коэффициент трёхчлена положителен, и, значит, множество решений неравенства — объединение промежутков $(-\infty; 2) \cup (7; +\infty)$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части второго неравенства системы являются числа -1 и 10, старший коэффициент трёхчлена положителен, и, значит, множество решений неравенства — промежуток $(-1; 10)$. Следовательно, множеством решений системы является множество $(-1; 2) \cup (7; 10)$:



Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} -1 < 2^x < 2, \\ 7 < 2^x < 10, \end{array}\right. \quad \text{откуда} \quad \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ \log_2 7 < x < \log_2 10. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (\log_2 7; \log_2 10)$.

Пример 12. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x + 5 \cdot 2^{1-x} \leqslant 7, \\ \dfrac{x^2+3x-6}{x^2-9} \leqslant \dfrac{x+4}{x+3} + \dfrac{1}{x-2}. \end{cases}$$

Решение. 1. Решим первое неравенство системы. Умножим обе его части на $2^x > 0$ и приведём его к виду $2^{2x} - 7 \cdot 2^x + 10 \leqslant 0$. Сделаем замену переменной. Пусть $t = 2^x$, $t > 0$. Получим квадратное неравенство $t^2 - 7t + 10 \leqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части этого неравенства являются числа 2 и 5, старший коэффициент трёхчлена положителен, значит, множество решений неравенства — отрезок $[2; 5]$. Таким образом, $2 \leqslant 2^x \leqslant 5$. Решение последнего двойного неравенства: $[1; \log_2 5]$.

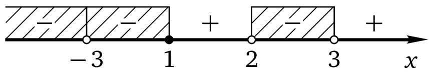
2. Решим второе неравенство системы, приведя его к виду $\dfrac{2x+6}{x^2-9} \leqslant \dfrac{1}{x-2}$, откуда

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{1}{x-2} \leqslant 0, \\ x \neq -3, \end{cases}$$

и, далее,

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)} \leqslant 0, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

Применим метод интервалов к первому неравенству системы и исключим из множества его решений число -3 (если оно принадлежит этому множеству):



Получим множество $(-\infty; -3) \cup (-3; 1] \cup (2; 3)$.

3. Поскольку $\log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8$, имеем $2 < \log_2 5 < 3$. Поэтому множеством решений данной системы является объединение $\{1\} \cup$ $\cup\ (2; \log_2 5]$.

Ответ: $\{1\} \cup (2; \log_2 5]$.

Как уже отмечалось, иногда введение новой переменной играет вспомогательную роль, позволяя упростить неравенство, сделать его менее громоздким и в итоге найти путь к решению.

Пример 13. Решите неравенство

$$((1{,}25)^{2x} + 1{,}3 \cdot (1{,}25)^x + 0{,}9)^2 + ((1{,}25)^{2x} + 3{,}3 \cdot (1{,}25)^x - 0{,}7)^2 \leqslant$$
$$\leqslant ((1{,}25)^{2x} + 1{,}5 \cdot (1{,}25)^x + 0{,}74)^2 + ((1{,}25)^{2x} + 3{,}1 \cdot (1{,}25)^x - 0{,}54)^2.$$

Решение. Обозначив $(1{,}25)^x$ буквой z и применив формулу разности квадратов, получим

$$(z^2 + 1{,}5z + 0{,}74)^2 - (z^2 + 1{,}3z + 0{,}9)^2 = (0{,}2z - 0{,}16)(2z^2 + 2{,}8z + 1{,}64),$$
$$(z^2 + 3{,}3z - 0{,}7)^2 - (z^2 + 3{,}1z - 0{,}54)^2 = (0{,}2z - 0{,}16)(2z^2 + 6{,}4z - 1{,}24).$$

Теперь данное неравенство можно переписать так:

$$(0{,}2z - 0{,}16)(2z^2 + 6{,}4z - 1{,}24) \leqslant (0{,}2z - 0{,}16)(2z^2 + 2{,}8z + 1{,}64).$$

Перенесём выражение из правой части в левую, вынесем общий множитель и приведём подобные слагаемые: $(0{,}2z - 0{,}16)(3{,}6z - 2{,}88) \leqslant 0$. Вынесем за скобки коэффициенты при переменной:

$$0{,}2(z - 0{,}8) \cdot 3{,}6(z - 0{,}8) \leqslant 0,$$

откуда $(z - 0{,}8)^2 \leqslant 0$. Единственным решением полученного неравенства является $z = 0{,}8$. Сделаем обратную замену: $(1{,}25)^x = 0{,}8$, т. е. $\left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{4}{5}$, откуда $x = -1$.

Ответ: $\{-1\}$.

Исследование ОДЗ неравенства

Иногда исследование ОДЗ неравенства позволяет найти множество его решений. Этот метод обычно «работает», если ОДЗ неравенства состоит из нескольких чисел или сама является множеством решений неравенства.

Пример 14. Решите неравенство

$$\sqrt{4^x - 17\cdot 2^x + 16} + \sqrt{4x - x^2} + \sqrt{x+3} \geqslant 2.$$

Решение. ОДЗ неравенства задаётся системой

$$\begin{cases} 4^x - 17\cdot 2^x + 16 \geqslant 0, \\ 4x - x^2 \geqslant 0, \\ x+3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x - 17\cdot 2^x + 16 \geqslant 0, \\ x(x-4) \leqslant 0, \\ x \geqslant -3. \end{cases}$$

Множеством решений второго неравенства системы является отрезок $[0; 4]$. Любое из чисел этого множества удовлетворяет, очевидно, и третьему неравенству системы. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену переменной. Пусть $t = 2^x$, $t > 0$. Получим квадратное неравенство $t^2 - 17t + 16 \geqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части этого неравенства являются числа 1 и 16, старший коэффициент трёхчлена положителен, значит, множество решений неравенства — объединение $(-\infty; 1] \cup [16; +\infty)$. Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} 2^x \leqslant 1, \\ 2^x \geqslant 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ x \geqslant 4. \end{array}\right.$$

Значит, множество решений системы состоит всего из двух чисел: 0 и 4. Осталось проверить, являются ли эти числа решениями данного неравенства. Если переменная x принимает одно из этих значений, каждое из двух первых слагаемых в левой части данного неравенства обращается в нуль. Неравенство $\sqrt{x+3} \geqslant 2$ выполняется при $x = 4$ и не выполняется при $x = 0$.

Ответ: $\{4\}$.

Пример 15. Решите неравенство $\sqrt{x-6}(4^{x-4} + 5^{x-5} - 16) \geqslant 0$.

Решение. Левая часть неравенства определена, очевидно, при $x \geqslant 6$. В этом случае $x - 4 \geqslant 2$, а $x - 5 \geqslant 1$. Поэтому $4^{x-4} \geqslant 16$, $5^{x-5} \geqslant 1$, а $4^{x-4} + 5^{x-5} - 16 \geqslant 1$. Значит, левая часть неравенства неотрицательна при всех допустимых значениях переменной, и множеством решений неравенства является его ОДЗ.

Ответ: $[6; +\infty)$.

Применение свойств функций

Перейдём к примерам применения свойств монотонности и ограниченности функций к решению показательных неравенств.

Пример 16. Решите неравенство $3^{x-4}+4^{x-5}+5^{x-6}<14$.

Решение. Пусть $f(x)=3^{x-4}+4^{x-5}+5^{x-6}$. Функция $y=f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой как сумма возрастающих функций. Поскольку $f(6)=14$, неравенство $f(x)<14$ будет выполнено при всех $x<6$ и только при этих значениях переменной.

Ответ: $(-\infty; 6)$.

Пример 17. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{18-x}}{2^{x-2}+3^{x-1}}\leqslant 1$.

Решение. Поскольку $2^{x-2}+3^{x-1}>0$ при всех допустимых значениях переменной, данное неравенство равносильно следующему:

$$\sqrt{18-x}\leqslant 2^{x-2}+3^{x-1}.$$

Пусть $f(x)=\sqrt{18-x}$. Функция $y=f(x)$ монотонно убывает на всей области определения $D_f=(-\infty; 18]$. Пусть $g(x)=2^{x-2}+3^{x-1}$. Функция $y=g(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой как сумма возрастающих функций.

Поскольку $f(2)=4=g(2)$, неравенство $f(x)\leqslant g(x)$ будет выполнено при всех $x\geqslant 2$, принадлежащих D_f, т. е. при всех $x\in[2; 18]$.

Ответ: $[2; 18]$.

Пример 18. Решите неравенство

$$4^{x^2+4x+4}+5^{x^2+4x+5}+6^{x^2+4x+6}\leqslant 42.$$

Решение. Перепишем неравенство, выделив полные квадраты в показателях степеней: $4^{(x+2)^2}+5^{(x+2)^2+1}+6^{(x+2)^2+2}\leqslant 42$. Поскольку $(x+2)^2\geqslant 0$, получим, что $4^{(x+2)^2}\geqslant 1$, $5^{(x+2)^2+1}\geqslant 5$, $6^{(x+2)^2+2}\geqslant 36$. Следовательно, сумма слагаемых в левой части данного неравенства не меньше $1+5+36=42$. Значит, данное неравенство может быть выполнено, только если эта сумма равна 42, что возможно, лишь если $(x+2)^2=0$, откуда $x=-2$.

Ответ: $\{-2\}$.

Упражнения к § 7.2

Решите неравенство (систему неравенств).

1. а) $4^{\frac{5}{x}}\geqslant 64$; **б)** $3^{\frac{4}{x}}\geqslant 27$.

2. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3x+2}{1-x}}<81$; **б)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3x-2}{3-x}}<16$.

3. а) $(0{,}2)^{\frac{x^2+11x+49}{2x-9}}\geqslant 5$; **б)** $(0{,}1)^{\frac{x^2+13x+59}{2x-3}}\leqslant 10$.

4. а) $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{3x-1}{x-4}} > 36^{\frac{x-3}{x+4}}$; **б)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4x-1}{x-5}} > 81^{\frac{x-2}{x+5}}$.

5. а) $3^x \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^{2x+3} < 9$; **б)** $6^x \cdot \left(\frac{1}{36}\right)^{5x+3} < 6$.

6. а) $4^{3x-2} + 4^{3x-1} \leqslant 80$; **б)** $2^{3x-4} + 2^{3x+1} \geqslant 66$.

7. а) $\begin{cases} 3^{x+1} - 2\cdot 3^x \geqslant 81, \\ x^2 - 8x + 12 < 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5^{x+1} - 4\cdot 5^x \geqslant 25, \\ x^2 - 3x - 18 < 0. \end{cases}$

8. а) $5^{x-3} + 5^{x-2} + 5^{x-1} \geqslant 155$; **б)** $6^{x-2} + 6^{x-1} + 6^x \geqslant 258$.

9. а) $4^{x+1} + 4^{x-0,5} - 2^{2x-4} \leqslant 284$; **б)** $4^{x-1} + 4^{x-0,5} - 2^{2x-5} \leqslant 184$.

10. а) $5\cdot 3^x + 10^x > 2\cdot 3^{x+1} + 10^{x-1} + 3^{x+2}$; **б)** $2^{x+5} + 5^{x+4} > 3\cdot 2^{x+4} + 5^{x+3} + 2^{x+6}$.

11. а) $4^x + 3\cdot 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 232$; **б)** $9^x + 3^{2(x-1)} - 2\cdot 27^{\frac{2}{3}(x-2)} < 264$.

12. а) $\left|3^{3x^2-23} - 42\right| \leqslant 39$; **б)** $\left|2^{2x^2-29} - 5\right| \leqslant 3$.

13. а) $\left|4^{9x^2-2} - 10\right| \geqslant 6$; **б)** $\left|3^{4x^2-6} - 14\right| \geqslant 13$.

14. а) $(x^2+3x+3)^{\frac{x-8}{x-1}} \geqslant (x^2+3x+3)^4$; **б)** $(x^2-3x+3)^{\frac{x+8}{x+1}} \geqslant (x^2-3x+3)^4$.

15. а) $\dfrac{(2\sqrt{2})^x - 0,125}{x+1} < 0$; **б)** $\dfrac{(5\sqrt{5})^x - 125}{x-4} < 0$.

16. а) $\dfrac{15^x - 225}{x^2+8x+12} \geqslant 0$; **б)** $\dfrac{14^x - 196}{x^2+5x-6} \geqslant 0$.

17. а) $\dfrac{(36-6^x)(4^x-256)}{((0,5)^{-x}-2)(10^x+11)} \leqslant 0$; **б)** $\dfrac{(81-3^x)(2^x-64)}{((0,2)^{-x}-5)(16^x+17)} \leqslant 0$.

18. а) $9\cdot 5^x - 15^x + 5\cdot 3^x > 45$; **б)** $8\cdot 7^x - 14^x + 2^x > 8$.

19. а) $x^2\cdot 4^x + 16 < 4x^2 + 4^{x+1}$; **б)** $x^2\cdot 3^x + 27 < 3x^2 + 3^{x+2}$.

20. а) $16\cdot 4^x - 10\cdot 2^x + 1 \leqslant 0$; **б)** $8\cdot 4^x - 9\cdot 2^x + 1 \leqslant 0$.

21. а) $36^x - 4\cdot 6^x - 12 \leqslant 0$; **б)** $4^x - 15\cdot 2^x - 16 \leqslant 0$.

22. а) $4\cdot 2^x + 8\cdot 2^{-x} \leqslant 33$; **б)** $8\cdot 2^x + 2\cdot 2^{-x} \leqslant 17$.

23. а) $2^{x+3} + 2^{1-x} \leqslant 10$; **б)** $2^{x+2} + 2^{1-x} \leqslant 9$.

24. а) $4^x - 17\cdot 2^{x-2} + 1 \leqslant 0$; **б)** $4^x - 33\cdot 2^{x-2} + 2 \leqslant 0$.

25. а) $\begin{cases} 4^x - 6\cdot 2^x + 8 > 0, \\ \dfrac{6x-5}{x-6} < 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 9^x - 4\cdot 3^x + 3 > 0, \\ \dfrac{5x+1}{x-2} < 1. \end{cases}$

26. а) $2\cdot 2^{2x-11} - 17\cdot 2^{x-5} + 16 \leqslant 0$; **б)** $4\cdot 4^{2x+7} - 5\cdot 4^{x+4} + 4 \leqslant 0$.

27. а) $3^x + \dfrac{27}{3^x} > 28$; **б)** $2^x + \dfrac{16}{2^x} > 17$.

28. а) $2^x + \dfrac{1}{2^{x-5}} < 33$; **б)** $3^x + \dfrac{1}{3^{x-4}} < 82$.

29. а) $4^{x-1,5} - 5\cdot 2^{x-3} + 0,5 \leqslant 0$; **б)** $9^{x-0,5} - 10\cdot 3^{x-2} + \dfrac{1}{3} \leqslant 0$.

30. а) $\begin{cases} 9^x - 10\cdot 3^x + 9 \geqslant 0, \\ 25^{0,5x^2-5} < 0,2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 25^x - 26\cdot 5^x + 25 \geqslant 0, \\ 4^{0,5x^2-13} < 0,5. \end{cases}$

31. а) $2^{2\sqrt{x}}+32>2^{\sqrt{x}+5}+2^{\sqrt{x}}$; б) $4^{2\sqrt{x}}+16>4^{\sqrt{x}+2}+4^{\sqrt{x}}$.

32. а) $(0{,}5)^x<2^{x+4}+6$; б) $(0{,}2)^x+5<2\cdot 5^{x+2}$.

33. а) $4^{\frac{2}{x}-3}-6\cdot 2^{\frac{2}{x}-4}-4\geqslant 0$; б) $9^{\frac{1}{x}-3}-26\cdot 3^{\frac{1}{x}-4}-3\geqslant 0$.

34. а) $16^{\sqrt{x^2-1}}+4<65\cdot 4^{\sqrt{x^2-1}-1}$; б) $9^{\sqrt{x^2-4}}+9<82\cdot 3^{\sqrt{x^2-4}-1}$.

35. а) $25^{\sqrt{x^2-9}-0{,}5}-1{,}2\cdot 5^{\sqrt{x^2-9}}+1\geqslant 0$; б) $4^{\sqrt{x^2-16}-0{,}5}-2{,}5\cdot 2^{\sqrt{x^2-16}}+2\geqslant 0$.

36. а) $2\cdot 4^x-11\cdot 18^x+9\cdot 81^x\geqslant 0$; б) $3\cdot 9^x-8\cdot 15^x+5\cdot 25^x\geqslant 0$.

37. а) $7^{2x+1}-10\cdot 21^x+3^{2x+1}\leqslant 0$; б) $6^{2x+1}-11\cdot 30^x+5^{2x+1}\leqslant 0$.

38. а) $2\cdot 9^{(x-3)^2}-5\cdot 6^{(x-3)^2}+3\cdot 4^{(x-3)^2}\geqslant 0$;

б) $3\cdot 16^{(x-2)^2}-7\cdot 12^{(x-2)^2}+4\cdot 9^{(x-2)^2}\geqslant 0$.

39. а) $(4^x-3\cdot 2^x)^2-2(4^x-3\cdot 2^x)-8\leqslant 0$;

б) $(9^x-4\cdot 3^x)^2-42(9^x-4\cdot 3^x)-135\leqslant 0$.

40. а) $(4^x-2^{x+2})^2+7(4^x-2^{x+2})+12\geqslant 0$;

б) $(9^x-2\cdot 3^{x+1})^2+14(9^x-2\cdot 3^{x+1})+45\geqslant 0$.

41. а) $(4^x-9\cdot 2^x)^2+4^{x+1}<9\cdot 2^{x+2}+140$;

б) $(9^x-3^{x+1})^2+8\cdot 3^{x+1}<8\cdot 9^x+20$.

42. а) $17\cdot(2\cdot 16^x-64^x)-25\cdot 4^x+2\cdot 256^x+6\geqslant 0$;

б) $9\cdot(2\cdot 3^x-1)^2-14\cdot(2\cdot 27^x-9^x)+5\cdot 81^x\geqslant 0$.

43. а) $\dfrac{7}{3^x+1}\leqslant\dfrac{20}{3-3^x}$; б) $\dfrac{3}{2^x+1}\leqslant\dfrac{5}{2-2^x}$.

44. а) $\dfrac{1}{4^{x-2}+1}\leqslant\dfrac{3}{4^{x-1}-1}$; б) $\dfrac{1}{3^{x+2}+1}\leqslant\dfrac{2}{3^{x+3}-1}$.

45. а) $\dfrac{7^x+2}{7^x-7}>\dfrac{7^x+5}{7^x-4}$; б) $\dfrac{6^x+3}{6^x-6}<\dfrac{6^x+4}{6^x-5}$.

46. а) $\dfrac{6^x-1}{6^x-6}\leqslant 1+\dfrac{3}{6^x-4}$; б) $\dfrac{3^x-1}{3^x-3}\leqslant 1+\dfrac{1}{3^x-2}$.

47. а) $\dfrac{2^x}{2^x-3}+\dfrac{2^x+1}{2^x-2}+\dfrac{5}{4^x-5\cdot 2^x+6}\leqslant 0$; б) $\dfrac{3^x}{3^x-3}+\dfrac{3^x+1}{3^x-2}+\dfrac{5}{9^x-5\cdot 3^x+6}\leqslant 0$.

48. а) $\dfrac{3}{(2^{2-x^2}-1)^2}-\dfrac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\geqslant 0$; б) $\dfrac{16}{(3^{2-x^2}-1)^2}-\dfrac{10}{3^{2-x^2}-1}+1\geqslant 0$.

49. а) $\dfrac{9^x-3^{x+1}-2}{3^{x-1}-1}+\dfrac{12}{3^x-5}\leqslant 3^{x+1}$; б) $\dfrac{16^x-4^{x+1}-3}{4^{x-1}-1}+\dfrac{20}{4^x-6}\leqslant 4^{x+1}$.

50. а) $\dfrac{4^x-1}{4^{x-1}-1}\leqslant 4+\dfrac{4}{4^x-2}$; б) $\dfrac{9^x-1}{9^{x-1}-1}\geqslant 9+\dfrac{18}{9^x-3}$.

51. а) $\dfrac{2^{x+1}-30}{2^x-2}+\dfrac{144}{4^x-3\cdot 2^{x+1}+8}\leqslant 1$; б) $\dfrac{3^{x+1}-51}{3^x-3}+\dfrac{324}{9^x-4\cdot 3^{x+1}+27}\leqslant 2$.

52. а) $\big((0{,}15)^{2x}+1{,}7\cdot(0{,}15)^x+0{,}9\big)^2+\big((0{,}15)^{2x}+3{,}8\cdot(0{,}15)^x+0{,}585\big)^2\leqslant$
$\leqslant\big((0{,}15)^{2x}+2{,}7\cdot(0{,}15)^x+0{,}75\big)^2+\big((0{,}15)^{2x}+2{,}8\cdot(0{,}15)^x+0{,}735\big)^2$;

б) $\left((0{,}8)^{2x}+1{,}3\cdot(0{,}8)^x+0{,}9\right)^2+\left((0{,}8)^{2x}+3{,}3\cdot(0{,}8)^x-0{,}7\right)^2\leqslant$
$\leqslant\left((0{,}8)^{2x}+1{,}5\cdot(0{,}8)^x+0{,}74\right)^2+\left((0{,}8)^{2x}+3{,}1\cdot(0{,}8)^x-0{,}54\right)^2.$

53. а) $(9^x-4\cdot3^x+3)(3^x+2)>3(9^x+2\cdot3^x-3)(3^{x-1}-1)$;

б) $(100^x-11\cdot10^x+10)(10^x+3)<10(100^x+3\cdot10^x-4)(10^{x-1}-1)$.

54. а) $\left(\dfrac{3\cdot2^{x-1}-5}{2^{x-1}}\right)^2+\left(\dfrac{3\cdot2^{x-1}-1}{2^{x-1}-2}\right)^2\leqslant\dfrac{9\cdot4^{x-0{,}5}-9\cdot2^{x+1}+10}{4^{x-1}-2^x}$;

б) $\left(\dfrac{2\cdot3^{x-2}-1}{3^{x-2}}\right)^2+\left(\dfrac{2\cdot3^{x-1}-1}{3^{x-1}-2}\right)^2\leqslant\dfrac{8\cdot9^{x-1{,}5}-16\cdot3^{x-2}+2}{9^{x-1{,}5}-2\cdot3^{x-2}}$.

55. а) $\begin{cases}2^x+7\cdot2^{1-x}\leqslant9,\\ \dfrac{x^2+4x-8}{x^2-16}\leqslant\dfrac{x+5}{x+4}+\dfrac{1}{x-2};\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}2^x+9\cdot2^{1-x}\leqslant11,\\ \dfrac{x^2+5x-10}{x^2-25}\leqslant\dfrac{x+6}{x+5}+\dfrac{2}{x-3}.\end{cases}$

56. а) $\begin{cases}2^{2x+1}-11\cdot2^{x+1}+36\leqslant0,\\ \dfrac{x^2-3x-2}{x-3}-\dfrac{x^3-5x^2-4}{x-5}\leqslant x-x^2;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}2^{2x+1}-9\cdot2^{x+1}+28\leqslant0,\\ \dfrac{x^2-2x-1}{x-2}-\dfrac{x^3-4x^2-3}{x-4}\leqslant x-x^2.\end{cases}$

57. а) $\begin{cases}4^x-7\cdot2^x+10\leqslant0,\\ \dfrac{x^3-3x^2+3x-3}{x^2-3x}\leqslant x+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x};\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}4^x-19\cdot2^x+34\leqslant0,\\ \dfrac{x^3-6x^2+6x-6}{x^2-6x}\leqslant x+\dfrac{3}{x-4}+\dfrac{1}{x}.\end{cases}$

58. а) $\begin{cases}3^{x+1}+4\cdot3^{-x}\leqslant13,\\ \dfrac{x^2+x-4}{x-1}+\dfrac{6x^2-24x+5}{x-4}\leqslant7x+2;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}3^{x+1}+5\cdot3^{-x}\leqslant16,\\ \dfrac{x^2-2x-1}{x-1}+\dfrac{5x^2-15x+4}{x-3}\leqslant6x-1.\end{cases}$

59. а) $\begin{cases}\sqrt{9-x^2}+\sqrt{-5x-x^2}\leqslant2{,}5,\\ 2\cdot4^{x+1}-9\cdot2^x+1\geqslant0;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}\sqrt{4-x^2}+\sqrt{-3x-x^2}\leqslant1{,}5,\\ 9^{x+1}-10\cdot3^x+1\geqslant0.\end{cases}$

60. а) $\sqrt{x^2-3x}\,(8^{x-2}+3^{x-3}-9)\leqslant0$; **б)** $\sqrt{x^2-4x}\,(7^{x-3}+5^{x-4}-8)\leqslant0$.

61. а) $3\cdot5^{x^2+6}-2\sqrt{5x+3}\geqslant3\cdot5^{5x+2}-2\sqrt{x^2+7}$;

б) $2\cdot7^{x^2+6}-3\sqrt{4x+5}\geqslant2\cdot7^{4x+3}-3\sqrt{x^2+8}$.

62. а) $2^{x^2+5}+5^{x^2+2}\leqslant35+\sqrt{100-x^2}+\sqrt{144-x^2}$;

б) $3^{x^2+4}+4^{x^2+3}\leqslant95+\sqrt{900-x^2}+\sqrt{400-x^2}$.

Диагностическая работа 12

Вариант 1

Решите неравенство.

1. $7\cdot5^x\leqslant10\cdot15^x$.

2. $16^{x-1}+16^{x-1{,}5}\geqslant4^{2x-5}+316$.

3. $11\cdot4^x+17^x<3\cdot4^{x+1}+4^{x+2}+17^{x-1}$.

4. $\dfrac{13-5\cdot3^x}{9^x-12\cdot3^x+27}\geqslant0{,}5$.

5. $3^{2x+1} - 8 \cdot 15^x + 5^{2x+1} \leqslant 0$.

6. $9^{\frac{2}{x}+0,5} - 8 \cdot 3^{\frac{2}{x}} - 3 \geqslant 0$.

7. $(4^{x+0,5} - 5 \cdot 2^x + 2)(2x^2 + 3x - 5) \leqslant 0$.

8. $\dfrac{(x^2-2x+3)^{x^2-2x+3} - (x^2-2x+3)^2}{(0,01)^{3x+4-x^2} - (0,001)^{x+1}} \geqslant 0$.

9. $(x^2-3x+3)^{\frac{x-12}{x-5}} \leqslant (x^2-3x+3)^3$.

10. $\sqrt{x-7}(11^{x-5} + 13^{x-6} - 133) \geqslant 0$.

11. $8\sqrt{17-x} \leqslant 7 \cdot 4^x + 4 \cdot 7^{x-1}$.

12. $2^{12x-4x^2-6} + 5^{12x-4x^2-7} + 7^{12x-4x^2-8} \geqslant 40$.

Вариант 2

Решите неравенство.

1. $2 \cdot 33^x \geqslant 5 \cdot 3^x$.

2. $9^{x-1} + 9^{x-0,5} \geqslant 3^{2x-3} + 297$.

3. $5 \cdot 3^{x+4} + 10^{x+4} < 2 \cdot 3^{x+5} + 3^{x+6} + 10^{x+3}$.

4. $\dfrac{7 - 2 \cdot 2^x}{4^x - 12 \cdot 2^x + 32} \geqslant 0,25$.

5. $2^{2x+1} - 9 \cdot 14^x + 7^{2x+1} \leqslant 0$.

6. $4^{\frac{2}{x}+0,5} - 3 \cdot 2^{\frac{2}{x}} - 2 \geqslant 0$.

7. $(9^{x+0,5} - 10 \cdot 3^x + 3)(2x^2 - 5x - 7) \leqslant 0$.

8. $\dfrac{(x^2-6x+11)^{x^2-6x+11} - (x^2-6x+11)^2}{(0,04)^{7x-6-x^2} - (0,008)^{x-1}} \geqslant 0$.

9. $(x^2+x+1)^{\frac{x-10}{x-3}} \leqslant (x^2+x+1)^3$.

10. $\sqrt{x-8}(10^{x-6} + 12^{x-7} - 111) \geqslant 0$.

11. $7\sqrt{26-x} \leqslant 6 \cdot 5^x + 5 \cdot 6^{x-1}$.

12. $2^{4x-4x^2+2} + 5^{4x-4x^2+1} + 7^{4x-4x^2} \geqslant 40$.

Глава 8. Логарифмические неравенства

Логарифмическими выражениями называются выражения, алгебраическая запись которых содержит переменную под знаком логарифма или в его основании. Неравенства, одна или обе части которых содержат логарифмические выражения, называются логарифмическими. В соответствии с принятой в книге классификацией алгебраическая запись таких неравенств может включать в себя и любые другие алгебраические выражения школьного курса математики: рациональные, иррациональные, тригонометрические, показательные. Таким образом, логарифмические неравенства представляют собой самый широкий в своём роде класс неравенств курса элементарной математики. Общие методы решения логарифмических неравенств (равносильные преобразования, метод введения новой переменной, метод знакотождественных множителей, метод интервалов и др.) предполагают умение применять свойства логарифмов и использовать монотонность логарифмической функции. Напомним эти свойства:

1) $a^{\log_a b} = b$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$;
2) $\log_c a + \log_c b = \log_c(ab)$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1)$;
3) $\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1)$;
4) $\log_c a^b = b \log_c a$ $(a > 0,\ c > 0,\ c \neq 1)$;
5) $\log_{c^d} a = \frac{1}{d} \log_c a$ $(a > 0,\ c > 0,\ c \neq 1,\ d \neq 0)$;
6) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$ $(a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1)$ и, в частности,
   $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1)$;
7) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1)$.

Область допустимых значений логарифмического алгебраического выражения $\log_c f(x)$ с числовым основанием $c > 0$, $c \neq 1$ задаётся неравенством $f(x) > 0$. Область допустимых значений логарифмического алгебраического выражения общего вида (с переменным основанием) $\log_{g(x)} f(x)$ задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$$

Необходимо чётко понимать, что приведённые свойства справедливы только при указанных условиях и только для арифметических (числовых) выражений. Для алгебраических логарифмических выражений эти свойства при решении уравнений и неравенств нужно применять, учитывая ОДЗ таких выражений, с тем чтобы не допускать её сужения (обычно ведущего к потере решений) или расширения (обычно ведущего к появлению посторонних решений). Так, для алгебраических логарифмических выражений и чётных степеней свойства 4–5 примут вид

$$\log_{c(x)}(a(x))^{2b} = 2b\log_{c(x)}|a(x)|;$$

$$\log_{(c(x))^{2d}} a(x) = \frac{1}{2d}\log_{|c(x)|} a(x).$$

Если «забыть» о знаке модуля, применение формул приведёт к сужению ОДЗ и потере решений, поскольку, например, выражение $\log_{c(x)}(a(x))^{2b}$ для допустимых оснований определено при $a(x) \neq 0$, а выражение $2b\log_{c(x)} a(x)$ — только при $a(x) > 0$. Аналогичное замечание справедливо и для второй из формул.

Ещё одна довольно частая ошибка связана с преобразованием логарифма произведения (частного) двух логарифмических алгебраических выражений в сумму (разность) логарифмов. Область допустимых значений каждого из выражений $\log_c(a(x)b(x))$ или $\log_c \dfrac{a(x)}{b(x)}$ задаётся условием $a(x)b(x) > 0$ (т. е. числа $a(x)$ и $b(x)$ должны быть одного знака: либо оба положительны, либо оба отрицательны). Область допустимых значений каждого из выражений $\log_c a(x) + \log_c b(x)$ или $\log_c a(x) - \log_c b(x)$ задаётся условиями $a(x) > 0$ и $b(x) > 0$ (т. е. числа $a(x)$ и $b(x)$ должны быть оба положительны). Именно поэтому при переходе от логарифма произведения (частного) к сумме (разности) логарифмов ОДЗ уравнения и неравенства может сузиться, а при обратном переходе — расшириться. Чтобы избежать потери решений, нужно либо рассматривать два случая:

1) $\begin{cases} a(x) > 0, \\ b(x) > 0, \end{cases}$ и тогда

$$\log_c(a(x)b(x)) = \log_c a(x) + \log_c b(x),$$

$$\log_c \frac{a(x)}{b(x)} = \log_c a(x) - \log_c b(x);$$

2) $\begin{cases} a(x) < 0, \\ b(x) < 0, \end{cases}$ и тогда

$$\log_c(a(x)b(x)) = \log_c(-a(x)) + \log_c(-b(x)),$$

$$\log_c \frac{a(x)}{b(x)} = \log_c(-a(x)) - \log_c(-b(x)),$$

либо использовать формулу

$$\log_c(a(x)b(x)) = \log_c|a(x)| + \log_c|b(x)|$$

при условии $a(x)b(x) > 0$, либо искать другой путь решения.

Для перехода от суммы (разности) двух алгебраических логарифмических выражений с одинаковым основанием к логарифму произведения (частного) достаточно записать условия положительности каждого из выражений под знаком логарифма (т. е. ОДЗ), что позволит исключить приобретение посторонних решений.

§ 8.1. Простейшие логарифмические неравенства

Простейшими логарифмическими неравенствами будем называть неравенства вида $\log_a f(x) \vee b$ или $\log_a f(x) \vee \log_a g(x)$, где a и b — действительные числа, $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены первой или второй степени, символом «$\vee$» обозначен, как и везде в этой книге, один из четырёх возможных знаков неравенства. Решение простейших логарифмических неравенств существенным образом основывается на монотонности логарифмической функции и учитывает её область определения. Если $a > 1$, то функция $y = \log_a t$ возрастает на $(0; +\infty)$, и тогда

$$\log_a t_1 < \log_a t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 < t_2, \\ t_1 > 0 \end{cases}$$

(если меньшее из двух чисел положительно, то и большее положительно, поэтому условие положительности t_2 можно не включать в систему). Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a t$ убывает на $(0; +\infty)$, и тогда

$$\log_a t_1 < \log_a t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 > t_2, \\ t_2 > 0 \end{cases}$$

(если меньшее из двух чисел положительно, то и большее положительно, поэтому условие положительности t_1 можно не включать в систему). Из этих свойств и того, что $b = \log_a a^b$, легко получить следующие базовые равносильные переходы.

Если $a > 1$, то

$$\log_a f(x) \geqslant b \Leftrightarrow f(x) \geqslant a^b; \tag{1}$$

$$\log_a f(x) \leqslant b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant a^b, \\ f(x) > 0; \end{cases} \tag{2}$$

$$\log_a f(x) \leqslant \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Если $0<a<1$, то

$$\log_a f(x) \geqslant b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant a^b, \\ f(x) > 0; \end{cases} \qquad (4)$$

$$\log_a f(x) \leqslant b \Leftrightarrow f(x) \geqslant a^b; \qquad (5)$$

$$\log_a f(x) \leqslant \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Для строгих неравенств все неравенства в правых частях приведённых равносильных переходов также будут строгими. Таким образом, для простейших логарифмических неравенств при освобождении от знаков логарифмов (такую операцию иногда называют *потенцированием*) знак неравенства сохраняется, если основание логарифма больше 1, и меняется на противоположный, если основание логарифма положительно и меньше 1. При этом ОДЗ можно не выписывать, ограничившись условием положительности меньшего (в силу неравенства, полученного после потенцирования) из двух чисел под знаками логарифмов.

Пример 1. Решите неравенство $\log_{0,5}(4x^2+8x-3) \leqslant -1$.

Решение. Поскольку основание логарифма меньше 1, данное неравенство равносильно следующему: $4x^2+8x-3 \geqslant (0{,}5)^{-1}$, откуда $4x^2+8x-3 \geqslant 2$ и $4x^2+8x-5 \geqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена $4x^2+8x-5$ являются числа $-2{,}5$ и $0{,}5$, старший коэффициент трёхчлена положителен. Поэтому множеством решений данного неравенства является объединение $(-\infty; -2{,}5] \cup [0{,}5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2{,}5] \cup [0{,}5; +\infty)$.

Ещё раз обратим внимание на то, что при решении простейших логарифмических неравенств не нужно торопиться и в обязательном порядке выписывать ОДЗ. В данном случае $4x^2+8x-3 \geqslant 2$, а значит, и подавно $4x^2+8x-3 \geqslant 0$. Поэтому решение последнего неравенства, задающего ОДЗ данного неравенства, было бы напрасной тратой времени, причём, вероятно, относительно продолжительного: ведь корни квадратного трёхчлена $4x^2+8x-3$ иррациональны.

Пример 2. Решите неравенство

$$\log_\pi(x^2+3x-4) \leqslant \log_\pi(3x^2-6x+5).$$

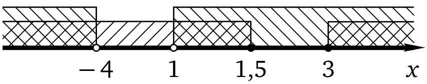
Решение. Поскольку основание логарифмов больше 1, данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+3x-4 \leqslant 3x^2-6x+5, \\ x^2+3x-4 > 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 2x^2 - 9x + 9 \geqslant 0, \\ x^2 + 3x - 4 > 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена $2x^2 - 9x + 9$ являются числа 1,5 и 3, старший коэффициент трёхчлена положителен. Поэтому множеством решений первого неравенства системы является объединение $(-\infty; 1{,}5] \cup [3; +\infty)$. Корнями квадратного трёхчлена $x^2 + 3x - 4$ являются числа -4 и 1, старший коэффициент трёхчлена положителен. Поэтому множеством решений второго неравенства системы является объединение $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$, а множеством решений всей системы (а значит, и данного неравенства) будет объединение $(-\infty; -4) \cup (1; 1{,}5] \cup [3; +\infty)$.



Ответ: $(-\infty; -4) \cup (1; 1{,}5] \cup [3; +\infty)$.

Пример 3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_2(3x^2 - 14x + 16) \leqslant 4, \\ \lg(2x^2 - 5x + 3) \leqslant \lg(x^2 - 3). \end{cases}$$

Решение. 1. Решим первое неравенство данной системы. Оно равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 3x^2 - 14x + 16 \leqslant 16, \\ 3x^2 - 14x + 16 > 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 3x^2 - 14x \leqslant 0, \\ 3x^2 - 14x + 16 > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x\left(x - \dfrac{14}{3}\right) \leqslant 0, \\ 3x^2 - 14x + 16 > 0. \end{cases}$$

Множеством решений неравенства $3x\left(x - \frac{14}{3}\right) \leqslant 0$ является отрезок $\left[0; \frac{14}{3}\right]$. Корнями квадратного трёхчлена $3x^2 - 14x + 16$ являются числа 2 и $\frac{8}{3}$, старший коэффициент трёхчлена положителен. Поэтому множеством решений неравенства $3x^2 - 14x + 16 > 0$ является объединение $(-\infty; 2) \cup \left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$, а множеством решений системы

$$\begin{cases} 3x\left(x - \dfrac{14}{3}\right) \leqslant 0, \\ 3x^2 - 14x + 16 > 0 \end{cases}$$

(а значит, и первого неравенства данной системы) будет объединение $[0;2)\cup\left(\frac{8}{3};\frac{14}{3}\right]$.

2. Решим второе неравенство данной системы. Оно равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}2x^2-5x+3\leqslant x^2-3,\\ 2x^2-5x+3>0,\end{cases}\quad\text{откуда}\quad\begin{cases}x^2-5x+6\leqslant 0,\\ 2x^2-5x+3>0.\end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена x^2-5x+6 являются числа 2 и 3, старший коэффициент трёхчлена положителен. Поэтому множеством решений неравенства $x^2-5x+6\leqslant 0$ является отрезок $[2;3]$. Корнями квадратного трёхчлена $2x^2-5x+3$ являются числа 1 и 1,5, старший коэффициент трёхчлена положителен. Поэтому множеством решений неравенства $2x^2-5x+3>0$ является объединение $(-\infty;1)\cup(1{,}5;+\infty)$, а множеством решений системы

$$\begin{cases}x^2-5x+6\leqslant 0,\\ 2x^2-5x+3>0\end{cases}$$

(а значит, и второго неравенства данной системы) будет, очевидно, отрезок $[2;3]$.

3. Найдём множество решений данной системы как пересечение множеств $[0;2)\cup\left(\frac{8}{3};\frac{14}{3}\right]$ и $[2;3]$. Получим $\left(\frac{8}{3};3\right]$.

Ответ: $\left(\frac{8}{3};3\right]$.

Упражнения к § 8.1

Решите неравенство (систему неравенств).

1. а) $\log_5 x<2$; **б)** $\log_4 x<3$.

2. а) $\log_3 x\leqslant 3$; **б)** $\log_2 x\leqslant 5$.

3. а) $\log_4 x\geqslant -0{,}5$; **б)** $\log_{25} x\geqslant -0{,}5$.

4. а) $\log_{0{,}123} x\leqslant 0$; **б)** $\log_{0{,}321} x\leqslant 0$.

5. а) $\log_{\frac{1}{7}} x>2$; **б)** $\log_{\frac{1}{8}} x>2$.

6. а) $\log_{0{,}04} x\geqslant -1$; **б)** $\log_{0{,}02} x\geqslant -1$.

7. а) $\log_5(4x+5)<3$; **б)** $\log_3(2x-5)<4$.

8. а) $\log_{0{,}1}(3x+25)<-2$; **б)** $\log_{0{,}2}(6x-25)<-3$.

9. а) $\log_{\frac{2}{7}}(2x-2{,}5)\leqslant -1$; **б)** $\log_{\frac{5}{6}}(5x-2{,}8)\leqslant -1$.

10. а) $\log_3(10x-19)>4$; **б)** $\log_4(7x-24)>4$.

11. а) $\log_{0,4}(5x-7{,}5)>-1$; **б)** $\log_{0,8}(5x-3{,}75)>-1$.

12. а) $\log_7(9x+4)\geqslant 2$; **б)** $\log_6(7x-6)\geqslant 2$.

13. а) $\log_{12}(x^2-25)>2$; **б)** $\log_5(x^2-144)>2$.

14. а) $\log_4(x^2-36)<3$; **б)** $\log_6(x^2-64)<2$.

15. а) $\log_{\frac{1}{12}}(169-x^2)<-2$; **б)** $\log_{\frac{1}{15}}(289-x^2)<-2$.

16. а) $\log_{\sqrt{3}}(x^2-16)\geqslant 4$; **б)** $\log_{\sqrt{2}}(x^2-9)\geqslant 8$.

17. а) $\log_{36}(25x^2-64)\leqslant 1$; **б)** $\log_{64}(49x^2-36)\leqslant 1$.

18. а) $\log_{\frac{1}{8}}(100-x^2)\leqslant -2$; **б)** $\log_{\frac{1}{9}}(225-x^2)\leqslant -2$.

19. а) $\log_{\frac{1}{21}}(841-x^2)\geqslant -2$; **б)** $\log_{\frac{1}{24}}(676-x^2)\geqslant -2$.

20. а) $\log_5(x^2-4x)>1$; **б)** $\log_6(x^2-5x)>1$.

21. а) $\log_3(x^2-8x)<2$; **б)** $\log_2(x^2-3x)<2$.

22. а) $\log_{0,25}(17x-x^2)>-2$; **б)** $\log_{0,2}(26x-x^2)>-2$.

23. а) $\log_{0,5}(x^2+6x)<-4$; **б)** $\log_{0,5}(x^2+2x)<-3$.

24. а) $\log_2(5x^2+16x)\leqslant 4$; **б)** $\log_6(5x^2+11x)\leqslant 2$.

25. а) $\log_{\frac{1}{12}}(11x-2x^2)\geqslant -1$; **б)** $\log_{\frac{1}{9}}(9x-2x^2)\geqslant -1$.

26. а) $\log_{16}(5x^2-16x)\leqslant 1$; **б)** $\log_{18}(5x^2-9x)\leqslant 1$.

27. а) $\log_6(2x^2+11x-4)>2$; **б)** $\log_5(2x^2-11x-5)>2$.

28. а) $\log_{0,5}(24-2x-x^2)>-4$; **б)** $\log_{0,25}(21+4x-x^2)>-2$.

29. а) $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}(2x^2-7x-3)<-2$; **б)** $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(2x^2-9x-4)<-2$.

30. а) $\log_9(2x^2+7x+5)\geqslant 1{,}5$; **б)** $\log_{125}(2x^2+x-3)\geqslant \dfrac{2}{3}$.

31. а) $\log_{64}(5x^2-4x-12)\leqslant \dfrac{2}{3}$; **б)** $\log_{32}(5x^2+6x-11)\leqslant 0{,}8$.

32. а) $\log_{\frac{1}{\sqrt[5]{9}}}(13x-2x^2-11)\geqslant -5$; **б)** $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}(17x-2x^2-15)\geqslant -3$.

33. а) $\log_{\frac{1}{324}}(5x^2+x-4)\leqslant -0{,}5$; **б)** $\log_{\frac{1}{256}}(5x^2-6x-11)\leqslant -0{,}5$.

34. а) $\log_2(5x+7)<\log_2(3x+11)$; **б)** $\log_3(5x+6)<\log_3(2x+9)$.

35. а) $\log_{0,9}(5x-33)>\log_{0,9}(2x+33)$; **б)** $\log_{0,3}(5x-22)>\log_{0,3}(3x+22)$.

36. а) $\ln(2x+17)\geqslant \ln(4x-13)$; **б)** $\ln(3x+19)\geqslant \ln(5x-17)$.

37. а) $\lg(25x^2-4)\leqslant \lg(25-4x^2)$; **б)** $\ln(16x^2-9)\leqslant \ln(16-9x^2)$.

38. а) $\ln(x^2-x-16)>\ln(9-x)$; **б)** $\lg(x^2-x-9)>\lg(16-x)$.

39. а) $\log_{0,23}(x^2-12)<\log_{0,23}(5x-x^2)$; **б)** $\log_{0,32}(x^2-18)<\log_{0,32}(9x-x^2)$.

40. а) $\log_{0,7}(2x^2-7x+5)\geqslant \log_{0,7}(x^2-5)$; **б)** $\log_{0,3}(2x^2-9x+7)\geqslant \log_{0,3}(x^2-7)$.

41. а) $\log_{\sin 1}(x^2-2x-11) \leqslant \log_{\sin 1}(7x-x^2-6)$;

б) $\log_{\cos 1}(x^2+2x-17) \leqslant \log_{\cos 1}(8+7x-x^2)$.

42. а) $\log_{\frac{3\pi}{10}}(x^2+2x-3) \geqslant \log_{\frac{3\pi}{10}}(2x^2-5x+9)$;

б) $\log_{\frac{2\pi}{7}}(x^2-5x-6) \geqslant \log_{\frac{2\pi}{7}}(2x^2+x+2)$.

43. а) $\begin{cases} \log_5(2x+5) > 2, \\ \log_6(5x-24) < 2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \log_3(2x-1) > 3, \\ \log_7(5x-26) < 2. \end{cases}$

44. а) $\begin{cases} \log_3(x-5) \leqslant 1, \\ x^2-14x+48 \geqslant 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \log_5(x-3) \leqslant 1, \\ x^2-13x+40 \geqslant 0. \end{cases}$

45. а) $\begin{cases} \log_{0,5}(x-2) \geqslant -2, \\ \log_{0,5}(x^2-9x+20) \leqslant -1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \log_{0,25}(x-3) \geqslant -1, \\ \log_{0,5}(x^2-11x+30) \leqslant -1. \end{cases}$

46. а) $\begin{cases} \log_{0,25}(24-2x-x^2) \geqslant -2, \\ \log_5(x^2+2x+17) \leqslant 2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \log_3(21-4x-x^2) \leqslant 2, \\ \log_{0,2}(x^2+4x+13) \geqslant -2. \end{cases}$

47. а) $\begin{cases} \log_2(3x^2-14x+16) \leqslant 4, \\ \lg(2x^2-5x+3) \leqslant \lg(x^2-3); \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_3(2x^2-15x+27) \leqslant 3, \\ \ln(2x^2-9x+10) \leqslant \ln(x^2-10). \end{cases}$

48. а) $\begin{cases} \log_2(2x^2+9x+10) \geqslant 0, \\ \log_5(2x^2-x-1) \leqslant \log_5(x^2-2x+5); \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_5(2x^2+13x+21) \geqslant 0, \\ \log_2(2x^2+x-3) \leqslant \log_2(x^2-x+5). \end{cases}$

Диагностическая работа 13

Вариант 1

Решите неравенство (систему неравенств).

1. $\log_{16} x > 0{,}5$.

2. $\log_{0,2} x < 3$.

3. $\log_4(13x-14) \leqslant 3$.

4. $\log_{\frac{1}{6}}(5x-4) \geqslant -2$.

5. $\log_3(2x^2+3x) \geqslant 3$.

6. $\log_{\frac{1}{24}}(625-x^2) > -2$.

7. $\log_3(2x^2+5x-3) < 2$.

8. $\log_{0,7}(2x+11) \leqslant \log_{0,7}(4x-5)$.

9. $\log_{\frac{3\pi}{8}}(4x^2+24x+35) \geqslant \log_{\frac{3\pi}{8}}(-x^2-6x-5)$.

10. $\begin{cases} \log_7(3x+1) \geqslant 2, \\ \log_{0,5}(x-2) \geqslant -4. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \log_4(25-x^2) \geqslant 2, \\ \log_5(x^2+16) \geqslant 2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \log_3(x^2-1) \geqslant 1, \\ \log_2(x^2-x+2) \leqslant 3. \end{cases}$

Вариант 2

Решите неравенство (систему неравенств).

1. $\log_9 x > 0{,}5$.

2. $\log_{0,5} x < 2$.

3. $\log_2(11x - 12) \leqslant 5$.

4. $\log_{\frac{1}{9}}(5x + 6) \geqslant -2$.

5. $\log_5(2x^2 + 5x) \geqslant 2$.

6. $\log_{\frac{1}{16}}(400 - x^2) > -2$.

7. $\log_4(5x^2 + 9x - 2) < 2$.

8. $\log_{0,6}(2x + 13) \leqslant \log_{0,6}(4x - 1)$.

9. $\log_{\frac{2\pi}{5}}(9x^2 + 36x + 35) \geqslant \log_{\frac{2\pi}{5}}(5 - 4x - x^2)$

10. $\begin{cases} \log_{0,2}(2x - 7) \leqslant -2, \\ \log_3(x - 5) \leqslant 3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \log_3(25 - x^2) \geqslant 2, \\ \log_5(x^2 + 9) \geqslant 2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \log_5(x^2 - 4) \geqslant 1, \\ \log_2(x^2 - x + 4) \leqslant 4. \end{cases}$

§ 8.2. Более сложные логарифмические неравенства

Равносильные переходы (1)–(6) из § 8.1 справедливы, разумеется, не только для многочленов первой или второй степени, но и для произвольных алгебраических выражений под знаками логарифмов. Будем в дальнейшем называть неравенства в левой части каждой из этих формул базовыми. Многие логарифмические неравенства и системы, содержащие такие неравенства, сводятся к одному или нескольким базовым неравенствам после выполнения преобразований, основанных на свойствах логарифмов 1–7, или при использовании метода введения новой переменной. Часто можно обойтись без перехода к простейшим логарифмическим неравенствам, рационализировав данное неравенство с помощью метода знакотождественных множителей. Перейдём к обзору методов решения более сложных логарифмических неравенств, начав с метода равносильных преобразований.

Равносильные преобразования

При выполнении преобразований логарифмических выражений следует, как уже отмечалось, быть особенно внимательными в случае вынесения (внесения) чётной степени за знак логарифма или перехода от логарифма произведения (частного) двух алгебраических выражений к сумме (разности) логарифмов этих выражений и обратного перехода.

Пример 1. Решите неравенство $\lg(x-5)+\lg(x-20)\leqslant 2$.

Решение. Левая часть неравенства определена при $x>20$. Поэтому оно равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \lg(x-5)(x-20)\leqslant 2, \\ x>20, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} (x-5)(x-20)\leqslant 100, \\ x>20. \end{cases}$$

Первое неравенство системы после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых легко приводится к виду $x^2-25x\leqslant 0$, откуда $x(x-25)\leqslant 0$. Множеством решений последнего неравенства является отрезок $[0;25]$, а множеством решений системы — $(20;25]$.

Ответ: $(20;25]$.

Пример 2. Решите неравенство $\log_5\left(20-\frac{9}{x}\right)+\log_{0,2}\left(4-\frac{x}{5}\right)\geqslant 1$.

Решение. Поскольку $0{,}2=\frac{1}{5}=5^{-1}$, неравенство приводится к виду

$$\log_5\left(20-\frac{9}{x}\right)-\log_5\left(4-\frac{x}{5}\right)\geqslant 1.$$

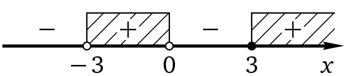
Переход к логарифму частного приведёт к громоздкому неравенству. Вообще, когда есть выбор, лучше использовать переход к логарифму произведения, перенеся логарифм, перед которым стоит знак «минус», в другую часть неравенства. В данном случае получим $\log_5\left(20-\frac{9}{x}\right)\geqslant$ $\geqslant 1+\log_5\left(4-\frac{x}{5}\right)$ и, далее, $\log_5\left(20-\frac{9}{x}\right)\geqslant\log_5 5+\log_5\left(4-\frac{x}{5}\right)$, откуда $\log_5\left(20-\frac{9}{x}\right)\geqslant\log_5\left(5\left(4-\frac{x}{5}\right)\right)$, т. е. $\log_5\left(20-\frac{9}{x}\right)\geqslant\log_5(20-x)$. Последнее неравенство является базовым и равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 20-\frac{9}{x}\geqslant 20-x, \\ 20-x>0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x-\frac{9}{x}\geqslant 0, \\ x<20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-9}{x}\geqslant 0, \\ x<20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-3)(x+3)}{x}\geqslant 0, \\ x<20. \end{cases}$$

Решим первое неравенство полученной системы методом интервалов:



Множеством его решений является объединение $[-3;0)\cup[3;+\infty)$, а множеством решений системы — $[-3;0)\cup[3;20)$

Ответ: $[-3;0)\cup[3;20)$.

Пример 3. Решите неравенство $\dfrac{3}{\log_{x+8}64}-\dfrac{2}{\log_{x-1}16}\geqslant 1$.

Решение. Левая часть неравенства определена при $x>1$, $x\neq 2$. Заметим, что числа 64 и 16 являются степенями двойки. Это позволяет вынести степени за знак логарифма и перейти к основанию 2. Получим последовательно

$$\frac{3}{\log_{x+8}2^6}-\frac{2}{\log_{x-1}2^4}\geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{3}{6\log_{x+8}2}-\frac{2}{4\log_{x-1}2}\geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\log_2(x+8)}{2}-\dfrac{\log_2(x-1)}{2}\geqslant 1, \\ x>1, \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+8)-\log_2(x-1)\geqslant 2, \\ x>1, \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+8)\geqslant \log_2 4+\log_2(x-1), \\ x>1, \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+8)\geqslant \log_2(4(x-1)), \\ x>1, \\ x\neq 2, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x+8\geqslant 4x-4, \\ x>1, \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant 4, \\ x>1, \\ x\neq 2. \end{cases}$$

Ответ: $(1;2)\cup(2;4]$.

В некоторых случаях формальное нахождение ОДЗ неравенства приводит к необходимости решения нескольких неравенств, часть из которых можно опустить, если аккуратно использовать равносильные преобразования.

Пример 4. Решите неравенство $\log_{0,5}\left(\log_2\left(\log_3\left(\dfrac{2x-5}{5x+2}\right)\right)\right)\geqslant 0$.

Решение. Применим последовательно несколько раз базовые равносильные переходы:

$$\log_{0,5}\left(\log_2\left(\log_3\left(\frac{2x-5}{5x+2}\right)\right)\right)\geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2\left(\log_3\left(\dfrac{2x-5}{5x+2}\right)\right)\leqslant 1, \\ \log_2\left(\log_3\left(\dfrac{2x-5}{5x+2}\right)\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left(\dfrac{2x-5}{5x+2}\right)\leqslant 2, \\ \log_3\left(\dfrac{2x-5}{5x+2}\right)>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-5}{5x+2}\leqslant 9, \\ \dfrac{2x-5}{5x+2}>3. \end{cases}$$

Перенесём числа из правой части каждого неравенства в левую и приведём полученные разности к общему знаменателю:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-5}{5x+2}-9\leqslant 0, \\ \dfrac{2x-5}{5x+2}-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-5-45x-18}{5x+2}\leqslant 0, \\ \dfrac{2x-5-15x-6}{5x+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-43x-23}{5x+2}\leqslant 0, \\ \dfrac{-13x-11}{5x+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{43x+23}{5x+2}\geqslant 0, \\ \dfrac{13x+11}{5x+2}<0. \end{cases}$$

Множеством решений первого неравенства системы является объединение $\left(-\infty;-\dfrac{23}{43}\right]\cup\left(-\dfrac{2}{5};+\infty\right)$, множеством решений второго неравенства системы является объединение $\left(-\dfrac{11}{13};-\dfrac{2}{5}\right)$. Следовательно, множеством решений системы будет промежуток $\left(-\dfrac{11}{13};-\dfrac{23}{43}\right]$.

Ответ: $\left(-\dfrac{11}{13};-\dfrac{23}{43}\right]$.

Перейдём к примерам, решение которых требует внимания и осознанного применения свойств логарифмов.

Пример 5. Решите неравенство

$$9\log_{12}(x^2-3x-4)\leqslant 10+\log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}.$$

Решение. Корнями квадратного трёхчлена x^2-3x-4 являются числа -1 и 4. Поэтому данное неравенство можно переписать в виде

$$9\log_{12}(x+1)(x-4)\leqslant 10+\log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}.$$

Переход от логарифмов произведения и частного к сумме и разности логарифмов с целью приведения подобных слагаемых приведёт в данном случае к сужению ОДЗ. Обратное преобразование приводит к расширению ОДЗ, что не столь критично: ведь в этом случае достаточно записать ОДЗ и тогда преобразование суммы (разности) логарифмов по одному основанию в логарифм произведения (частного) по тому же основанию будет равносильным на ОДЗ. В таких случаях лучше получить более громоздкое неравенство, чем потерять решения. Попробуем сделать именно это, перейдя к равносильной системе

$$\begin{cases} \log_{12}(x+1)^9(x-4)^9-\log_{12}\dfrac{(x+1)^9}{x-4}\leqslant 10, \\ (x+1)(x-4)>0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \log_{12} \dfrac{(x+1)^9(x-4)^9}{\frac{(x+1)^9}{x-4}} \leqslant 10, \\ (x+1)(x-4) > 0, \end{cases}$$

и, значит,

$$\begin{cases} \log_{12}(x-4)^{10} \leqslant 10, \\ (x+1)(x-4) > 0. \end{cases}$$

Множеством решений второго неравенства системы является объединение $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$. Решим первое неравенство, учитывая, что

$$\log_{12}(x-4)^{10} = 10\log_{12}|x-4|.$$

Получим неравенство $10\log_{12}|x-4| \leqslant 10$, откуда

$$\log_{12}|x-4| \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-4| \leqslant 12, \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \leqslant 12, \\ x-4 \geqslant -12, \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 16, \\ x \geqslant -8, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Заметим, что неравенство $x \neq 4$ является следствием неравенства $(x+1)(x-4) > 0$. Тем самым остаётся найти пересечение множеств $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$ и $[-8; 16]$. Этим пересечением является, очевидно, $[-8; -1) \cup (4; 16]$.

Ответ: $[-8; -1) \cup (4; 16]$.

Отметим, что «ловушки», связанные с вынесением (внесением) чётной степени за знак логарифма, переходом от логарифма произведения (частного) двух алгебраических выражений к сумме (разности) логарифмов этих выражений и обратным переходом, являются характерными для многих неравенств ЕГЭ по математике.

Пример 6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^{x+1} - 33\cdot 2^x + 8 \leqslant 0, \\ 2\log_2 \dfrac{x-1}{x+1,2} + \log_2(x+1,2)^2 \geqslant 2. \end{cases}$$

Решение. 1. Решим первое неравенство системы, приведя его к виду $4\cdot(2^x)^2 - 33\cdot 2^x + 8 \leqslant 0$ и сделав замену переменной $t = 2^x$, где $t > 0$. Получим квадратное неравенство $4t^2 - 33t + 8 \leqslant 0$, решив которое найдём $\frac{1}{4} \leqslant t \leqslant 8$. Значит, $\frac{1}{4} \leqslant 2^x \leqslant 8$, или $2^{-2} \leqslant 2^x \leqslant 2^3$, откуда $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$2\log_2\frac{x-1}{x+1{,}2}+\log_2(x+1{,}2)^2\geqslant 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_2\left(\dfrac{x-1}{x+1{,}2}\right)^2+\log_2(x+1{,}2)^2\geqslant 2,\\ \dfrac{x-1}{x+1{,}2}>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_2\left(\left(\dfrac{x-1}{x+1{,}2}\right)^2(x+1{,}2)^2\right)\geqslant 2,\\ \dfrac{x-1}{x+1{,}2}>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2(x-1)^2\geqslant 2,\\ \dfrac{x-1}{x+1{,}2}>0.\end{cases}$$

Неравенство $\log_2(x-1)^2\geqslant 2$ равносильно неравенству $(x-1)^2\geqslant 4$, откуда

$$(x-1+2)(x-1-2)\geqslant 0,$$

т. е. $(x+1)(x-3)\geqslant 0$. Множеством решений последнего неравенства является объединение $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$. Множеством решений неравенства $\dfrac{x-1}{x+1{,}2}>0$ является объединение $(-\infty;-1{,}2)\cup(1;+\infty)$. Поэтому множеством решений последней системы, а значит, и второго неравенства данной системы будет объединение $(-\infty;-1{,}2)\cup[3;+\infty)$.

3. Множество решений данной системы найдём как пересечение множеств $[-2;3]$ и $(-\infty;-1{,}2)\cup[3;+\infty)$. Получим множество $[-2;-1{,}2)\cup\{3\}$.

Ответ: $[-2;-1{,}2)\cup\{3\}$.

Базовые логарифмические неравенства с переменным основанием

Рассмотрим теперь базовые логарифмические неравенства с переменным основанием, т. е. неравенства вида $\log_{a(x)}f(x)\vee b$ и $\log_{a(x)}f(x)\vee \vee\log_{a(x)}g(x)$. В большинстве случаев такие неравенства целесообразно решать методом знакотождественных множителей (см. § 1.6 и примеры, приведённые ниже в этом параграфе). Если освоение этого метода вызывает затруднения, можно использовать традиционный способ решения таких неравенств, заключающийся в рассмотрении двух случаев: 1) основание логарифма больше 1 (в этом случае при потенцировании знак неравенства сохраняется); 2) основание логарифма положительно и меньше 1 (в этом случае при потенцировании знак неравенства меняется на противоположный). Разумеется, при потенцировании необходимо учитывать ОДЗ неравенства. Таким образом,

$$\log_{a(x)} f(x) \leqslant b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \leqslant (a(x))^b; \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) < 1, \\ a(x) > 0, \\ f(x) \geqslant (a(x))^b; \end{cases} \end{array}\right. \tag{1}$$

$$\log_{a(x)} f(x) \geqslant b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) \geqslant (a(x))^b; \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) < 1, \\ a(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \leqslant (a(x))^b; \end{cases} \end{array}\right. \tag{2}$$

$$\log_{a(x)} f(x) \leqslant \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \leqslant g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) < 1, \\ a(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant g(x). \end{cases} \end{array}\right. \tag{3}$$

Для строгих неравенств последние неравенства в каждой из систем каждой из совокупностей также будут строгими. Конечно же, при решении конкретных неравенств лучше не выписывать столь громоздкие совокупности, а рассматривать два случая, находить множество решений для каждого из них, а затем объединять найденные множества.

Пример 7. Решите неравенство $\log_{6x}(x^2-15x+54)<1$.

Решение. Рассмотрим два случая: 1) основание логарифма больше 1; 2) основание логарифма положительно и меньше 1. В первом случае получим систему

$$\begin{cases} 6x > 1, \\ x^2-15x+54 > 0, \\ x^2-15x+54 < 6x, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{6}, \\ x^2-15x+54 > 0, \\ x^2-21x+54 < 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена $x^2-15x+54$ являются числа 6 и 9. Поэтому множеством решений неравенства $x^2-15x+54>0$ будет объединение $(-\infty; 6)\cup(9; +\infty)$. С учётом неравенства $x>\frac{1}{6}$ получим множество $\left(\frac{1}{6}; 6\right)\cup(9; +\infty)$. Корнями квадратного трёхчлена x^2-21x+ $+54$ являются числа 3 и 18. Поэтому множеством решений неравенства $x^2-21x+54<0$ будет $(3; 18)$, а его пересечением с множеством $\left(\frac{1}{6}; 6\right)\cup(9; +\infty)$ и, следовательно, множеством решений системы будет объединение $(3; 6)\cup(9; 18)$. Во втором случае получим систему

$$\begin{cases}0<6x<1,\\ x^2-15x+54>6x,\end{cases}\quad \text{откуда}\quad \begin{cases}0<x<\frac{1}{6},\\ x^2-21x+54>0.\end{cases}$$

Множеством решений первого неравенства является $\left(0; \frac{1}{6}\right)$. Корни квадратного трёхчлена в левой части второго неравенства последней системы уже найдены, поэтому множеством решений этого неравенства является объединение промежутков $(-\infty; 3)\cup(18; +\infty)$, а пересечением этого множества с множеством $\left(0; \frac{1}{6}\right)$ и, следовательно, множеством решений системы — промежуток $\left(0; \frac{1}{6}\right)$.

Объединив найденные в каждом случае множества решений, получим множество решений данного неравенства $\left(0; \frac{1}{6}\right)\cup(3; 6)\cup(9; 18)$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{6}\right)\cup(3; 6)\cup(9; 18)$.

Пример 8. Решите неравенство

$$\log_{2x^2-15x+28}(2x+11)\geqslant\log_{2x^2-15x+28}(11-2x).$$

Решение. Аналогично предыдущему примеру рассмотрим два случая.

1. В первом случае имеем

$$\begin{cases}2x^2-15x+28>1,\\ 11-2x>0,\\ 2x+11\geqslant 11-2x,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}2x^2-15x+27>0,\\ x<5{,}5,\\ x\geqslant 0,\end{cases}\quad \text{и, значит,}\quad \begin{cases}2x^2-15x+27>0,\\ 0\leqslant x<5{,}5.\end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена $2x^2-15x+27$ являются числа 3 и 4,5. Поэтому множеством решений неравенства $2x^2-15x+27>0$ будет объединение $(-\infty; 3) \cup (4{,}5; +\infty)$. С учётом неравенства $0 \leqslant x < 5{,}5$ получим множество решений системы $[0; 3) \cup (4{,}5; 5{,}5)$.

2. Во втором случае имеем

$$\begin{cases} 2x^2 - 15x + 28 > 0, \\ 2x^2 - 15x + 28 < 1, \\ 2x + 11 > 0, \\ 2x + 11 \leqslant 11 - 2x, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 2x^2 - 15x + 28 > 0, \\ 2x^2 - 15x + 27 < 0, \\ x > -5{,}5, \\ x \leqslant 0, \end{cases} \quad \text{и, значит,} \quad \begin{cases} 2x^2 - 15x + 28 > 0, \\ 2x^2 - 15x + 27 < 0, \\ -5{,}5 < x \leqslant 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена $2x^2 - 15x + 28$ являются числа 3,5 и 4. Поэтому множеством решений неравенства $2x^2 - 15x + 28 > 0$ будет объединение $(-\infty; 3{,}5) \cup (4; +\infty)$. Корни квадратного трёхчлена в левой части второго неравенства системы уже найдены, поэтому множеством его решений будет интервал $(3; 4{,}5)$. Это множество не имеет пересечений с множеством решений третьего неравенства системы, поэтому в данном случае решений нет.

Ответ: $[0; 3) \cup (4{,}5; 5{,}5)$.

Метод знакотождественных множителей и метод интервалов

Как и в случае показательных неравенств, логарифмические неравенства, к решению которых можно применить метод интервалов, целесообразно сначала рационализировать с помощью метода знакотождественных множителей, поэтому и здесь эти два метода объединены под одним заголовком.

Напомним, что метод знакотождественных множителей используется для решения неравенств вида $a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot \ldots \cdot a_n(x) \vee 0$ или $\dfrac{a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot \ldots \cdot a_n(x)}{a_{n+1}(x) \cdot a_{n+2}(x) \cdot \ldots \cdot a_{n+m}(x)} \vee 0$ в тех случаях, когда одно или несколько алгебраических выражений в левой части неравенства можно заменить знакотождественным. Можно выделить две основные пары знакотождественных логарифмических выражений:

$$\begin{aligned} &a(x) = \log_c u(x) - \log_c v(x) \quad \text{при } c > 1; \\ &b(x) = u(x) - v(x) \quad (\text{при условиях } u(x) > 0,\ v(x) > 0); \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &a(x) = \log_{c(x)} u(x); \\ &b(x) = \frac{u(x) - 1}{c(x) - 1} \quad (\text{при условиях } u(x) > 0,\ c(x) > 0). \end{aligned} \tag{2}$$

В § 1.6 подробно излагается метод знакотождественных множителей, проиллюстрированный многочисленными примерами его применения к решению логарифмических неравенств с переменным основанием (поэтому сначала нужно изучить материал этого параграфа, а потом вернуться к примерам, приведённым ниже), и рассматривается ещё несколько пар знакотождественных логарифмических выражений для числовых оснований, в том числе меньших единицы. Заметим, что все эти пары являются следствиями двух приведённых. Если основание c логарифма в выражении $a(x)=\log_c u(x)-\log_c v(x)$ меньше 1, то всегда можно перейти к основанию $\frac{1}{c}$, большему 1, используя формулу перехода к новому основанию. Аналогично формула (2) справедлива и для логарифма с числовым основанием:

$$\operatorname{sign}(\log_c u(x)) = \operatorname{sign}\left(\frac{u(x)-1}{c-1}\right) \text{ при } u(x)>0,$$

поэтому обе части неравенства можно будет умножить на число $c-1$, сохранив знак неравенства, если это число положительно, и поменяв знак неравенства на противоположный, если это число отрицательно.

Пример 9. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{6-x}(8x-x^2-12) \geqslant 1, \\ \dfrac{x^2-4x-1}{x-4} + \dfrac{3}{x-6} \leqslant x. \end{cases}$$

Решение. 1. Решим первое неравенство системы. Корнями квадратного трёхчлена $8x-x^2-12$ являются числа 2 и 6. Поэтому

$$8x-x^2-12 = -(x-2)(x-6).$$

Учитывая, что основание логарифма равно $6-x$, внесём знак «минус» во вторую скобку: $8x-x^2-12=(x-2)(6-x)$. Таким образом,

$$\log_{6-x}(x-2)(6-x) \geqslant 1,$$

откуда $\log_{6-x}(x-2)+\log_{6-x}(6-x)\geqslant 1$. В данном случае преобразование логарифма произведения в сумму логарифмов не приводит к изменению ОДЗ, поскольку $6-x>0$ как основание логарифма и, значит, $x-2>0$. Таким образом, $\log_{6-x}(x-2)+1\geqslant 1$, откуда $\log_{6-x}(x-2)\geqslant 0$. Применив метод знакотождественных множителей, получим

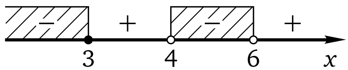
$$\begin{cases} \dfrac{x-2-1}{6-x-1} \geqslant 0, \\ 2<x<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{5-x} \geqslant 0, \\ 2<x<6. \end{cases}$$

Множеством решений первого неравенства последней системы является промежуток $[3; 5)$. Это же множество, очевидно, является и множеством решений всей этой системы.

2. Решим второе неравенство данной системы, приведя его к виду

$$\frac{x^2-4x}{x-4}-\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-6}\leqslant x,$$

откуда $x-\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-6}\leqslant x$ и $-\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-6}\leqslant 0$. Приведя дроби к общему знаменателю, после упрощений получим неравенство $\frac{2(x-3)}{(x-4)(x-6)}\leqslant 0$. Применим метод интервалов:



Множеством решений неравенства является объединение $(-\infty;\,3]\cup$ $\cup\,(4;\,6)$.

3. Найдём множество решений данной системы как пересечение множеств $[3;\,5)$ и $(-\infty;\,3]\cup(4;\,6)$. Получим $\{3\}\cup(4;\,5)$.

Ответ: $\{3\}\cup(4;\,5)$.

Пример 10. Решите неравенство $\log_{5x+2}(\log_{8-x}(x+2))\geqslant 0$.

Решение. Применив метод знакотождественных множителей, получим систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{\log_{8-x}(x+2)-1}{5x+2-1}\geqslant 0,\\ \log_{8-x}(x+2)>0. \end{cases}$$

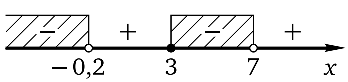
Перейдём в первом неравенстве к основанию 10 (разумеется, можно перейти и к любому другому основанию, лучше к большему единицы):

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{\lg(x+2)}{\lg(8-x)}-1}{5x+1}\geqslant 0,\\ \log_{8-x}(x+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\lg(x+2)-\lg(8-x)}{(5x+1)\lg(8-x)}\geqslant 0,\\ \log_{8-x}(x+2)>0. \end{cases}$$

Вновь применим метод знакотождественных множителей:

$$\begin{cases} \dfrac{(x+2)-(8-x)}{(5x+1)(8-x-1)}\geqslant 0,\\ \dfrac{x+2-1}{8-x-1}>0,\\ x+2>0,\\ 8-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{(x+0{,}2)(x-7)}\leqslant 0,\\ \dfrac{x+1}{x-7}<0,\\ -2<x<8. \end{cases}$$

Решим первое неравенство полученной системы методом интервалов:



Множеством решений первого неравенства системы является объединение $(-\infty; -0{,}2) \cup [3; 7)$. Множеством решений второго неравенства системы является $(-1; 7)$. Пересечением этих двух множеств будет $(-1; -0{,}2) \cup [3; 7)$. Очевидно, что все числа множества $(-1; -0{,}2) \cup$ $\cup [3; 7)$ удовлетворяют третьему неравенству последней системы.

Ответ: $(-1; -0{,}2) \cup [3; 7)$.

Пример 11. Решите неравенство

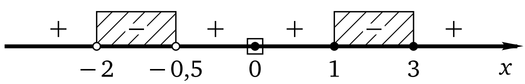
$$\frac{(x^2+x)\cdot\log_{x+2}(x+1)\cdot\log_7(x-2)^2}{2x^2+5x+2} \leqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Заменим логарифмические выражения в числителе знакотождественными, а квадратные трёхчлены разложим на множители:

$$\begin{cases} \dfrac{x(x+1)\cdot\frac{x+1-1}{x+2-1}\cdot((x-2)^2-1)}{2(x+0{,}5)(x+2)} \leqslant 0, \\ x > -1, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2(x+1)(x-1)(x-3)}{(x+0{,}5)(x+2)(x+1)} \leqslant 0, \\ x > -1, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2(x-1)(x-3)}{(x+0{,}5)(x+2)} \leqslant 0, \\ x > -1, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Решим первое неравенство полученной системы методом интервалов:



Получим множество $(-2; -0{,}5) \cup \{0\} \cup [1; 3]$. С учётом второго и третьего неравенств последней системы получим множество её решений: $(-1; -0{,}5) \cup \{0\} \cup [1; 2) \cup (2; 3]$.

Ответ: $(-1; -0{,}5) \cup \{0\} \cup [1; 2) \cup (2; 3]$.

Формула перехода к новому числовому основанию в некоторых случаях позволяет существенно упростить неравенство.

Пример 12. Решите неравенство

$$\log_x(x+1)\cdot\log_{x+1}(x+2)\cdot\log_{x+2}(x+3)\cdot\log_{x+3}(x+4)\times$$
$$\times\log_{x+4}(x+5)\cdot\log_{x+5}(x+6) \leqslant 2.$$

Решение. Левая часть неравенства определена при $x>0$, $x\neq 1$. Перейдём к основанию 10 в каждом из логарифмов:

$$\frac{\lg(x+1)}{\lg x}\cdot\frac{\lg(x+2)}{\lg(x+1)}\cdot\frac{\lg(x+3)}{\lg(x+2)}\cdot\frac{\lg(x+4)}{\lg(x+3)}\cdot\frac{\lg(x+5)}{\lg(x+4)}\cdot\frac{\lg(x+6)}{\lg(x+5)}\leqslant 2 \Leftrightarrow$$

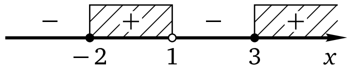
$$\Leftrightarrow \frac{\lg(x+6)}{\lg x}\leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{\lg(x+6)}{\lg x}-2\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\lg(x+6)-2\lg x}{\lg x}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg(x+6)-\lg x^2}{\lg x}\leqslant 0.$$

Применим метод знакотождественных множителей к решению первого неравенства системы:

$$\begin{cases} \dfrac{x+6-x^2}{x-1}\leqslant 0,\\ x>0,\\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-1}\geqslant 0,\\ x>0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена x^2-x-6 являются числа -2 и 3. Поэтому первое неравенство полученной системы можно переписать в виде $\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-1}\geqslant 0$. Применим метод интервалов:



Множеством решений первого неравенства системы является $[-2;\,1)\cup[3;\,+\infty)$. С учётом неравенства $x>0$ получим множество решений данного неравенства $(0;\,1)\cup[3;\,+\infty)$.

Ответ: $(0;\,1)\cup[3;\,+\infty)$.

Как уже отмечалось, для более детального и подробного знакомства с применением метода интервалов и метода знакотождественных множителей к решению логарифмических неравенств необходимо обратиться к материалам § 1.2 (пример 2) и § 1.6 (примеры 8–15).

Метод введения новой переменной

Основными типами логарифмических неравенств, которые после введения новой переменной сводятся к рациональным алгебраическим неравенствам, являются следующие:

$$a\cdot\log^2_{l(x)}(f(x))+b\cdot\log_{l(x)}(f(x))+c\vee 0$$

(сводится к квадратному неравенству $at^2+bt+c\vee 0$ заменой $t=$ $=\log_{l(x)}(f(x))$) и

$$a\cdot\log_{l(x)}(f(x))+b\cdot\log_{f(x)}(l(x))+c\vee 0.$$

Последнее неравенство сводится к рациональному после применения формулы перехода к новому основанию: $\log_{f(x)}(l(x)) = \dfrac{1}{\log_{l(x)}(f(x))}$. Обозначив $\log_{l(x)}(f(x))$ через t, получим дробно-рациональное неравенство $at + \dfrac{b}{t} + c \vee 0$, откуда $\dfrac{at^2 + ct + b}{t} \vee 0$. Основание логарифмов в таких неравенствах, разумеется, может быть и числом. Логарифмические неравенства, которые можно решать с помощью метода введения новой переменной, конечно же, не исчерпываются указанными типами: например, заменив в рациональном или иррациональном неравенстве переменную на логарифмическое выражение, получим логарифмическое неравенство, которое целесообразно решать с помощью обратной замены. В итоге с помощью метода введения новой переменной можно прийти к одному или нескольким базовым логарифмическим неравенствам либо на определённом шаге решения рационализировать неравенство методом знакотождественных множителей.

Пример 13. Решите неравенство

$$\frac{4\lg(2x-1)-1}{\lg(2x-1)-1} \leqslant 1.$$

Решение. Обозначим $\lg(2x-1)$ через t. Получим неравенство $\dfrac{4t-1}{t-1} \leqslant 1$, откуда $\dfrac{4t-1-t+1}{t-1} \leqslant 0$, т. е. $\dfrac{3t}{t-1} \leqslant 0$. Множеством решений полученного неравенства является промежуток $[0; 1)$. Таким образом,

$$\begin{cases} t \geqslant 0, \\ t < 1. \end{cases}$$

Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} \lg(2x-1) \geqslant 0, \\ \lg(2x-1) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geqslant 1, \\ 2x-1 < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x < 5{,}5. \end{cases}$$

Ответ: $[1; 5{,}5)$.

Замечание. Обратим внимание на то, что, получив неравенство $\dfrac{3t}{t-1} \leqslant 0$, или $\dfrac{t}{t-1} \leqslant 0$, можно было бы сразу вернуться к прежней переменной и применить метод знакотождественных множителей:

$$\frac{\lg(2x-1)}{\lg(2x-1)-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\lg(2x-1)}{\lg(2x-1)-\lg 10} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-1-1}{2x-1-10} \leqslant 0, \\ x > 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2(x-1)}{2x-11} \leqslant 0, \\ x > 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x < 5{,}5, \\ x > 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leqslant x < 5{,}5.$$

Какой вариант решения выбрать, зависит от предпочтений решающего, главное — получить правильный ответ.

Пример 14. Решите неравенство

$$\log_{0,2}^2(24-2x-x^2)-6\log_{25}(24-2x-x^2)+2\geqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Сначала перейдём к основанию 5 в каждом из логарифмов:

$$\log_{0,2}^2(24-2x-x^2)=(-\log_5(24-2x-x^2))^2=(\log_5(24-2x-x^2))^2;$$

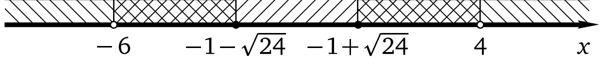
$$\log_{25}(24-2x-x^2)=0{,}5\log_5(24-2x-x^2).$$

Теперь обозначим $\log_5(24-2x-x^2)$ через t. Неравенство примет вид $t^2-3t+2\geqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части полученного неравенства являются числа 1 и 2, поэтому $\left[\begin{array}{l} t\geqslant 2,\\ t\leqslant 1.\end{array}\right.$ Сделав обратную замену, получим

$$\left[\begin{array}{l}\log_5(24-2x-x^2)\geqslant 2,\\ \log_5(24-2x-x^2)\leqslant 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}24-2x-x^2\geqslant 25,\\ \left\{\begin{array}{l}24-2x-x^2\leqslant 1,\\ 24-2x-x^2>0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x+1)^2\leqslant 0,\\ \left\{\begin{array}{l}x^2+2x-23\geqslant 0,\\ x^2+2x-24<0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ \left\{\begin{array}{l}x^2+2x-23\geqslant 0,\\ x^2+2x-24<0.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

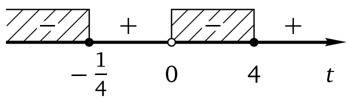
Корнями квадратного трёхчлена $x^2+2x-23$ являются числа $-1-\sqrt{24}$ и $-1+\sqrt{24}$, старший коэффициент трёхчлена положителен, поэтому множеством решений неравенства $x^2+2x-23\geqslant 0$ является объединение $(-\infty;-1-\sqrt{24}\,]\cup[-1+\sqrt{24};+\infty)$. Корнями квадратного трёхчлена $x^2+2x-24$ являются числа -6 и 4, старший коэффициент трёхчлена положителен, поэтому множеством решений неравенства $x^2+2x-24<0$ является $(-6;4)$. Имеем $4<\sqrt{24}<5$, поэтому $5<\sqrt{24}+1<6$, а $3<\sqrt{24}-1<4$. Значит, $-6<-1-\sqrt{24}<-5$, и множеством решений системы неравенств в последней совокупности является объединение $(-6;-1-\sqrt{24}]\cup[-1+\sqrt{24};4)$:



Ответ: $(-6;-1-\sqrt{24}]\cup\{-1\}\cup[-1+\sqrt{24};4)$.

Пример 15. Решите неравенство $\log_4 x - \log_x 4 \leqslant \frac{15}{4}$.

Р е ш е н и е. Обозначим $\log_4 x$ через t. Тогда $\log_x 4 = \frac{1}{\log_4 x} = \frac{1}{t}$. Неравенство примет вид $t - \frac{1}{t} - \frac{15}{4} \leqslant 0$, откуда $\frac{4t^2 - 15t - 4}{t} \leqslant 0$. Корнями квадратного трёхчлена $4t^2 - 15t - 4$ являются числа $-\frac{1}{4}$ и 4, поэтому неравенство можно переписать в виде $\frac{4(t+\frac{1}{4})(t-4)}{t} \leqslant 0$. Применим метод интервалов:



Получим

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t > 0, \\ t \leqslant 4, \end{cases} \\ t \leqslant -\frac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_4 x > 0, \\ \log_4 x \leqslant 4, \end{cases} \\ \log_4 x \leqslant -\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1, \\ x \leqslant 256, \end{cases} \\ 0 < x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup (1; 256]$.

В заключение рассмотрим пример, в котором замену переменной приходится делать дважды.

Пример 16. Решите неравенство

$$\frac{45}{(\log_2^2 x - 2\log_2 x)^2} - \frac{18}{\log_2^2 x - 2\log_2 x} + 1 < 0.$$

Р е ш е н и е. Пусть $t = \log_2^2 x - 2\log_2 x$. Неравенство примет вид $\frac{45}{t^2} - \frac{18}{t} + 1 < 0$, откуда

$$\begin{cases} t^2 - 18t + 45 < 0, \\ t \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t^2 - 18t + 45 < 0$$

(ясно, что $t = 0$ не является решением первого неравенства системы, поэтому её второе неравенство можно опустить). Корнями квадратного трёхчлена в левой части последнего неравенства являются числа 3 и 15, поэтому $\begin{cases} t>3, \\ t<15. \end{cases}$ Сделаем обратную замену:

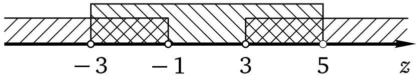
$$\begin{cases} \log_2^2 x - 2\log_2 x > 3, \\ \log_2^2 x - 2\log_2 x < 15, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 > 0, \\ \log_2^2 x - 2\log_2 x - 15 < 0. \end{cases}$$

Пусть $\log_2 x = z$. Система примет вид

$$\begin{cases} z^2 - 2z - 3 > 0, \\ z^2 - 2z - 15 < 0. \end{cases}$$

Корнями квадратного трёхчлена в левой части первого неравенства системы являются числа -1 и 3. Корнями квадратного трёхчлена в левой части второго неравенства системы являются числа -3 и 5. Поэтому

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} z < -1, \\ z > 3, \end{array}\right. \\ z > -3, \\ z < 5, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \left[\begin{array}{l} -3 < z < -1, \\ 3 < z < 5. \end{array}\right.$$



Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} -3 < \log_2 x < -1, \\ 3 < \log_2 x < 5 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \frac{1}{8} < x < \frac{1}{2}, \\ 8 < x < 32. \end{array}\right.$$

Ответ: $(0{,}125; 0{,}5) \cup (8; 32)$.

Исследование ОДЗ неравенства

В случае логарифмических неравенств исследование ОДЗ неравенства иногда позволяет найти множество его решений. Такие задачи не слишком распространены, возможно, отчасти потому, что ОДЗ логарифмического выражения задаётся строгими неравенствами и в большинстве подобных задач сама является множеством решений неравенства.

Пример 17. Решите неравенство $\lg(x-5) + \ln(6-x) \leqslant \pi$.

Решение. Левая часть неравенства определена при $5<x<6$. Поскольку $x<6$, получаем, что $\lg(x-5)<0$. Поскольку $x>5$, получаем, что $\ln(6-x)<0$. Значит, левая часть неравенства отрицательна при всех допустимых значениях переменной, и неравенство выполняется для всех $x \in (5; 6)$.

Ответ: $(5; 6)$.

Пример 18. Решите неравенство

$$\log_2(x-3)+\log_3(20-x)+\sqrt[6]{x-6}+\sqrt[10]{10-x}>3.$$

Решение. Левая часть неравенства определена при $6\leqslant x\leqslant 10$. Поскольку $x\geqslant 6$, получаем, что $\log_2(x-3)>\log_2 3>1$. Поскольку $x\leqslant 10$, получаем, что $\log_3(20-x)\geqslant\log_3 10>2$. Поскольку при всех $x\in[6;10]$ выполнены неравенства $\sqrt[6]{x-6}\geqslant 0$ и $\sqrt[10]{10-x}\geqslant 0$, получаем, что левая часть неравенства больше 3 при всех допустимых значениях переменной, и множеством решений неравенства является его ОДЗ.

Ответ: $[6; 10]$.

Применение свойств функций

Перейдём к примерам применения свойств монотонности и ограниченности функций к решению показательных неравенств.

Пример 19. Решите неравенство $\sqrt[5]{x^3+5}>\log_5(8-x)+1$

Решение. Перебирая небольшие по модулю целые числа, довольно быстро можно установить, что левая и правая части данного неравенства равны при $x=3$. Функция $f(x)=\sqrt[5]{x^3+5}$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, а функция $g(x)=\log_5(8-x)+1$ монотонно убывает на всей области определения. Поэтому неравенство $f(x)>g(x)$ выполняется, если $x>3$ и $x\in D(g)$, где $D(g)$ — область определения функции $y=g(x)$. Таким образом, $\begin{cases} x>3, \\ 8-x>0, \end{cases}$ откуда $3<x<8$.

Ответ: $(3; 8)$.

Пример 20. Решите неравенство

$$6^{5x-4}+\log_5(5x-2)\leqslant 6^{x+4}+\log_5(x+6).$$

Решение. Обратим внимание на «похожесть» левой и правой частей неравенства. Рассмотрим функцию $f(t)=6^t+\log_5(t+2)$, монотонно возрастающую на всей области определения. В силу возрастания функции $y=f(t)$ неравенство $f(\alpha)\leqslant f(\beta)$ будет выполняться при допустимых α и β в том и только том случае, если $\alpha\leqslant\beta$. В нашем случае $\alpha=5x-4$, $\beta=x+4$. Таким образом,

$$\begin{cases} 5x-4\leqslant x+4, \\ 5x-2>0, \\ x+6>0, \end{cases}$$

откуда $0{,}4<x\leqslant 2$.

Ответ: $(0{,}4; 2]$.

Пример 21. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x^3-5x^2+4x}}{\sqrt{4-x}+\log^2_{5x+1}(x^3-5x^2+4x+1)} \geqslant 1.$$

Решение. Левая часть данного неравенства определена, если

$$\begin{cases} \sqrt{4-x}+\log^2_{5x+1}(x^3-5x^2+4x+1) \neq 0, \\ 5x+1 \neq 1, \\ 5x+1 > 0, \\ 4-x \geqslant 0, \\ x^3-5x^2+4x \geqslant 0. \end{cases}$$

При этих условиях знаменатель дроби в левой части данного неравенства положителен и неравенство можно переписать в виде

$$\sqrt{4-x}-\sqrt{x^3-5x^2+4x} \geqslant \sqrt{4-x}+\log^2_{5x+1}(x^3-5x^2+4x+1),$$

откуда

$$\log^2_{5x+1}(x^3-5x^2+4x+1)+\sqrt{x^3-5x^2+4x} \leqslant 0.$$

Сумма двух неотрицательных слагаемых обращается в нуль, только если каждое из них равно нулю. Если $x^3-5x^2+4x=0$, то при значениях переменной, удовлетворяющих неравенствам системы, получаем, что

$$\log^2_{5x+1}(x^3-5x^2+4x+1) = \log^2_{5x+1} 1 = 0.$$

Найдём корни уравнения $x^3-5x^2+4x=0$, переписав его в виде

$$x(x^2-5x+4) = 0,$$

откуда $x=0$ либо $x^2-5x+4=0$. Корнями последнего уравнения являются $x=1$ и $x=4$. Но $x=4$ не удовлетворяет первому неравенству системы, а $x=0$ — её второму неравенству. Корень $x=1$ удовлетворяет всем неравенствам системы и является единственным решением данного неравенства.

Ответ: $\{1\}$.

Пример 22. Решите неравенство $\log_2(x-4)\cdot\log_2(12-x) \geqslant 4$.

Решение. Левая часть данного неравенства определена, если $4<x<12$. Если $x\in(4;5]$, то $\log_2(x-4)\leqslant 0$, а $\log_2(12-x)>0$ и данное неравенство не имеет решений. Аналогично если $x\in[11;12)$, то $\log_2(x-4)>0$, а $\log_2(12-x)\leqslant 0$ и данное неравенство не имеет решений. Пусть $5<x<11$. Тогда $\log_2(x-4)>0$ и $\log_2(12-x)>0$. В этом случае $\sqrt{\log_2(x-4)\cdot\log_2(12-x)} \geqslant 2$. Но $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ (это неравенство легко получить из очевидного неравенства $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$, раскрыв скобки и выполнив элементарные преобразования; напомним, что оно называется неравенством Коши для среднего арифметического и среднего геометрического двух неотрицательных чисел и обращается в равенство, только если числа равны). Поэтому

$$\sqrt{\log_2(x-4)\cdot\log_2(12-x)} \leqslant \frac{\log_2(x-4)+\log_2(12-x)}{2} = \frac{\log_2((x-4)(12-x))}{2}.$$

Но

$$\frac{\log_2((x-4)(12-x))}{2} = \frac{\log_2(-48+16x-x^2)}{2} = \frac{\log_2(16-(x-8)^2)}{2} \leqslant \frac{\log_2 16}{2} = 2.$$

Таким образом,

$$\sqrt{\log_2(x-4)\cdot\log_2(12-x)} \geqslant 2$$

и

$$\sqrt{\log_2(x-4)\cdot\log_2(12-x)} \leqslant 2,$$

что возможно, лишь если $\sqrt{\log_2(x-4)\cdot\log_2(12-x)}=2$, т. е. при $x=8$.

Ответ: $\{8\}$.

Упражнения к § 8.2

Решите неравенство (систему неравенств).

1. а) $\log_{0,5}\dfrac{x+2}{x+9}\leqslant 0$; **б)** $\log_{0,2}\dfrac{x+3}{x+8}\leqslant 0$.

2. а) $\log_{\frac{\pi}{2}}\dfrac{-13-4x}{x+6}>0$; **б)** $\log_{\frac{\pi}{3}}\dfrac{7-4x}{x+5}>0$;

3. а) $(\log_9 2-\log_5 2)\log_3(x-18)>0$; **б)** $(\log_7 9-\log_6 9)\log_3(x-13)>0$.

4. а) $\log_2 x+\log_2(x+6)\leqslant 4$; **б)** $\log_3 x+\log_3(x-6)\leqslant 3$.

5. а) $\log^2_{2|x|}(4x^2)+\log_2(8x^2)\leqslant 9$; **б)** $\log^2_{5|x|}(25x^2)+\log_5(25x^2)\leqslant 8$.

6. а) $\log_{27}\dfrac{2x^2+3x-5}{x+1}\leqslant\dfrac{1}{3}$; **б)** $\log_9\dfrac{2x^2+15x+22}{x+4}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

7. а) $\log_3(x+2)+\log_3(8-x)\leqslant 1+\log_3(x+4)$;

б) $\log_3(x+3)+\log_3(7-x)\leqslant 1+\log_3(x+5)$.

8. а) $\log_7(4x+11)-\log_7(25-x^2)\geqslant\sin\dfrac{11\pi}{2}$;

б) $\log_2(3x-2)-\log_2(36-x^2)\geqslant\sin\dfrac{15\pi}{2}$.

9. а) $\log_3(x+5)\geqslant\log_{9-x}(9-x)$; **б)** $\log_4(x+8)\geqslant\log_{3-x}(3-x)$.

10. а) $1-\dfrac{1}{\log_{x-4}0{,}2}\leqslant\dfrac{2}{\log_{x+20}25}$; **б)** $1-\dfrac{1}{\log_{x-1}0{,}1}\leqslant\dfrac{2}{\log_{x+17}100}$.

11. а) $\log_4\left(20-\frac{9}{x}\right)+\log_{\frac{1}{4}}\left(5-\frac{x}{4}\right)\geqslant 1$; **б)** $\log_3\left(15-\frac{4}{x}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(5-\frac{x}{3}\right)\geqslant 1$.

12. а) $3^{\log_2 x^2}+2\cdot|x|^{\log_2 9}\leqslant 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)}$;

б) $7^{\log_5 x^2}+6\cdot|x|^{\log_5 49}\leqslant 7\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{0,2}(3x+4)}$.

13. а) $\log_2(\log_2(7x^2-6x))\leqslant 2$; **б)** $\log_3(\log_3(4x^2-3x))\leqslant 1$.

14. а) $\log_5\left(\log_3\left(\frac{2x+1}{x}\right)\right)\geqslant 0$; **б)** $\log_3\left(\log_5\left(\frac{3x+2}{x}\right)\right)\geqslant 0$.

15. а) $\log_5(\log_4(\log_3(2x+1)))\leqslant 0$; **б)** $\log_2(\log_3(\log_4(5x+6)))\leqslant 0$.

16. а) $\log_{0,5}\left(\log_4\left(\log_3\left(\frac{5x+1}{x-15}\right)\right)\right)\geqslant 0$; **б)** $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_5\left(\log_2\left(\frac{7x-3}{x-4}\right)\right)\right)\geqslant 0$.

17. а) $\log_3(\log_2(\log_2(\log_2(x+3)^2)))\leqslant 0$; **б)** $\log_2(\log_2(\log_2(\log_3(x+2)^2)))\leqslant 0$.

18. а) $11\log_{11}(x^2+x-20)\leqslant 12+\log_{11}\frac{(x+5)^{11}}{x-4}$;

б) $13\log_{13}(x^2-x-6)\leqslant 14+\log_{13}\frac{(x+2)^{13}}{x-3}$.

19. а) $\frac{2x^2-5x+2}{\log_{11}(x+2)}\leqslant 0$; **б)** $\frac{2x^2-11x+5}{\log_{13}(x+3)}\leqslant 0$.

20. а) $\frac{\log_3(8x^2-11x+4)}{\log_3 x}<2$; **б)** $\frac{\log_5(7x^2-10x+4)}{\log_5 x}>2$.

21. а) $\frac{2\log_5(x^2-5x)}{\log_5 x^2}\leqslant 1$; **б)** $\frac{2\log_9(x^2+4x)}{\log_9 x^2}\leqslant 1$.

22. а) $(8-x)(x+4)\log_{0,3}(x-1)\geqslant 0$; **б)** $(5-x)(x+9)\log_{0,7}(x+4)\geqslant 0$.

23. а) $\log_x(4-x)\cdot\log_x(x+1)\geqslant 0$; **б)** $\log_{x-1}(5-x)\cdot\log_{x-1}x\geqslant 0$.

24. а) $\log_{3-x}(x+1)\cdot\log_{x+2}(4-x)\leqslant 0$; **б)** $\log_{1-x}(x+3)\cdot\log_{x+4}(2-x)\leqslant 0$;

25. а) $\frac{(2x^2-15x+28)\log_7(x-3)}{x^2-11x+30}\leqslant 0$; **б)** $\frac{(2x^2-19x+45)\log_7(x-4)}{x^2-13x+42}\leqslant 0$.

26. а) $(x^2+3x+2)\cdot\log_{x+3}(x+2)\cdot\log_3(x-1)^2\leqslant 0$;

б) $(x^2+7x+12)\cdot\log_{x+5}(x+4)\cdot\log_5(x+1)^2\leqslant 0$.

27. а) $\frac{(x^2+9x+20)\cdot\log_{x+6}(x+5)\cdot\lg(x+2)^2}{2x^2+21x+54}\leqslant 0$;

б) $\frac{(x^2-7x+12)\cdot\log_{x-2}(x-3)\cdot\ln(x-6)^2}{2x^2-11x+14}\leqslant 0$.

28. а) $(x-3)\left(\log_6(x^2+3x-4)+\log_{0,2}(20-5x)+\frac{1}{\log_{4-x}5}+x+1\right)\geqslant x^2-x-6$;

б) $(x-4)\left(\log_5(125-25x)-\log_6(x^2+x-6)+\frac{1}{\log_{5-x}0{,}2}+x+6\right)\leqslant x^2+2x-24$.

29. а) $\log_{5x}(x^2-14x+48)<1$; **б)** $\log_{7x}(x^2-13x+36)<1$.

30. а) $2^{\lg(\cos(-8\pi))}\geqslant\log_{x^2}(2x^2-6x+9)$; **б)** $4^{\ln(\cos(-6\pi))}\geqslant\log_{x^2}(2x^2-10x+25)$.

31. а) $\log_{12-x}(x^2-2x-8)\leqslant 1$; **б)** $\log_{9-x}(x^2+4x-5)\leqslant 1$.

32. а) $\log_{x+2}(7x^2+11x-6)<2$; **б)** $\log_{x+1}(6x^2+x-5)<2$.

33. а) $\log_{(x-1)^2}(x-2)^2\leqslant 1$; **б)** $\log_{(x-2)^2}(x-3)^2\leqslant 1$.

34. а) $\log_{x+5}(4x^2-5x+1)\leqslant \log_{\frac{10x+41}{10x+43}} 1$; **б)** $\log_{x+6}(5x^2-6x+1)\leqslant \log_{\frac{10x+57}{10x+59}} 1$.

35. а) $\log_{x+2}(x^2-5x+1)\leqslant \log_{\frac{4x+5}{5x+6}} 1$; **б)** $\log_{x+3}(x^2-3x+1)\leqslant \log_{\frac{2x+5}{3x+7}} 1$.

36. а) $\log_{6x^2-x-1}(2x^2-5x+3)\leqslant 0$; **б)** $\log_{12x^2-5x-2}(6x^2-11x+4)\leqslant 0$.

37. а) $\log_{20x^2-11x-3}(12x^2-19x+5)\geqslant 0$; **б)** $\log_{20x^2-11x-3}(20x^2-29x+6)\geqslant 0$.

38. а) $\log_{2x+4}(2x-3)^2\leqslant 2\log_{2x+4}(x+2)$; **б)** $\log_{2x+2}(2x-5)^2\leqslant 2\log_{2x+2}(x+1)$.

39. а) $\log_{6-8x^2}(36-64x^4)\leqslant 2+\dfrac{1}{\log_2(6-8x^2)}$;

б) $\log_{3-9x^2}(9-81x^4)\leqslant 2+\dfrac{1}{\log_2(3-9x^2)}$.

40. а) $\log_{x+3}6+\log_{-13-6x}6\leqslant 0$; **б)** $\log_{x-2}3+\log_{31-12x}3\leqslant 0$.

41. а) $\log_x(x+4)\cdot\log_{x+4}(x+8)\cdot\log_{x+8}(x+12)\leqslant 2$;

б) $\log_x(x+10)\cdot\log_{x+10}(x+20)\cdot\log_{x+20}(x+30)\leqslant 2$.

42. а) $\log_{5x+7}(\log_{7-x}(x+3))\geqslant 0$; **б)** $\log_{5x+12}(\log_{6-x}(x+4))\geqslant 0$.

43. а) $\log_2^2 x>16$; **б)** $\log_3^2 x>9$.

44. а) $\log_{25}^2 x^2\leqslant 1$; **б)** $\log_2^2 x^2\leqslant 4$.

45. а) $||\log_2 x-1|-4|<2$; **б)** $||\log_2 x+1|-2|<1$.

46. а) $\dfrac{2}{\log_6 x+1}\leqslant 1$; **б)** $\dfrac{4}{\log_2 x+1}\leqslant 1$.

47. а) $\dfrac{4\lg x-3}{\lg x-1}<3$; **б)** $\dfrac{3\lg x-4}{\lg x-1}>4$.

48. а) $\dfrac{5\lg^2 x-1}{\lg^2 x-1}\geqslant 1$; **б)** $\dfrac{3\lg^2 x-8}{\lg^2 x-4}\geqslant 2$.

49. а) $4\log_x 2-1\leqslant\dfrac{9}{4\log_x 2-1}$; **б)** $3\log_x 3-1\leqslant\dfrac{4}{3\log_x 3-1}$.

50. а) $\dfrac{\log_3 x-1}{\log_3 x-3}\leqslant 1+\dfrac{1}{\log_3 x-2}$; **б)** $\dfrac{\log_3 x}{\log_3 x-2}\leqslant 1+\dfrac{1}{\log_3 x-1}$.

51. а) $\dfrac{3\log_x 3-2}{2\log_x 3-1}\geqslant\dfrac{5\log_x 3-3}{3\log_x 3-1}$; **б)** $\dfrac{4-7\log_x 2}{2\log_x 2-1}\leqslant\dfrac{5-11\log_x 2}{3\log_x 2-1}$.

52. а) $2\log_4^2(x+4)-5\log_4(x+4)+2\leqslant 0$; **б)** $2\log_9^2(x+7)-3\log_9(x+7)+1\leqslant 0$.

53. а) $\log_7^2(49-x^2)-3\log_7(49-x^2)+2\geqslant 0$;

б) $\log_9^2(729-x^2)-5\log_9(729-x^2)+6\geqslant 0$.

54. а) $(\log_5^2 x+1)^2+3\leqslant 7\log_5^2 x$; **б)** $(\log_3^2 x-2)^2+5\leqslant 6\log_3^2 x$.

55. **а)** $\log_{0,5}^2(8+2x-x^2)-7\log_2(8+2x-x^2)<-12$;

б) $\log_2^2(4+3x-x^2)+6\log_{0,5}(4+3x-x^2)<-8$.

56. **а)** $\log_2^2(4+3x-x^2)+7\log_{0,5}(4+3x-x^2)+10>0$;

б) $\log_5^2(5+4x-x^2)+4\log_{0,2}(5+4x-x^2)+3>0$.

57. **а)** $\log_9 x-\log_x 9\geqslant\dfrac{3}{2}$; **б)** $\log_8 x-\log_x 8\geqslant\dfrac{8}{3}$.

58. **а)** $\log_8 x+\log_x 8\geqslant\dfrac{10}{3}$; **б)** $\log_{25} x+\log_x 25\geqslant\dfrac{5}{2}$.

59. **а)** $\dfrac{25}{\log_2^4 x}-\dfrac{26}{\log_2^2 x}+1\leqslant 0$; **б)** $\dfrac{9}{\log_3^4 x}-\dfrac{10}{\log_3^2 x}+1\leqslant 0$.

60. **а)** $(\log_2^2 x-2\log_2 x)^2+36\log_2 x+45<18\log_2^2 x$;

б) $(\log_2^2 x+3\log_2 x)^2<2\log_2^2 x+6\log_2 x+8$.

61. **а)** $\dfrac{12}{(\lg^2 x+4\lg x)^2}+\dfrac{7}{\lg^2 x+4\lg x}+1\geqslant 0$;

б) $\dfrac{45}{(\log_2^2 x+6\log_2 x)^2}+\dfrac{14}{\log_2^2 x+6\log_2 x}+1\geqslant 0$.

62. **а)** $\dfrac{3\lg(x+2)+1}{\lg^2(x+2)+\lg(x+2)}\geqslant 1+\log_{x+2}10$;

б) $\dfrac{4\log_5(x-2)+1}{\log_5^2(x-2)+\log_5(x-2)}\geqslant 1+\log_{x-2}5$.

63. **а)** $\dfrac{1}{4+\log_2 x}+\dfrac{2}{\log_2(2x)}\left(\dfrac{3}{4+\log_2 x}-1\right)\leqslant 0$;

б) $\dfrac{3}{5+\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_2(4x)}\left(\dfrac{3}{5+\log_2 x}-1\right)\geqslant 0$.

64. **а)** $\dfrac{\lg^2 x+\lg x-1}{\lg x}+\dfrac{7\lg^2 x-7\lg x+2}{\lg(0,1x)}\leqslant 8\lg x+1$;

б) $\dfrac{\lg^2 x+\lg x-4}{\lg(0,1x)}+\dfrac{6\lg^2 x-24\lg x+5}{\lg x-4}\leqslant 7\lg x+2$.

65. **а)** $\dfrac{\log_{1-2x}((x+1)(1-4x+4x^2))}{\log_{x+1}(1-2x)}\leqslant -1$; **б)** $\dfrac{\log_{1-x}((3x+1)(1-2x+x^2))}{\log_{3x+1}(1-x)}\leqslant -1$.

66. **а)** $\dfrac{\log_{0,2x}(10x^{-1})\cdot\log_{0,2x}(0,08x^2)}{\log_{0,4x}(0,2x)\cdot\log_{50x^{-2}}(0,2x)}<40$; **б)** $\dfrac{\log_{0,5x}(4x^{-1})\cdot\log_{0,5x}(0,5x^2)}{\log_{x}(0,5x)\cdot\log_{8x^{-2}}(0,5x)}<40$.

67. **а)** $(6\log_2^5 x+5\log_2^3 x-4\log_2 x-3)(6\log_2^5 x+4\log_2^3 x+5\log_2^2 x+\log_2 x-3)\leqslant$ $\leqslant(6\log_2^5 x+5\log_2^3 x-5\log_2 x-3)(6\log_2^5 x+4\log_2^3 x+5\log_2^2 x+2\log_2 x-3)$;

б) $(7\log_2^6 x+4\log_2^3 x-3\log_2^2 x+2\log_2 x-4)(7\log_2^6 x+3\log_2^3 x+2\log_2^2 x-$ $-3\log_2 x-4)\geqslant(7\log_2^6 x+4\log_2^3 x-3\log_2^2 x+\log_2 x-4)(7\log_2^6 x+$ $+3\log_2^3 x+2\log_2^2 x-2\log_2 x-4)$.

68. а) $\begin{cases} 2^x+16\cdot 2^{-x}\geqslant 17, \\ 2\log_9(4x^2+1)\leqslant \log_3(3x^2+4x+1); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4^x+16\cdot 4^{-x}\geqslant 17, \\ 2\log_{36}(16x^2+1)\leqslant \log_6(12x^2+8x+1). \end{cases}$

69. а) $\begin{cases} 4^x-12\cdot 2^x+32\geqslant 0, \\ \log_{\frac{2x^2-7x+6}{x-6}}(x-1)\geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4^x-6\cdot 2^x+8\geqslant 0, \\ \log_{\frac{2x^2-3x+1}{x-5}} x\geqslant 0. \end{cases}$

70. а) $\begin{cases} \dfrac{5-4^{-x-1}}{1-2^{-x-4}}\geqslant 5, \\ \log_{0,25(x-2)^2}\left(\dfrac{x+4}{4}\right)\leqslant 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{320-4^{-x-1}}{128-2^{-x}}\geqslant 2{,}5, \\ \log_{0,25(x+1)^2}\left(\dfrac{x+7}{4}\right)\leqslant 1. \end{cases}$

71. а) $\begin{cases} 25^x-26\cdot 5^x+25\geqslant 0, \\ (2x^2-9x+10)\log_5(x+1)\geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5\cdot 25^x-26\cdot 5^x+5\geqslant 0, \\ (2x^2-5x+3)\log_7(x+2)\geqslant 0. \end{cases}$

72. а) $\begin{cases} \log_{3-x}\dfrac{x+4}{(x-3)^2}\geqslant -2, \\ x^3+6x^2+\dfrac{21x^2+3x-12}{x-4}\leqslant 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_{7-x}\dfrac{x+3}{(x-7)^8}\geqslant -8, \\ x^3+6x^2+\dfrac{40x^2+3x-24}{x-8}\leqslant 3. \end{cases}$

73. а) $\begin{cases} \log_{7-x}(14+5x-x^2)\leqslant 1, \\ x-5-\dfrac{11x+12}{x^2+2x}\geqslant -\dfrac{5}{x+2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_{4-x}(28-3x-x^2)\leqslant 1, \\ x+7+\dfrac{14x-24}{x^2-4x+3}\geqslant \dfrac{5}{x-1}. \end{cases}$

74. а) $\begin{cases} 4^{x+1}-33\cdot 2^x+8\leqslant 0, \\ 2\log_2\dfrac{x-1}{x+1{,}2}+\log_2(x+1{,}2)^2\geqslant 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4^{x+1}-18\cdot 2^{x+2}+128\leqslant 0, \\ 2\log_3\dfrac{x-2}{x-3{,}3}+\log_3(x-3{,}3)^2\geqslant 0. \end{cases}$

75. а) $\begin{cases} 9^{\log_4 x}+x^{2\log_4 3}\geqslant 6, \\ \log_2^2 x+6>5\log_2 x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 25^{\log_4 x}+x^{2\log_4 5}\geqslant 10, \\ \log_3^2 x+8>6\log_3 x. \end{cases}$

76. а) $\begin{cases} \dfrac{9\cdot 2^x-24}{2^x-4}\geqslant 2^x+4, \\ \log_8(x+1)\geqslant \dfrac{\log_8(x+1)}{\log_2(x+1)-1}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{9\cdot 2^{x-1}-6}{2^x-2}\geqslant 2^x+2, \\ \log_4(x+2)\geqslant \dfrac{\log_4(x+2)}{\log_2(x+2)-1}. \end{cases}$

77. а) $\begin{cases} \log_{7-x}\dfrac{1-x}{x-7}\leqslant -1, \\ \dfrac{x^2-4x+3}{x-2}+\dfrac{4x-22}{x-7}\leqslant x+2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_{-1-x}\dfrac{-4-x}{x+1}\leqslant -1, \\ \dfrac{x^2+6x+7}{x+2}+\dfrac{2-6x}{x}\leqslant x-2. \end{cases}$

78. а) $\begin{cases} \log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leqslant 0, \\ 4^{x^2+x-3}-0{,}5^{2x^2-6x-2}\leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_{3-x}(x+3)\cdot\log_{x+4}(5-x)\leqslant 0, \\ 16^{x^2-5x+5}-0{,}25^{2x^2+8x-30}\leqslant 0. \end{cases}$

79. а) $\begin{cases} 4^{x-\frac{1}{2}}-17\cdot 2^{x-2}+2\leqslant 0, \\ \log_{3x-5}(2x^2-9x+10)\geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9^{x-\frac{3}{2}}-82\cdot 3^{x-3}+3\leqslant 0, \\ \log_{3x-8}(2x^2-13x+21)\geqslant 0. \end{cases}$

80. а) $\begin{cases} \log_{6-x}(8x^2-x^3-12x) \geqslant 1+\log_{6-x} x, \\ \dfrac{x^2-4x-1}{x-4}+\dfrac{3}{x-6} \leqslant x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_{9-x}(10x^2-9x-x^3) \geqslant 1+\log_{9-x} x, \\ \dfrac{x^2-5x-3}{x-5}+\dfrac{7}{x-9} \leqslant x. \end{cases}$

81. а) $\begin{cases} 25^{x-\frac{1}{2}}-26\cdot 5^{x-1}+5 \geqslant 0, \\ x\cdot\log_5(3+x-x^2) \geqslant 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 81^{x+\frac{1}{2}}-10\cdot 9^x+1 \geqslant 0, \\ x\cdot\log_8(5+3x-x^2) \leqslant 0. \end{cases}$

82. а) $\begin{cases} 1+\log_{5-x}(x^2+9x+20) \geqslant \log_{5-x}(25-x^2), \\ x^3+7x^2+\dfrac{x^3+43x^2+2x-14}{x-7} \leqslant 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1+\log_{4-x}(x^2+10x+24) \geqslant \log_{4-x}(16-x^2), \\ x^3+8x^2+\dfrac{x^3+35x^2+x-5}{x-5} \leqslant 1. \end{cases}$

83. а) $\lg(x-15)+\ln(16-x) \leqslant 0{,}3$; **б)** $\lg(x-25)+\ln(26-x) \leqslant 0{,}2$.

84. а) $\sqrt[3]{x^5+32} > \log_3(11-x)+2$; **б)** $\sqrt[3]{x^3+37} > \log_2(5-x)+3$.

85. а) $11^{10x-12}+\log_{11}(10x-9) \leqslant 11^{x+6}+\log_{11}(x+9)$;

б) $13^{10x-9}+\log_{13}(10x-7) \leqslant 13^{x+9}+\log_{13}(x+11)$.

86. а) $\log_2(x-6)\cdot\log_2(14-x) \geqslant 4$; **б)** $\log_2(x-8)\cdot\log_2(16-x) \geqslant 4$.

87. а) $\begin{cases} \sqrt{x^2-4}+\log_3(x^2-1) \leqslant 1, \\ 5^x+6^x \leqslant 0{,}08; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \sqrt{x^2-9}+\log_2(x^2-5) \leqslant 2, \\ 3^x+4^x \geqslant 0{,}08. \end{cases}$

88. а) $\begin{cases} \log_7(x^2-9) \leqslant 1, \\ \dfrac{2x^2+x-28}{6^{x-6}+5^{x-5}-2} \leqslant 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \log_5(x^2-4) \leqslant 1, \\ \dfrac{2x^2+x-15}{7^{x-7}+8^{x-8}-2} \leqslant 0. \end{cases}$

Диагностическая работа 14

Вариант 1

Решите неравенство (систему неравенств).

1. $\log_{0,2}\dfrac{6x}{x+4} \geqslant -1$.

2. $\dfrac{3}{\log_5 x+1} \geqslant 1$.

3. $\log_4 x-\log_x 4 \geqslant 1{,}5$.

4. $\log_5^2(5+12x-x^2)+3\log_{0,2}(5+12x-x^2)+2<0$.

5. $\log_{|x-2|}(x-3)^2 \leqslant 2$.

6. $\log_{4x}(x^2-10x+24)>1$.

7. $(32+12x-9x^2)\log_{0,11}(3x-1) \geqslant 0$.

8. $\log_{x+6}(-2-x)\cdot\log_{x+6}(x+7) \geqslant 0$.

9. $\begin{cases} \log_{8-x} \dfrac{(x-8)^{10}}{x-1} \geqslant 10, \\ \dfrac{x^2-9x+15}{x-2} + \dfrac{x^2-7x+4}{x-7} \leqslant 2x-7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3^x + \dfrac{54}{3^x} \geqslant 29, \\ \log_{x+3}\left(\dfrac{x+1}{4}\right) \leqslant 0. \end{cases}$

11. $\log_5(x-5)+\log_6(60-x)+\sqrt[4]{x-10}+\sqrt[14]{24-x}>3.$

12. $\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x^3-5x^2+6x}}{\sqrt{3-x}+\log^2_{4x+1}(x^3-5x^2+6x+1)} \geqslant 1.$

Вариант 2

Решите неравенство (систему неравенств).

1. $\log_{0,5}\dfrac{3x}{x+3} \geqslant -1.$

2. $\dfrac{2}{\lg x+1} \geqslant 1.$

3. $\log_8 x - \log_x 8 \geqslant \dfrac{8}{3}.$

4. $\log^2_2(2+7x-x^2)+4\log_{0,5}(2+7x-x^2)+3<0.$

5. $\log_{|x-1|}(x-2)^2 \leqslant 2.$

6. $\log_{6x}(x^2-9x+14)>1.$

7. $(9-4x-5x^2)\log_{0,13}(5x+4) \geqslant 0.$

8. $\log_{x-6}(10-x)\cdot\log_{x-6}(x-5) \geqslant 0.$

9. $\begin{cases} \log_{3-x} \dfrac{(x-3)^4}{x} \geqslant 4, \\ \dfrac{x^2-12x+10}{x-1} + \dfrac{x^2-5x+5}{x-5} \leqslant 2x-11. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2^x + \dfrac{80}{2^x} \geqslant 21, \\ \log_{x-1}\left(\dfrac{x+1}{5}\right) \leqslant 0. \end{cases}$

11. $\log_2(x-4)+\log_5(30-x)+\sqrt[8]{x-20}+\sqrt[18]{25-x}>5.$

12. $\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x^3-6x^2+5x}}{\sqrt{5-x}+\log^2_{6x+1}(x^3-6x^2+5x+1)} \geqslant 1.$

Ответы

Глава 1

Упражнения к § 1.1

1. а) 6; **б)** 8. **2. а)** 6; **б)** 8. **3. а)** 8; **б)** 11. **4. а)** 5; **б)** 6. **5. а)** 3; **б)** 6. **6. а)** 6:5 в пользу «Циркуля»; **б)** 9:6 в пользу «Угольника». **7. а)** 6; **б)** 7. **8. а)** 5; **б)** 6. **9. а)** 5; **б)** 6. **10. а)** 7; **б)** 4. **11. а)** 5; **б)** 6. **12. а)** $(7; 11)$; **б)** $(-8; 11)$. **13. а)** -17; **б)** -18. **14. а)** $-7; 4; 5$; **б)** $-6; -5; 6$. **15. а)** 12; 23; 24; **б)** -18; $-17; -13$. **16. а)** 2; 3; 5; **б)** 3; 5. **17. а)** 5; **б)** 4. **18. а)** 2; **б)** 3. **19. а)** 3; **б)** 2. **20. а)** $\{3\}$; **б)** $\{5\}$. **21. а)** $\{3\}$; **б)** $\{-3\}$. **22. а)** 3; **б)** 1. **23. а)** 4; **б)** 5. **24. а)** 2; **б)** 4. **25. а)** 5; **б)** 4. **26. а)** 1; 3; 4; **б)** 1; 4. **27. а)** 3; **б)** 1. **28. а)** 1; **б)** 4. **29. а)** 3; 6; **б)** 2; 5. **30. а)** 4; **б)** 5. **31. а)** 1; 3; 4; **б)** 2. **32. а)** $\{5\}$; **б)** $\{4\}$. **33. а)** $\{-6\}$; **б)** $\{-7\}$. **34. а)** $\{4\}$; **б)** $\{-5\}$. **35. а)** $(5; -2)$; **б)** $(-3; 4)$. **36. а)** $\{4\}$; **б)** $\{6\}$. **37. а)** $\{-\sqrt{5}\}$; **б)** $\{\sqrt{2}\}$. **38. а)** 1; **б)** 2; 5. **39. а)** 4; **б)** 5. **40. а)** 3; **б)** 3. **41. а)** $\{5\}$; **б)** $\{8\}$. **42. а)** $\{2\}$; **б)** $\{1{,}5\}$. **43. а)** $\{-1\}$; **б)** $\{0{,}5\}$. **44. а)** $\{1\}$; **б)** $\{-1\}$. **45. а)** $\{-1\}$; **б)** $\{-3\}$. **46. а)** $\{4\}$; **б)** $\{2\}$. **47. а)** 1; 3; 4; **б)** 2; 4. **48. а)** 3; **б)** 4. **49. а)** 4; **б)** 2. **50. а)** 3; **б)** 2. **51. а)** 5; **б)** 3. **52. а)** 16; **б)** 18. **53. а)** $\{4\}$; **б)** $\{5\}$. **54. а)** $\{9\}$; **б)** $\{8\}$. **55. а)** $\{4\}$; **б)** $\{0\}$. **56. а)** $\{2\}$; **б)** $\{3\}$. **57. а)** $[7; 13)$; **б)** $(5; 11]$. **58. а)** $[0; 2] \cup \{5\}$; **б)** $[0; 3] \cup \{7\}$. **59. а)** 3; **б)** 1. **60. а)** 2; 3; **б)** 1; 4. **61. а)** 2; **б)** 1. **62. а)** $(2; 3) \cup (3; 4)$; **б)** $(3; 4) \cup (4; 6) \cup (6; 7)$. **63. а)** $(17; 18) \cup (18; 19) \cup (19; 20)$; **б)** $(13; 14) \cup (14; 15) \cup (15; 16)$. **64. а)** $(5; 6)$; **б)** $(7; 8)$. **65. а)** $\{-7\} \cup [3; +\infty)$; **б)** $\{-5\} \cup [2; +\infty)$. **66. а)** $\{3\}$; **б)** $\{4\}$. **67. а)** $\{3\}$; **б)** $\{5\}$. **68. а)** $(6; 12)$; **б)** $(8; 10)$. **69. а)** $\left(3{,}5; 3\dfrac{2}{3}\right)$; **б)** $\left(4{,}5; 4\dfrac{2}{3}\right)$. **70. а)** $(-3; -2{,}5)$; **б)** $(-4; -3{,}5)$.

Упражнения к § 1.2

1. а) $(-\infty; 3] \cup \{4\} \cup [5; +\infty)$; **б)** $[5; 7] \cup \{8\}$. **2. а)** $(-\infty; -3] \cup \{-2\} \cup [-1; 0]$; **б)** $(-\infty; -5] \cup \{-4\} \cup [-3; 0]$. **3. а)** $(-\infty; -7) \cup \{0{,}4\} \cup [6{,}5; 7)$; **б)** $(-\infty; -8) \cup$ $\cup \{0{,}8\} \cup [7{,}5; 8)$. **4. а)** $(-3; -2) \cup \left[-\dfrac{4}{3}; 2\right)$; **б)** $(-\infty; -6) \cup \left(-5; -\dfrac{25}{6}\right] \cup$ $\cup (5; +\infty)$. **5. а)** $[-1{,}5; 2] \cup \{3\} \cup [7; +\infty)$; **б)** $[3; 5] \cup \{6\}$. **6. а)** $[-4; 3) \cup [4; 5]$; **б)** $[-5; 1] \cup [2; 4)$. **7. а)** $(-\infty; 4] \cup [5; +\infty)$; **б)** $[1; 2]$. **8. а)** $(-\infty; 1) \cup \{2\} \cup$ $\cup [4; +\infty)$; **б)** $\{-3\} \cup [1; 2)$. **9. а)** $\{2; 4\}$; **б)** $\{-3; -2\}$. **10. а)** $\{-2\} \cup$ $\cup [2; +\infty)$; **б)** $\{-1\} \cup [1; +\infty)$. **11. а)** $(-2; 7] \cup [13; +\infty)$; **б)** $(3; 6] \cup [12; +\infty)$. **12. а)** $\left(-1; -\dfrac{7}{8}\right) \cup \left(\dfrac{3}{4}; 1\right]$; **б)** $\left[-1; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(\dfrac{5}{6}; 1\right)$. **13. а)** $[-4; -3) \cup [4; 5)$; **б)** $[-6; -5) \cup [2; 3)$. **14. а)** $\{6\}$; **б)** $\{7\}$.

Упражнения к § 1.3

1. а) $(-\infty; -2] \cup \{2\}$; **б)** $(-\infty; -3] \cup \{3\}$. **2. а)** $\{-1\} \cup [3; 4]$; **б)** $\{-1\} \cup [5; 6]$. **3. а)** $(-\infty; -3] \cup \left(-\dfrac{5}{2}; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \{3\}$; **б)** $(-\infty; -2] \cup \left(-\dfrac{5}{3}; -\dfrac{3}{4}\right) \cup \{2\}$. **4. а)** $\{1\} \cup$

$\cup(3;4)$; **б)** $\{1\}$. **5. а)** $[4;5]\cup[13;+\infty)$; **б)** $[6;7]\cup[10;+\infty)$. **6. а)** $\{-6\}\cup\cup(-2;1{,}5)\cup\{5;6\}$; **б)** $\{-4\}\cup(-2;0{,}5)\cup\{3;4\}$. **7. а)** $(-\infty;0{,}5]\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\}$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$; **б)** $(-\infty;1{,}5]\cup\{\pi+2\pi n\}$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. **8. а)** $\{-2\pi n;-1\}$, $n\in\mathbb{N}$; **б)** $\left\{1;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\}$, $n\in\{0\}\cup\mathbb{N}$. **9. а)** $(2;+\infty)$; **б)** $(-\infty;2)$. **10. а)** $\{-2\}\cup[0;1]\cup\cup\{2\}$; **б)** $\{-3\}\cup[0;1]\cup\{3\}$. **11. а)** $(0;1)\cup(7;+\infty)$; **б)** $(0;2)\cup(5;+\infty)$. **12. а)** $\{-4\}\cup(-2;0)\cup(0;1)$; **б)** $\{-5\}\cup(-3;0)\cup(0;2)$.

Упражнения к § 1.4

1. а) $(-3;-1)\cup(3;5)$; **б)** $(-9;-7)\cup(-1;1)$. **2. а)** $\{-2;-1\}\cup[1;2]$; **б)** $\{-3;-1\}\cup\cup[1;3]$. **3. а)** $(-\infty;-4)\cup(-4;-3]\cup\{-2\}\cup[-1;0)\cup(0;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-6)\cup\cup(-6;-5]\cup\{-3\}\cup[-1;0)\cup(0;+\infty)$. **4. а)** $[-5;-1]\cup\{1;3;5\}$; **б)** $[-3;-1]\cup\cup\{1;2;3\}$. **5. а)** $\left(\frac{1}{3};\frac{12}{25}\right)$; **б)** $\left(-\frac{5}{14};-\frac{5}{17}\right)$. **6. а)** $\left[-1;\frac{2}{3}\right]\cup(1;8]\cup[80;+\infty)$; **б)** $\left[-5;-\frac{5}{4}\right]\cup(3;11]\cup[139;+\infty)$. **7. а)** $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **8. а)** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **9. а)** $\left(0;\frac{1}{3}\right]$; **б)** $\left(0;\frac{1}{4}\right]$. **10. а)** $\{3\}$; **б)** $\{2\}$. **11. а)** $(-5;-2\sqrt{5}]\cup\{0\}\cup[2\sqrt{5};5)$; **б)** $(-8;-4\sqrt{3}]\cup\{0\}\cup\cup[4\sqrt{3};8)$. **12. а)** $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)\cup[81;+\infty)$; **б)** $\left(\frac{1}{32};\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]\cup(1;512]$.

Упражнения к § 1.5

1. а) $(-\infty;1)$; **б)** $(-\infty;1)$. **2. а)** $(-1;1)$; **б)** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **3. а)** $\{1\}\cup\cup[4;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-5]\cup\{1\}$. **4. а)** $(-\infty;-1]\cup\{0\}\cup[1;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-1]\cup\cup\{0\}\cup[1;+\infty)$. **5. а)** $[3;+\infty)$; **б)** $(-\infty;2]$. **6. а)** $(-2;3)$; $(2;3)$; **б)** $(-3;5)$; $(3;5)$. **7. а)** $[-5;4]$; **б)** $[-11;5]$. **8. а)** $[3;+\infty)$; **б)** $(-\infty;2]$. **9. а)** $[-6;0)\cup\cup(3;+\infty)$; **б)** $[-5;0)\cup(4;+\infty)$. **10. а)** $[5;9]$; **б)** $[1;5)$. **11. а)** $(5;0)$; $(-5;0)$; **б)** $(0;-3)$; $(0;3)$. **12. а)** $[0{,}25;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-0{,}5]$. **13. а)** $[1;1{,}2]$; **б)** $[3;12]$. **14. а)** $[-4{,}8;-3]$; **б)** $[-7{,}5;-3]$. **15. а)** $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **16. а)** $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, πn, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. **17. а)** $-\frac{\pi}{2}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; **б)** $-\frac{\pi}{2}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$. **18. а)** $-\frac{\pi}{4}+\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; **б)** $-\frac{\pi}{4}+\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$. **19. а)** $-\frac{\pi}{4}+\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; **б)** $\frac{\pi l}{3}$, $l\in\mathbb{Z}$. **20. а)** $\{0\}$; **б)** $\{0\}$. **21. а)** $(0;3)$; **б)** $(0;4)$. **22. а)** $\left(\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{4};\frac{\pi k}{5};-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{3}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(\pm\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4};\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3};\frac{\pi}{2}+\pi m\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$. **23. а)** $\left(2;\frac{2n+1}{2}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(6;\frac{6n+3}{2}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **24. а)** $(-\infty;2]$; **б)** $[2;+\infty)$. **25. а)** $\left(7;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$; **б)** $(\pi+2\pi k;-3)$, $k\in\mathbb{Z}$. **26. а)** $[1;+\infty)$; **б)** $(-\infty;1]$. **27. а)** $(-3;-2]$; **б)** $(-7;-1]$. **28. а)** $(-3;4)$; **б)** $(-7;-2)$. **29. а)** $(2;4{,}5)$; **б)** $(2{,}2;3)$. **30. а)** $[4;7)$; **б)** $[2;5)$. **31. а)** $(0{,}8;1]$; **б)** $(1{,}6;7{,}5]$. **32. а)** $\{0\}$; **б)** $\{0\}$. **33. а)** $\{0\}$; **б)** $\{0\}$. **34. а)** $\{4\}$; **б)** $\{5\}$. **35. а)** $\{-2\}$; **б)** $\{-3\}$. **36. а)** $\{-2\}$; **б)** $\{3\}$. **37. а)** $\{4\}$; **б)** $\{2\}$. **38. а)** $[-2;4]$; **б)** $[-2;3]$. **39. а)** $\{1{,}5\}$; **б)** $\{-0{,}5\}$.

40. а) $\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}+4\pi n\right)$; $\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}+4\pi m\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(\frac{3\pi}{5}; -\frac{3\pi}{5}+6\pi n\right)$; $\left(-\frac{3\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}+6\pi m\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$.

Упражнения к § 1.6

1. а) $\left(1; \frac{4}{3}\right)$; **б)** $\left(3; \frac{10}{3}\right)$. **2. а)** $\left[0; \frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{3}; 1\right)$; **б)** $[0; 1)\cup\left(\frac{4}{3}; 4\right)$. **3. а)** $(-2; -1)\cup\{1\}$; **б)** $\{-2\}\cup(2; 3)$. **4. а)** $(-\infty; -1)\cup[-0{,}5; 0{,}5]\cup(1; 2)$; **б)** $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)\cup\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]\cup\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. **5. а)** $(-\infty; -1{,}25]\cup(0; 0{,}25]$; **б)** $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right]\cup\left(0; \frac{1}{6}\right]$. **6. а)** $\left(-\infty; \frac{1}{6}\right)\cup\left(\frac{5}{12}; \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)\cup\left[\frac{5}{6}; 1\right]\cup[5; \infty)$; **б)** $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{3}; 2\right)\cup(2; 3)\cup\left[\frac{10}{3}; 4\right]\cup[20; \infty)$. **7. а)** $\left(\frac{1}{4}; \frac{2}{3}\right]\cup\left(\frac{3}{2}; 4\right]$; **б)** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)\cup\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right)\cup[2; +\infty)$. **8. а)** $(-\infty; -0{,}75)\cup(-0{,}25; 0)\cup\{0{,}5\}\cup[1; +\infty)$; **б)** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{6}; 0\right)\cup\left\{\frac{1}{3}\right\}\cup\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **9. а)** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)\cup\{0\}\cup\left(\frac{2}{9}; +\infty\right)$; **б)** $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right)\cup\{0\}\cup\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **10. а)** $(-2; -1)$; **б)** $(-3; -2)$. **11. а)** $\left[\frac{1}{2}; \frac{13}{12}\right)$; **б)** $\left[\frac{3}{4}; \frac{13}{8}\right)$. **12. а)** $\left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right)\cup\left[\frac{2}{9}; \frac{\sqrt{11}-1}{6}\right]$; **б)** $\left[-1; \frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{11}-1}{4}\right]$. **13. а)** $\left(-\frac{5}{6}; -\frac{2}{3}\right)$; **б)** $\left(-\frac{7}{8}; -\frac{3}{4}\right]$. **14. а)** $(-7; -6)\cup[2; 2{,}5)\cup(4; 4{,}5]$; **б)** $(-6; -5)\cup[3; 3{,}5)\cup(5; 5{,}5]$. **15. а)** $(1; \infty)$; **б)** $(-1; \infty)$. **16. а)** $(-\infty; 0)\cup[0{,}5; 1)\cup(1; 2)\cup[3; \infty)$; **б)** $(-\infty; 1)\cup[1{,}5; 2)\cup(2; 3)\cup[4; \infty)$. **17. а)** $(0; 0{,}1)\cup(1; \infty)$; **б)** $(0; 0{,}2)\cup(1; \infty)$. **18. а)** $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right)$; **б)** $(0{,}25; 0{,}5)$. **19. а)** $\left[\frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right)$; **б)** $\left[\frac{2}{15}; \frac{1}{5}\right)$. **20. а)** $(1; +\infty)$; **б)** $\left(\frac{3}{7}; +\infty\right)$. **21. а)** $(-0{,}1; 0]\cup[0{,}2; 0{,}8)$; **б)** $\left(-\frac{1}{6}; 0\right]\cup\left[\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$. **22. а)** $\left(-\frac{2}{7}; -\frac{1}{7}\right]\cup\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}\right)$; **б)** $(-0{,}4; -0{,}2]\cup(0{,}2; 0{,}4)$. **23. а)** $\left\{\frac{1}{3}\right\}\cup(0{,}5; 1)$; **б)** $\{0{,}5\}\cup(0{,}75; 1{,}5)$. **24. а)** $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{4}{5}; \frac{5}{6}\right)\cup\left(\frac{7}{8}; 1\right)\cup\left(1; \frac{3}{2}\right)$; **б)** $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)\cup\left[\frac{3}{5}; \frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{4}; 1\right)\cup(1; 2)$.

Глава 2

Упражнения к § 2.1

1. а) $(-\infty; -1]$; **б)** $(-\infty; -1]$. **2. а)** $(-\infty; 1{,}5]$; **б)** $(-\infty; 1{,}6]$. **3. а)** $(2; +\infty)$; **б)** $(1; +\infty)$. **4. а)** $(-2; +\infty)$; **б)** $(-2; +\infty)$. **5. а)** $[1{,}5; +\infty)$; **б)** $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. **6. а)** 1; **б)** -2. **7. а)** $(-\infty; 2)$; **б)** $(-\infty; -1)$. **8. а)** $\left[-\frac{6}{7}; +\infty\right)$; **б)** $\left[-\frac{15}{4}; +\infty\right)$. **9. а)** $(-\infty; -2]$; **б)** $[5; +\infty)$. **10. а)** $(-\infty; 20)$; **б)** $\left(\frac{50}{3}; +\infty\right)$. **11. а)** $[1; 30]$; **б)** $[1; 20]$. **12. а)** $(-6; 1)$; **б)** $(-20; 1)$; **13. а)** $\left[-3; \frac{1}{3}\right)$; **б)** $\left[-4; \frac{1}{4}\right)$. **14. а)** $(-7; 0)$; **б)** $(-5; 0)$. **15. а)** $(-20; -5)$; **б)** $(-21; -4)$. **16. а)** $(-0{,}8; 15)$; **б)** $(-0{,}7; 30)$.

17. а) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{5}{7}\right]$; **б)** $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right]$. **18. а)** $(-\infty; -1]$; **б)** $(-\infty; -1]$. **19. а)** $[0{,}5; 2)$; **б)** $[0{,}5; 2)$. **20. а)** $(-1{,}5; 1{,}5)$; **б)** $\left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$. **21. а)** $(1{,}5; 10)$; **б)** $\left(\frac{4}{3}; 10\right)$. **22. а)** $(-2; 0)$; **б)** $(-2; 0)$. **23. а)** $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right]$; **б)** $(-1; -0{,}5]$. **24. а)** $\left(-\infty; -\frac{3}{8}\right)$; **б)** $\left(-\infty; -\frac{7}{4}\right)$. **25. а)** $[-0{,}7; 0]$; **б)** $\left[0; \frac{8}{3}\right]$. **26. а)** $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup \left[\frac{5}{6}; +\infty\right)$; **б)** $\left(-\infty; -\frac{4}{7}\right] \cup \left[\frac{4}{7}; +\infty\right)$. **27. а)** $[-15; 15]$; **б)** $[-16; 16]$. **28. а)** $(-\infty; 0] \cup$ $\cup \left[\frac{16}{15}; +\infty\right)$; **б)** $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{16}{35}; +\infty\right)$. **29. а)** $(-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$; **б)** $(-\sqrt{14}; \sqrt{14})$. **30. а)** $(-\infty; 1] \cup [18; +\infty)$; **б)** $(-\infty; 1] \cup [16; +\infty)$. **31. а)** $(-0{,}5; 5)$; **б)** $(-2; 0{,}2)$. **32. а)** $\left(-\infty; -\frac{8}{3}\right) \cup (3; +\infty)$; **б)** $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup (1{,}5; +\infty)$. **33. а)** $[-1; 1]$; **б)** $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. **34. а)** $(-8; 4)$; **б)** $(-4; 2)$. **35. а)** $\{1\}$; **б)** $\{2\}$. **36. а)** $(-4; 4)$; **б)** $(-5; 5)$. **37. а)** $[-3; -2] \cup [2; 3]$; **б)** $[-4; -3] \cup [3; 4]$. **38. а)** $\{-8\}$; **б)** $\{-6\}$. **39. а)** $(1; 4)$; **б)** $(1; 2)$. **40. а)** $\{0; 4\}$; **б)** $\{0; 2\}$.

Диагностическая работа 1

Вариант 1

1. 9. **2.** $(-\infty; 3]$. **3.** $(-\infty; 3)$. **4.** $[0; 1{,}8]$. **5.** $\left(-\infty; -\frac{5}{7}\right) \cup \left(\frac{5}{7}; +\infty\right)$. **6.** $(0{,}2; 20)$. **7.** $\{0{,}2\} \cup [2; 3]$. **8.** $[-7; +\infty)$. **9.** $(0; 0{,}8)$. **10.** $[0{,}5; 1{,}5] \cup \{2\}$. **11. а)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}+\sqrt{7}\right)$; **б)** 1; 2; 3; 4. **12. а)** $(-3; 0{,}8)$; **б)** $[-2; 0{,}8]$; **в)** 0,8.

Вариант 2

1. 9. **2.** $(-\infty; 8]$. **3.** $(4; +\infty)$. **4.** $[0; 2{,}75]$. **5.** $\left(-\infty; -\frac{7}{6}\right) \cup \left(\frac{7}{6}; +\infty\right)$. **6.** $(0{,}5; 50)$. **7.** $\{0{,}4\} \cup [2; 4]$. **8.** $\left[-\frac{14}{13}; +\infty\right)$. **9.** $(0; 0{,}75)$. **10.** $[0{,}25; 0{,}75] \cup \{1\}$. **11. а)** $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; \sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$; **б)** 2; 3; 4. **12. а)** $[-3{,}5; 3]$; **б)** $(-3{,}5; 1)$; **в)** $\{-3{,}5\} \cup [1; 3]$.

Упражнения к § 2.2

1. а) $\{1\} \cup [2; +\infty)$; **б)** $\{-2\} \cup [6; +\infty)$. **2. а)** $(-\infty; -4] \cup \{-3\} \cup [-2; -1]$; **б)** $(-\infty; -6] \cup \{-5\} \cup [-4; -1]$. **3. а)** $\{-3\} \cup [1; 5]$; **б)** $\{-2\} \cup [1; 4]$. **4. а)** $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{2}{3}\right\} \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$; **б)** $(-\infty; 0{,}5] \cup \{2\} \cup [2{,}5; +\infty)$. **5. а)** $[-3; 3]$; **б)** $[-2; 2]$. **6. а)** $\left\{-\frac{2}{3}\right\} \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$; **б)** $\left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **7. а)** $(-\infty; -1{,}5] \cup$ $\cup \{0\} \cup [1{,}5; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -0{,}4] \cup \{0\} \cup [0{,}4; +\infty)$. **8. а)** $(0{,}5; 1)$; **б)** $(-1; 1{,}25)$. **9. а)** $(-3; -1)$; **б)** $(2; 3)$. **10. а)** $[1; +\infty)$; **б)** $[-1; +\infty)$. **11. а)** $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup$ $\cup \{0\} \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$; **б)** $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$. **12. а)** $\{-15\} \cup [15; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -14] \cup \{14\}$. **13. а)** $(-7; -3)$; **б)** $(-10; -2)$. **14. а)** $\{9\}$; **б)** $\{10\}$.

15. а) $[0{,}75; 3{,}5]$; **б)** $\left[\frac{2}{7}; \frac{4}{3}\right]$. **16. а)** $\{-2\}$; **б)** $\{-3\}$. **17. а)** $[-2; 0]$; **б)** $[-2; 0]$. **18. а)** $\{-1; 1\}$; **б)** $\{-1; 1\}$. **19. а)** $(0; 10)$; **б)** $(0; 2)$. **20. а)** $\left\{\frac{2}{3}; \frac{7}{4}\right\}$; **б)** $\left\{\frac{3}{8}; \frac{9}{2}\right\}$. **21. а)** $\left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$; **б)** $(1; +\infty)$. **22. а)** $\{-11; -4\}$; **б)** $\{-12; -3\}$. **23. а)** $[-2; -1{,}5] \cup \cup \{-1\}$; **б)** $\left[-3; -\frac{7}{3}\right] \cup \{-2\}$. **24. а)** $\{-1\} \cup \left[\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]$; **б)** $\{-1\} \cup \left[\frac{6}{5}; \frac{5}{4}\right]$. **25. а)** $\{0{,}15\}$; **б)** $\{-0{,}37\}$. **26. а)** $\left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right]$; **б)** $\left[-\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right]$. **27. а)** $\left(-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \cup \left(1; \frac{5}{3}\right)$; **б)** $(-4{,}5; -3{,}5) \cup (-0{,}5; 0{,}5)$. **28. а)** $(-2{,}5; 0) \cup (0; 1)$; **б)** $(-1{,}4; 0) \cup \cup (0; 1)$. **29. а)** $[0; 0{,}5] \cup [3; +\infty)$; **б)** $[-0{,}5; 0] \cup [3; +\infty)$. **30. а)** $[-1; 1]$; **б)** $[-2; 2]$. **31. а)** $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$. **32. а)** $(-1; 0) \cup \cup \left(0; \frac{2}{3}\right)$; **б)** $(-1; 0) \cup \left(0; \frac{3}{4}\right)$. **33. а)** $(1; 1{,}5)$; **б)** $\left(1; \frac{4}{3}\right)$. **34. а)** $(-2; 1)$; **б)** $(-3; -2) \cup (2; +\infty)$. **35. а)** $m > 3$, $k > 3$, $n < 3$; **б)** $x < 5$, $y < 5$, $z < 5$. **36. а)** $\{3\}$; **б)** $\{4\}$. **37. а)** $\{-5\}$; **б)** $\{4\}$. **38. а)** $\{6\}$; **б)** $\{7\}$. **39. а)** $\{3\}$; **б)** $\{-2\}$. **40. а)** $\{-3\}$; **б)** $\{4\}$. **41. а)** $(5; 8)$; $(5; 7)$; $(5; 6)$. **б)** $(12; 9)$; $(11; 9)$; $(10; 9)$. **42. а)** $(-\infty; 2)$; **б)** $(2; +\infty)$. **43. а)** $(-\infty; -1)$; **б)** $(-1; +\infty)$. **44. а)** $(-\infty; -1] \cup \cup [1; +\infty)$; **б)** $[-1; 1]$. **45. а)** $\{2\}$; **б)** $\{3\}$. **46. а)** $[1; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -1]$. **47. а)** $(-4; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; 4)$; **б)** $(-5; -4) \cup (-4; 4) \cup (4; 5)$. **48. а)** $[-5; 3] \cup \cup \{4; 5\}$; **б)** $(-\infty; -5] \cup \{-1; 5\} \cup [6; +\infty)$. **49. а)** $[-1; -0{,}9] \cup [0{,}9; 1]$; **б)** $[-1; -0{,}8] \cup [0{,}8; 1]$. **50. а)** $[12n-6; 12n-1] \cup [12n; 12n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$; **б)** $[10n-2; 10n+2] \cup \{10n+5\}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Диагностическая работа 2

Вариант 1

1. $(-\infty; 4] \cup \{5\} \cup [6; +\infty)$. **2.** $\left\{-1; \frac{4}{3}\right\} \cup [3; +\infty)$. **3.** $(-\infty; -1] \cup \{1\}$. **4.** $(7; 8)$. **5.** $(-1; 5)$. **6.** $\{-1; -0{,}5\} \cup [0{,}5; 1]$. **7.** $(-1; 1)$. **8.** $\left\{1; \frac{19}{9}\right\}$. **9.** $(2; -1)$. **10.** $(-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$. **11.** $\{1\} \cup [4; +\infty)$. **12.** $[11n+5; 11n+6]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 2

1. $[6; 8] \cup \{9\}$. **2.** $\left\{-1; \frac{3}{2}\right\} \cup [5; +\infty)$. **3.** $(-\infty; -1] \cup \{1\}$. **4.** $(-6; -5)$. **5.** $(-4; 1)$. **6.** $\left\{-1; -\frac{1}{3}\right\} \cup \left[\frac{1}{3}; 1\right]$. **7.** $(-1; 1)$. **8.** $\left\{1; \frac{11}{4}\right\}$. **9.** $(1; -2)$. **10.** $(-\infty; -1] \cup \{0\} \cup \cup [1; +\infty)$. **11.** $(-\infty; -5] \cup \{1\}$. **12.** $[14n+6; 14n+8]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Глава 3

Упражнения к § 3.1

1. а) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$; **б)** $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **2. а)** $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; **б)** $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$. **3. а)** $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; **б)** $(1{,}5; +\infty)$. **4. а)** $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$; **б)** $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **5. а)** $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$;

б) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **6. а)** $(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$; **б)** $(-4;4)$. **7. а)** $(-\infty;-2]\cup$ $\cup[3;+\infty)$; **б)** $[-4;3]$. **8. а)** $(-\infty;-1{,}2]\cup[1{,}2;+\infty)$; **б)** $[-4{,}5;4{,}5]$. **9. а)** $(-\infty;-2)\cup(1{,}5;+\infty)$; **б)** $(-2;2{,}5)$. **10. а)** $[-2{,}5;0{,}5]$; **б)** $(-\infty;-2]\cup$ $\cup[0{,}75;+\infty)$. **11. а)** $\left(-\frac{5}{4};\frac{8}{3}\right)$; **б)** $\left(-\frac{7}{3};\frac{5}{2}\right)$. **12. а)** $(2;2{,}5)$; **б)** $\left(-5;\frac{2}{3}\right)$. **13. а)** $\left(-\infty;\frac{19}{30}\right]$; **б)** $\left(-\infty;\frac{14}{15}\right]$. **14. а)** $\left(\frac{5}{6};1\right)$; **б)** $\left(\frac{3}{8};1\right)$. **15. а)** $\left(\frac{2}{5};4\right)$; **б)** $\left(\frac{3}{4};3\right)$. **16. а)** $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right)$; **б)** $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)$. **17. а)** $\left(-\infty;-\frac{5}{6}\right]$; **б)** $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right]$. **18. а)** $[0;5)$; **б)** $[0;7)$. **19. а)** $\left[-\frac{1}{3};0\right]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$; **б)** $\left[-\frac{1}{3};0\right]\cup\left\{\frac{1}{4}\right\}$. **20. а)** $[-9;0]\cup\{9\}$; **б)** $[-8;0]\cup\{8\}$.

Диагностическая работа 3

Вариант 1

1. $(-1{,}4;1{,}4)$. **2.** $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. **3.** $(-\infty;-3]\cup[0{,}4;+\infty)$. **4.** $\left(-\infty;-\frac{3}{7}\right]\cup$ $\cup\left[\frac{3}{7};+\infty\right)$. **5.** $(-\infty;-3)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$. **6.** $\left[-\frac{5}{3};\frac{1}{2}\right]$. **7.** $\left(\frac{7}{6};9\right)$. **8.** $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{1}{4};\frac{18}{17}\right)$. **9.** $\left(-\infty;-\frac{9}{8}\right]\cup\left\{\frac{9}{8}\right\}$. **10.** $(-\infty;0]\cup\left[\frac{8}{5};\frac{7}{4}\right)$. **11.** $\left[-\frac{1}{2};0\right]\cup\left\{\frac{7}{3}\right\}$. **12.** $[-1{,}2;0]\cup\{1{,}2\}$.

Вариант 2

1. $(-\infty;-2{,}5)\cup(2{,}5;+\infty)$. **2.** $(0;5)$. **3.** $[-4;0{,}75]$. **4.** $\left[-\frac{11}{3};\frac{11}{3}\right]$. **5.** $\left(-\frac{4}{3};3\right)$. **6.** $(-\infty;-2]\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right)$. **7.** $(1{,}2;8)$. **8.** $\left(-\infty;-\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{5};\frac{27}{26}\right)$. **9.** $\left(-\infty;-\frac{7}{6}\right]\cup$ $\cup\left\{\frac{7}{6}\right\}$. **10.** $(-\infty;0]\cup\left[\frac{9}{8};\frac{8}{7}\right)$. **11.** $\left[-\frac{3}{4};0\right]\cup\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **12.** $[-1{,}75;0]\cup\{1{,}75\}$.

Упражнения к § 3.2

1. а) $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$; **б)** $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$. **2. а)** $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right)$; **б)** $\left(\frac{4}{5};+\infty\right)$. **3. а)** $\left(\frac{4}{5};+\infty\right)$; **б)** $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)$. **4. а)** $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$; **б)** $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$. **5. а)** $(0;3)$; **б)** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **6. а)** $(-\infty;-4)\cup[4;+\infty)$; **б)** $[-3;3)$. **7. а)** $(-\infty;3)\cup[5;+\infty)$; **б)** $(-\infty;4)\cup[7;+\infty)$. **8. а)** 16; **б)** -17. **9. а)** $(-\infty;1)\cup(4;7)$; **б)** $(7;9)\cup(11;+\infty)$. **10. а)** $(-\infty;10)\cup$ $\cup\{11\}\cup(12;+\infty)$; **б)** $(-\infty;13)\cup\{14\}\cup(15;+\infty)$. **11. а)** $\left(-\infty;-\frac{7}{3}\right)\cup\{0\}$; **б)** $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)\cup\{0\}$. **12. а)** $\{-4\}\cup(-3;3)$; **б)** $\{-7\}\cup(-6;6)$. **13. а)** $[-4;3)\cup$ $\cup(3;4]$; **б)** $[-5;4)\cup(4;5]$. **14. а)** $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$; **б)** $(-\infty;0{,}75]$. **15. а)** $(0;4)\cup(4;+\infty)$; **б)** $(0;6)\cup(6;+\infty)$. **16. а)** $(-2;2)\cup(2;+\infty)$; **б)** $(-3;3)\cup(3;+\infty)$. **17. а)** $[0;5)\cup$ $\cup(5;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-2)\cup(-2;0]$. **18. а)** $[0;4)\cup(4;5]$; **б)** $[0;3)\cup(3;5]$. **19. а)** $(-\infty;-8)\cup(7;+\infty)$; **б)** $(-7;8)$. **20. а)** $(-2;-1)$; **б)** $(-3;-2)$. **21. а)** $(-2;4)$;

б) $(-4;3)$. **22. а)** $(13;15)$; **б)** $(-19;-17)$. **23. а)** $(4;+\infty)$; **б)** $(5;+\infty)$. **24. а)** $(-7;7)\cup(7;10)$; **б)** $(-9;9)\cup(9;10)$. **25. а)** $(4;5)\cup(7;9)$; **б)** $(5;6)\cup(9;11)$. **26. а)** $(-8;8)$; **б)** $(-5;5)$. **27. а)** $(0;2)\cup(2;4)\cup(4;+\infty)$; **б)** $(0;3)\cup(3;9)\cup(9;+\infty)$. **28. а)** $(1{,}5;2)$; **б)** $(2{,}5;3)$. **29. а)** $(-1;4)\cup(4;5)\cup(5;10)$; **б)** $(-1;6)\cup(6;7)\cup$ $\cup(7;14)$. **30. а)** $(-17;0)$; **б)** $(-19;0)$. **31. а)** $(5;6)\cup\{15\}$; **б)** $(7;8)\cup\{17\}$. **32. а)** $(0;57)\cup\{67\}$; **б)** $(0;79)\cup\{89\}$. **33. а)** $(2;3)$; **б)** $(4;5)$. **34. а)** $(-7;7)\cup$ $\cup(7;77]$; **б)** $(-9;9)\cup(9;99]$. **35. а)** $(4;5)\cup(5;7)$; **б)** $(5;6)\cup(6;8)$. **36. а)** $\{0\}\cup$ $\cup(6;12)$; **б)** $\{0\}\cup(8;10)$. **37. а)** $(-\infty;-11)\cup(-9;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-13)\cup(-7;+\infty)$. **38. а)** $(-11;-4)$; **б)** $(-12;-6)$. **39. а)** $\{-3\}\cup[3;3{,}5)\cup(3{,}5;4]$; **б)** $\{-4\}\cup[4;4{,}5)\cup$ $\cup(4{,}5;5]$. **40. а)** $(5;7)$; **б)** $(3;8)$. **41. а)** $(-21;0)\cup(0;12)$; **б)** $(-32;0)\cup(0;23)$. **42. а)** $(-5;0)\cup\{30\}$; **б)** $(-6;0)\cup\{20\}$. **43. а)** $(-4;-3)\cup\{3;4\}$; **б)** $(-3;-2)\cup$ $\cup\{2;3\}$. **44. а)** $\left[-17;-\frac{6}{11}\right)\cup\{0\}$; **б)** $\left[-22;-\frac{9}{13}\right)\cup\{0\}$. **45. а)** $(0;17)\cup(17;19)$; **б)** $(0;11)\cup(11;13)$. **46. а)** $(0;3)\cup(3;4)$; **б)** $(0;2)\cup(2;3)$. **47. а)** $[-2;0)\cup\left(0;\frac{3}{2}\right)$; **б)** $[-3;0)\cup\left(0;\frac{7}{3}\right)$. **48. а)** $b<0$; **б)** $b<0$. **49. а)** $[-5;4)\cup(4;5]$; **б)** $[-4;3)\cup$ $\cup(3;4]$. **50. а)** $[1;2]$; **б)** $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **51. а)** $\{0\}\cup[1;3]$; **б)** $\{0\}\cup[1;2]$. **52. а)** $(-\infty;-7)\cup(-4;+\infty)$; **б)** $(-6;-5)$. **53. а)** $(3;6)$; **б)** $(2;5)$. **54. а)** $(-\infty;-5)\cup$ $\cup(5;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-6)\cup(6;+\infty)$. **55. а)** $\left(-\frac{4}{11};0\right)\cup\left(0;\frac{4}{11}\right)$; **б)** $\left(-\frac{9}{7};0\right)\cup\left(0;\frac{9}{7}\right)$. **56. а)** $(-4;-3)\cup\left[-\frac{7}{3};1\right)$; **б)** $(-\infty;-5)\cup\left(-4;-\frac{19}{6}\right]\cup(6;+\infty)$. **57. а)** $(-\infty;-9]\cup$ $\cup(-7{,}5;-2)\cup\{9\}$; **б)** $(-\infty;-4]\cup\left(-\frac{10}{3};-\frac{3}{2}\right)\cup\{4\}$. **58. а)** $\{-5\}$; **б)** $\{-6\}$. **59. а)** $(-\infty;-5)\cup(-5;-3]\cup\{-2\}\cup[-1;1)\cup(1;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-5)\cup(-5;-4]\cup$ $\cup\{-3\}\cup[-2;-1)\cup(-1;+\infty)$. **60. а)** $[-9;-1]\cup\{1;5;9\}$; **б)** $[-7;-1]\cup\{1;4;7\}$. **61. а)** $\{0\}$; **б)** $\{0\}$. **62. а)** $(-\infty;-3]\cup[2;7)$; **б)** $(-\infty;-5]\cup[1;5)$. **63. а)** $(-\infty;-4]\cup$ $\cup[3;6)$; **б)** $(-\infty;-2]\cup[4;8)$. **64. а)** $(-\infty;1]\cup(2;3)$; **б)** $(-\infty;1]\cup(2;4)$. **65. а)** $(-\infty;1]\cup(3;5)$; **б)** $(-\infty;1]\cup(4;6)$. **66. а)** $(-\infty;1]\cup(2;4)$; **б)** $(-\infty;1]\cup$ $\cup(3;5)$. **67. а)** $(-\infty;1]\cup(2;3)$; **б)** $(-\infty;1]\cup(4;6)$. **68. а)** $(-\infty;1]\cup(2;3)$; **б)** $(-\infty;1]\cup(2;4)$. **69. а)** $(-\infty;1]\cup(3;5)$; **б)** $(-\infty;1]\cup(4;6)$. **70. а)** $(-\infty;1]\cup(2;3)$; **б)** $(-\infty;1]\cup(2;4)$. **71. а)** $(-\infty;1]\cup(3;5)$; **б)** $(-\infty;1]\cup(4;6)$. **72. а)** $(-\infty;1]\cup$ $\cup(2;3)$; **б)** $(-\infty;1]\cup(2;4)$. **73. а)** $(-\infty;1]\cup(3;5)$; **б)** $(-\infty;1]\cup(4;6)$. **74. а)** $(-\infty;0)\cup(0;1]\cup(3;5)$; **б)** $(-\infty;0)\cup(0;1]\cup(4;6)$. **75. а)** $(-\infty;-1]\cup(0;1)$; **б)** $(-\infty;-1]\cup(1;4)$. **76. а)** $(-\infty;-1]\cup(1;3)$; **б)** $(-\infty;-1]\cup(0;2)$. **77. а)** $(-\infty;5]\cup$ $\cup(6;10)$; **б)** $(-\infty;4]\cup(7;11)$. **78. а)** $(-\infty;3]\cup(4;6)$; **б)** $(-\infty;2]\cup(5;9)$. **79. а)** $(-\infty;5]\cup(6;10)$; **б)** $(-\infty;4]\cup(7;11)$. **80. а)** $(-\infty;3]\cup(4;6)$; **б)** $(-\infty;2]\cup$ $\cup(5;9)$. **81. а)** $(-\infty;5]\cup(6;10)$; **б)** $(-\infty;4]\cup(7;11)$. **82. а)** $(-\infty;-4]\cup\{0\}\cup$ $\cup[3;6)$; **б)** $(-\infty;-2]\cup\{0\}\cup[4;8)$. **83. а)** $\left[-\frac{7}{4};\frac{1}{3}\right]\cup(1;6)$; **б)** $\left[-\frac{3}{4};\frac{4}{3}\right]\cup(2;7)$. **84. а)** $\left[-\frac{15}{4};-\frac{5}{3}\right]\cup(-1;4)$; **б)** $\left[\frac{5}{4};\frac{7}{3}\right]\cup(3;9)$. **85. а)** $\{2\}\cup(4;5)$; **б)** $\{2\}$. **86. а)** $\{-4\}$; **б)** $\{-5\}$. **87. а)** $(-2;3)$; **б)** $(3;-2)$. **88. а)** $(7;8)$; $(7;10)$; **б)** $(5;6)$; $(5;8)$. **89. а)** $[0;1]\cup[2;6)\cup(6;8]$; **б)** $[0;1]\cup[3;4)\cup(4;7]$. **90. а)** $(2;5)$; $(3;4)$; **б)** $(1;4)$; $(2;3)$. **91. а)** $\left(-\infty;\frac{5}{9}\right)\cup\left(\frac{9}{5};+\infty\right)$; **б)** $\left(-\infty;\frac{4}{7}\right)\cup\left(\frac{7}{4};+\infty\right)$. **92. а)** $\left(-\infty;\frac{6}{13}\right)\cup\left(\frac{13}{6};+\infty\right)$; **б)** $\left(-\infty;\frac{5}{12}\right)\cup\left(\frac{12}{5};+\infty\right)$. **93. а)** $(0;5)$; **б)** $(-\infty;-8)\cup$

$\cup(6;+\infty)$. **94. а)** $m<-9$; **б)** $m>8$. **95. а)** $\frac{1}{k}<\frac{1}{m}$; **б)** $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$. **96. а)** $\frac{l+1}{l-5}<\frac{l-1}{l+5}$; **б)** $\frac{l+2}{l-8}<\frac{l-2}{l+8}$.

Диагностическая работа 4

Вариант 1

1. $(-\infty;-4)\cup(6;+\infty)$. **2.** $(-\infty;-9)\cup\{1,2\}\cup[8,5;9)$. **3.** $(-6;4)$. **4.** $\left(-1;-\frac{1}{3}\right)\cup\cup\left(1;\frac{5}{3}\right)$. **5.** $[0;4)\cup\{5\}$. **6.** $\left(-\frac{17}{16};-\frac{7}{8}\right)$. **7.** $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$. **8.** $(-\infty;3]\cup(4;6)$. **9.** $(-\infty;-3]\cup\{0\}\cup[2;7)$. **10.** $(-\infty;0)\cup(0;1]\cup(2;3)$. **11.** $(-\infty;-9)\cup(7;+\infty)$. **12.** $(-6;2)$; $(-6;4)$; $(-4;2)$; $(-4;4)$.

Вариант 2

1. $(-3;6)$. **2.** $(-\infty;-10)\cup\{1,4\}\cup[9,5;10)$. **3.** $(-7;6)$. **4.** $\left(-1;-\frac{1}{4}\right)\cup\left(1;\frac{7}{4}\right)$. **5.** $[0;5)\cup\{6\}$. **6.** $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup\left(-\frac{4}{3};-\frac{6}{5}\right)\cup\left(-\frac{10}{9};+\infty\right)$. **7.** $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{7};\frac{1}{2}\right)\cup\cup(1;+\infty)$. **8.** $(-\infty;2]\cup(5;9)$. **9.** $(-\infty;-5]\cup\{0\}\cup[1;5)$. **10.** $(-\infty;0)\cup(0;1]\cup\cup(2;4)$. **11.** $(0;4)$. **12.** $(-3;3)$; $(-3;5)$; $(-1;3)$; $(-1;5)$.

Глава 4

Упражнения к § 4.1

1. а) $(-\infty;+\infty)$; **б)** $(-\infty;+\infty)$. **2. а)** $(-\infty;2,5)\cup(2,5;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-0,4)\cup\cup(-0,4;+\infty)$. **3. а)** $\{-0,7\}$; **б)** $\{0,9\}$. **4. а)** решений нет; **б)** решений нет. **5. а)** $(-\infty;-4]\cup[0,5;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-0,4]\cup[4;+\infty)$. **6. а)** $[1;3,4]$; **б)** $[-4,8;-2]$. **7. а)** $\left(-\infty;\frac{1}{7}\right)\cup\left(\frac{11}{7};+\infty\right)$; **б)** $\left(-\infty;\frac{1}{9}\right)\cup\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$. **8. а)** $(-14;-5)$; **б)** $(-12;-5)$. **9. а)** $(-\infty;+\infty)$; **б)** $(-\infty;+\infty)$. **10. а)** $(-\infty;2)\cup(2;3,5)\cup(3,5;+\infty)$; **б)** $(-\infty;1,5)\cup\cup(1,5;4)\cup(4;+\infty)$. **11. а)** $\{-2,5;0,5\}$; **б)** $\{-2;0,75\}$. **12. а)** решений нет; **б)** решений нет. **13. а)** $(-4;-2)\cup(2;4)$; **б)** $(-5;-1)\cup(1;5)$. **14. а)** $[-4;-3]\cup\cup[3;4]$; **б)** $[-4;-1]\cup[1;4]$. **15. а)** $(-\infty;-7)\cup(-3;3)\cup(7;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-7)\cup\cup(-5;5)\cup(7;+\infty)$. **16. а)** $(-\infty;-3]\cup[-2;2]\cup[3;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-2]\cup[-1;1]\cup\cup[2;+\infty)$. **17. а)** $(-2;4)\cup(6;12)$; **б)** $(-1;2)\cup(3;6)$. **18. а)** $[-0,5;1]\cup[1,5;3]$; **б)** $\left[-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]\cup[1;2]$. **19. а)** $(-\infty;-3)\cup(6;9)\cup(18;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-4)\cup(8;12)\cup\cup(24;+\infty)$. **20. а)** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{4}{3};2\right]\cup[4;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-1,5]\cup[3;4,5]\cup[9;+\infty)$. **21. а)** $(-4;-2)\cup(4;6)$; **б)** $(1;3)\cup(5;7)$. **22. а)** $[-6;-5]\cup[3;4]$; **б)** $[-6;-3]\cup\cup[1;4]$. **23. а)** $(-\infty;-4)\cup(-2;8)\cup(10;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-5)\cup(-1;5)\cup(9;+\infty)$. **24. а)** $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3};1\right]\cup\left[\frac{5}{3};+\infty\right)$; **б)** $(-\infty;-0,5]\cup[0,5;2,5]\cup[3,5;+\infty)$. **25. а)** $[-2,8;-1,2]\cup[-0,4;1,2]$; **б)** $[-2,5;1,5]\cup[5,5;9,5]$. **26. а)** $[-4;-3]\cup\{1\}\cup\cup[5;6]$; **б)** $[-8;-7]\cup\{-1\}\cup[5;6]$. **27. а)** $[-9,2;-5]\cup\{10\}$; **б)** $[-2,4;-1,5]\cup\{4\}$.

28. а) $\left[-1;-\frac{1}{3}\right]\cup\left\{\frac{1}{3};1\right\}$; **б)** $[-1;-0{,}5]\cup\{0{,}5;1\}$. **29. а)** $\{-2\}\cup[2;3]\cup[10;14]$; **б)** $\{-1\}\cup[1;2]\cup[3;6]$. **30. а)** $[0;1{,}4]\cup\{6\}$; **б)** $[-1;1]\cup\{9\}$.

Диагностическая работа 5

Вариант 1

1. $(-\infty;2{,}25)\cup(2{,}25;+\infty)$. **2.** $[-0{,}1;2{,}3]$. **3.** $(-\infty;-1{,}4]\cup[-0{,}2;+\infty)$. **4.** $\{-4{,}5;2\}$. **5.** $[-8;-6]\cup[6;8]$. **6.** $\left(-\infty;-\frac{1}{15}\right]\cup\left[\frac{2}{15};\frac{1}{5}\right]\cup\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$. **7.** $(-2;-1)\cup(2;3)$. **8.** $(-\infty;-1]\cup[-0{,}5;2]\cup[2{,}5;+\infty)$. **9.** $[-17{,}4;-9]\cup\{21\}$. **10.** $\left[-2;-\frac{2}{3}\right]\cup\left\{\frac{2}{3};2\right\}$. **11.** $\left\{-\frac{2}{3}\right\}\cup\left[\frac{2}{3};1\right]\cup\left[\frac{10}{3};\frac{14}{3}\right]$. **12.** $[-1;0{,}4]\cup\{5\}$.

Вариант 2

1. $\{2{,}6\}$. **2.** $[-1{,}7;-0{,}1]$. **3.** $(-\infty;-2{,}6]\cup[0{,}2;+\infty)$. **4.** $(-\infty;-2{,}5)\cup(-2{,}5;4)\cup(4;+\infty)$. **5.** $[-8;-2]\cup[2;8]$. **6.** $(-\infty;-0{,}3]\cup[0{,}6;0{,}9]\cup[1{,}8;+\infty)$. **7.** $(1;2)\cup(3;4)$. **8.** $(-\infty;-1]\cup[-0{,}2;1]\cup[1{,}8;+\infty)$. **9.** $[-10{,}6;-7]\cup\{15\}$. **10.** $[-3;-1{,}5]\cup\{1{,}5;3\}$. **11.** $\left\{-\frac{1}{6}\right\}\cup\left[\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2};1\right]$. **12.** $[-3;1]\cup\{17\}$.

Упражнения к § 4.2

1. а) $[-17;8]$; **б)** $[-18;6]$. **2. а)** $(-20;16)$; **б)** $(-17;16)$. **3. а)** $(-\infty;-11]\cup[21;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-4]\cup[17;+\infty)$. **4. а)** $(-\infty;-13)\cup(19;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-8)\cup(12;+\infty)$. **5. а)** $[-5;5]$; **б)** $[-8;8]$. **6. а)** $(-\infty;-13)\cup(13;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-12)\cup(12;+\infty)$. **7. а)** $(0;3)$; **б)** $\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$. **8. а)** $[1;7]$; **б)** $[1;9]$. **9. а)** $\left(-\frac{8}{5};-\frac{6}{7}\right)$; **б)** $\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{7}\right)$. **10. а)** $[2{,}4;2{,}5]$; **б)** $[3{,}4;3{,}5]$. **11. а)** $[2;4{,}8]$; **б)** $[1;3{,}8]$. **12. а)** $(-\infty;-3]\cup\{1{,}5\}$; **б)** $(-\infty;-9]\cup\{4{,}5\}$. **13. а)** $\left[-\frac{19+\sqrt{433}}{4};\frac{1}{2}\right]$; **б)** $\left[-\frac{17+\sqrt{433}}{2};2\right]$. **14. а)** $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$; **б)** $\left(-\frac{4}{3};+\infty\right)$. **15. а)** $\left(-\infty;\frac{1}{9}\right)\cup(7;+\infty)$. **б)** $\left(-\infty;\frac{1}{11}\right)\cup(9;+\infty)$. **16. а)** $[1;4]$; **б)** $[1;3]$. **17. а)** $(-\infty;3]\cup[5;+\infty)$; **б)** $(-\infty;2]\cup[5;+\infty)$. **18. а)** $[5;6]$; **б)** $[4;5]$. **19. а)** $(-\infty;2]\cup[2{,}5;+\infty)$; **б)** $(-\infty;1{,}5]\cup[2;+\infty)$. **20. а)** $(-1;0)\cup(2;3)$; **б)** $(-1;0)\cup(4;5)$. **21. а)** $[0;4]$; **б)** $[0;6]$. **22. а)** $[-3{,}5;-3{,}4]\cup[2;\infty)$; **б)** $[-5;-3{,}25]\cup[2;\infty)$. **23. а)** $(-\infty;-4]\cup\{0\}$; **б)** $(-\infty;-2]\cup\{0\}$. **24. а)** $\left[\frac{4}{3};10\right]$; **б)** $\left[-\frac{8}{3};6\right]$. **25. а)** $\left[\frac{15}{7};5\right]$; **б)** $\left[\frac{1}{7};3\right]$. **26. а)** $[-1;1]\cup[1{,}5;2]$; **б)** $[-0{,}5;0{,}5]\cup[0{,}75;1]$. **27. а)** $\{-1\}\cup[0;1{,}5]$; **б)** $\{-2\}\cup[-1;0{,}5]$. **28. а)** $[-1{,}6;-1]\cup[0{,}5;3]$; **б)** $[1;3]\cup[3{,}5;4]$. **29. а)** $[-2{,}5;0{,}5]\cup\left[1;\frac{11}{7}\right]$; **б)** $[-3{,}5;-0{,}5]\cup\left[0;\frac{4}{7}\right]$. **30. а)** $(-\infty;-2)\cup(-2;-1{,}8]\cup[-1;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-0{,}5)\cup(-0{,}5;-0{,}4]\cup[0;+\infty)$. **31. а)** $[0;0{,}5)\cup(0{,}5;1)\cup(1;+\infty)$;

б) $[0;2)\cup(2;4)\cup(4;+\infty)$. **32. а)** $(-\infty;-3)\cup(-3;0]\cup[1{,}8;3)\cup(3;5]$; **б)** $(-\infty;-4)\cup(-4;0]\cup[3{,}2;4)\cup(4;5]$. **33. а)** $\{2\}\cup[5;+\infty)$; **б)** $\{4\}\cup[10;+\infty)$. **34. а)** $(-\infty;-5)\cup(-5;1)\cup\left(\frac{73}{25};5\right)\cup\left(5;\frac{23}{2}\right)$; **б)** $(-\infty;-7)\cup(-7;1)\cup\left(\frac{145}{49};7\right)\cup\left(7;\frac{47}{2}\right)$. **35. а)** $(-\infty;2]\cup\{5\}\cup[8;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-1]\cup\{3\}\cup[7;+\infty)$. **36. а)** $(-\infty;-4)\cup(-4;-3]\cup[-2{,}2;-2)\cup(-2;-1{,}75]$; **б)** $(-\infty;-3)\cup(-3;-2]\cup[-1{,}4;-1)\cup\left(-1;-\frac{1}{3}\right]$. **37. а)** $\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{11}{14};1\right)\cup(1;4)\cup(4;+\infty)$; **б)** $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};1\right]\cup\left[\frac{11}{7};2\right)\cup(2;8)\cup(8;+\infty)$. **38. а)** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{4}{7};2\right)\cup(2;4]$; **б)** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{9}{17};3\right)\cup(3;9]$. **39. а)** $\left[0;\frac{17}{16}\right]\cup[5;+\infty)$; **б)** $\left[0;\frac{17}{4}\right]\cup[20;+\infty)$. **40. а)** $(-\infty;-6]\cup\{-5;-4\}\cup[-3;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-5]\cup\{-4;-3\}\cup[-2;+\infty)$. **41. а)** $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$; **б)** $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **42. а)** $(5;+\infty)$; **б)** $(6;+\infty)$. **43. а)** $[-0{,}5;+\infty)$; **б)** $[1{,}5;+\infty)$. **44. а)** $\left(-\infty;\frac{14}{3}\right)$; **б)** $\left(\frac{11}{7};+\infty\right)$. **45. а)** $\{-1\}\cup[3;+\infty)$; **б)** $\{-2\}\cup[2;+\infty)$. **46. а)** $(-\infty;0{,}25]\cup[1;2]\cup\{3\}$; **б)** $(-\infty;-1{,}75]\cup[-1;0]\cup\{1\}$. **47. а)** $[-5;-0{,}5]\cup[0{,}5;5]$; **б)** $[-2;-0{,}2]\cup[0{,}2;2]$. **48. а)** $(-\infty;-1{,}25]\cup\{-0{,}5;0{,}5\}\cup[1{,}25;+\infty)$; **б)** $\left(-\infty;-\frac{5}{6}\right]\cup\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}\cup\left[\frac{5}{6};+\infty\right)$. **49. а)** $[-2;-1]\cup\left[\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right]$; **б)** $\left[-\frac{7}{4};-\frac{3}{4}\right]\cup[1;2]$. **50. а)** $\{-1;3\}\cup(-0{,}5;0]$; **б)** $\{-5;-1\}\cup(-4{,}5;-4]$. **51. а)** $(-\infty;1)\cup\{6\}\cup(11;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-13)\cup\{-7\}\cup(-1;+\infty)$. **52. а)** $(-\infty;-1{,}5)\cup(5;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-1{,}5)\cup(4;+\infty)$. **53. а)** $(-\infty;-2]\cup[0{,}4;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-2]\cup[0{,}6;+\infty)$. **54. а)** $(2;3{,}5)\cup(3{,}5;+\infty)$; **б)** $(4;5{,}5)\cup(5{,}5;+\infty)$. **55. а)** $\{2\}\cup[5{,}5;6]$; **б)** $\{1\}\cup[4{,}5;5]$. **56. а)** $\{-5;1;8\}$; **б)** $\{-4;1;9\}$. **57. а)** $(-\infty;-1)\cup\left(0{,}5;\frac{5}{3}\right)\cup(3{,}5;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-4)\cup\left(-2{,}5;-\frac{4}{3}\right)\cup(0{,}5;+\infty)$. **58. а)** $[-26;-25]$; **б)** $[50;52]$. **59. а)** $[2;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-1]$. **60. а)** $(-\infty;-4]\cup[-1;+\infty)$; **б)** $[1;5]$.

Диагностическая работа 6

Вариант 1

1. $[-3;0{,}8]$. **2.** $(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$. **3.** $(-\infty;0{,}75]$. **4.** $(-\infty;-1{,}5]\cup\{0{,}75\}$. **5.** $[4;5]$. **6.** $(-\infty;2]$. **7.** $(-\infty;-4]\cup[-2;-1{,}5]\cup[-1;+\infty)$. **8.** $\{3\}\cup[7{,}5;+\infty)$. **9.** $(-\infty;-1)\cup(-1;0]\cup[0{,}6;1)\cup\left(1;\frac{5}{3}\right]$. **10.** $\{-7;-3\}\cup(-6{,}5;-6]$. **11.** $[1;1{,}5]\cup\{4\}$. **12.** $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$.

Вариант 2

1. $[-6{,}5;1{,}5]$. **2.** $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **3.** $(-\infty;0{,}5]$. **4.** $(-\infty;-0{,}5]\cup\{0{,}25\}$. **5.** $[7;8]$. **6.** $(-\infty;2]$. **7.** $(-\infty;-2]\cup[-1;-0{,}75]\cup[-0{,}5;+\infty)$. **8.** $\{1\}\cup[2{,}5;+\infty)$. **9.** $(-\infty;-1)\cup(-1;0]\cup[0{,}8;1)\cup\left(1;\frac{5}{4}\right]$. **10.** $\{-6;-2\}\cup(-5{,}5;-5]$. **11.** $[1;2{,}5]\cup\{3\}$. **12.** $(-\infty;-6]\cup[6;+\infty)$.

Глава 5

Упражнения к § 5.1

1. а) $[2{,}25;+\infty)$; **б)** $(-\infty;1{,}75]$. **2. а)** $(-\infty;2{,}5)$; **б)** $(-3{,}5;+\infty)$. **3. а)** $(-\infty;-1{,}8]$; **б)** $[1{,}2;+\infty)$. **4. а)** $(-3{,}75;+\infty)$; **б)** $(-\infty;3{,}25)$. **5. а)** $\left[\frac{8}{7};+\infty\right)$; **б)** $\left(-\infty;-\frac{3}{7}\right]$. **6. а)** $\left(-\infty;\frac{7}{6}\right)$; **б)** $\left(-\frac{8}{9};+\infty\right)$. **7. а)** $\left\{-\frac{5}{3}\right\}$; **б)** $\left\{\frac{11}{6}\right\}$. **8. а)** решений нет; **б)** решений нет. **9. а)** $\left[\frac{1}{7};+\infty\right)$; **б)** $\left(-\infty;\frac{1}{9}\right]$. **10. а)** $(-\infty;11)$; **б)** $(-13;+\infty)$. **11. а)** $\{14\}$; **б)** $\{15\}$. **12. а)** решений нет. **б)** решений нет. **13. а)** $(1;+\infty)$; **б)** $(1;+\infty)$. **14. а)** $\left[\frac{8}{7};+\infty\right)$; **б)** $\left[\frac{6}{5};+\infty\right)$. **15. а)** $[73;+\infty)$; **б)** $[35;+\infty)$. **16. а)** решений нет; **б)** решений нет. **17. а)** $[0{,}5;+\infty)$; **б)** $(-\infty;0{,}5]$. **18. а)** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup(1;+\infty)$; **б)** $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(0{,}5;+\infty)$. **19. а)** $\left\{\frac{2}{3}\right\}$; **б)** $\left\{\frac{1}{7}\right\}$. **20. а)** $(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$; **б)** $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$. **21. а)** $\{0{,}5\}$; **б)** $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **22. а)** $(-\infty;-3)\cup(8;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-5)\cup(9;+\infty)$. **23. а)** $[-3;0]\cup[24;27]$; **б)** $[-4;0]\cup[12;16]$. **24. а)** $[3;4)\cup(4;5]$; **б)** $[4;5)\cup(5;6]$. **25. а)** $(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$; **б)** $(-\infty;1]\cup[8;+\infty)$. **26. а)** $[-13;-12]\cup[12;13]$; **б)** $[-13;-5]\cup[5;13]$. **27. а)** $(-4;-3]\cup[5;6)$; **б)** $(-3;-1]\cup[5;7)$. **28. а)** $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right]\cup[3;+\infty)$; **б)** $\left(-\infty;\frac{13}{4}\right]\cup[4;+\infty)$. **29. а)** $[-5;-3]\cup[3;5]$; **б)** $[-5;-4]\cup[4;5]$. **30. а)** $[0;1]\cup[27;28]$. **б)** $[0;3]\cup[9;12]$. **31. а)** $[-13;-9]\cup[3;7]$; **б)** $[-14;-10]\cup[2;6]$. **32. а)** $\{3\}$; **б)** $\{4\}$. **33. а)** $\{1\}$; **б)** $\{2\}$. **34. а)** $\{3\}\cup[5;28]$; **б)** $\{2\}\cup[8;18]$. **35. а)** $[-2;-0{,}5]$; **б)** $\{1\}$.

Диагностическая работа 7

Вариант 1

1. $(-\infty;-1)\cup(16;+\infty)$. **2.** $(-\infty;0{,}5]\cup[1;+\infty)$. **3.** $[0{,}8;2{,}6)$. **4.** $[1;2]\cup[5;6]$. **5.** $[1;2)\cup(2;3]$. **6.** $\{2\}$. **7.** $\left[\frac{6}{7};1\right)$. **8.** $[-10;-6]\cup[6;10]$. **9.** $\{7\}$. **10.** $\{1\}$. **11.** $\{3\}\cup[4;39]$. **12.** $[-2;-0{,}5]$.

Вариант 2

1. $(-\infty;-18)\cup(1;+\infty)$. **2.** $(-\infty;0{,}125]\cup[1;+\infty)$. **3.** $[3{,}5;11{,}5)$. **4.** $[-8;-7]\cup[1;2]$. **5.** $[2;3)\cup(3;4]$. **6.** $\{-1\}$. **7.** $\left[\frac{5}{6};1\right)$. **8.** $[-10;-8]\cup[8;10]$. **9.** $\{8\}$. **10.** $\{2\}$. **11.** $\{2\}\cup[7;11]$. **12.** $\{1\}$.

Упражнения к § 5.2

1. а) $(0;+\infty)$; **б)** $(0;+\infty)$. **2. а)** $\{0\}\cup[1;4]$; **б)** $\{0\}\cup[1;2]$. **3. а)** $\{2\}$; **б)** $\{-3\}$. **4. а)** $(-\infty;3]$; **б)** $(-\infty;2]$. **5. а)** $(-\infty;-3]\cup\{0\}\cup[3;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-4]\cup\{0\}\cup$

$\cup[4;+\infty)$. **6. а)** $\left[-5;-\frac{13}{8}\right]$; **б)** $\left[-5;\frac{4}{3}\right]$. **7. а)** $(1{,}5;6]$; **б)** $(1;2]$. **8. а)** $(-\infty;0{,}6]\cup$ $\cup[6;+\infty)$; **б)** $\left(-\infty;-\frac{38}{3}\right]\cup[2;+\infty)$. **9. а)** $\left[\frac{1}{6};4\right)$; **б)** $\left[-\frac{3}{8};1\right)$. **10. а)** $[-2{,}5;5)$; **б)** $[-4{,}5;3{,}2)$. **11. а)** $[1;9]$; **б)** $[-4;-2]$. **12. а)** $[2;+\infty)$; **б)** $[4;+\infty)$. **13. а)** $[0{,}45;1{,}25)\cup(2{,}25;+\infty)$; **б)** $\left[\frac{5}{12};0{,}75\right)\cup(1{,}75;+\infty)$. **14. а)** $\left(-\infty;-\frac{8}{3}\right)\cup$ $\cup\left(0;\frac{1}{3}\right]$; **б)** $\left(-\infty;-\frac{10}{3}\right)\cup\left(0;\frac{2}{5}\right]$. **15. а)** $\left(-\infty;-\frac{7}{3}\right]$; **б)** $(-\infty;-4{,}5]$. **16. а)** $(-\infty;0]\cup\{4\}$; **б)** $(-\infty;0]\cup\{2\}$. **17. а)** $\left(2;\frac{33}{7}\right)$; **б)** $(2;2{,}1)$. **18. а)** $(6;+\infty)$; **б)** $(7;+\infty)$. **19. а)** $\left[-\frac{13}{6};-2\right]\cup[2;+\infty)$; **б)** $[-1{,}25;-1]\cup[1;+\infty)$. **20. а)** $[3;7)$; **б)** $[2;6)$. **21. а)** $\{2\}$; **б)** $\{3\}$. **22. а)** $[2;2{,}5]\cup[3;7]$; **б)** $[-1;-0{,}5]\cup[3;12]$. **23. а)** $[1;1{,}5]\cup[10;26]$; **б)** $[-2;-1{,}5]\cup[7;23]$. **24. а)** $\left[-0{,}2;-\frac{1}{6}\right]\cup[0{,}25;0{,}5]$; **б)** $\left[-2;-\frac{5}{3}\right]\cup[2{,}5;5]$. **25. а)** $[2;11)$; **б)** $[1;10)$. **26. а)** $\left[\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$; **б)** $\left[\frac{2}{3};1\right)$. **27. а)** $[-4;-2{,}5]$; **б)** $[3;3{,}5]$. **28. а)** $(-\infty;-1]\cup(2;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-2]\cup(1;+\infty)$; **29. а)** $(-\infty;-3]\cup\left(\frac{4}{7};1\right)$; **б)** $(-\infty;-2]\cup\left(\frac{11}{7};2\right)$. **30. а)** $(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{3};1\right)$; **б)** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$. **31. а)** $(-\infty;-1{,}5]\cup\left[\frac{8}{3};+\infty\right)$; **б)** $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right]\cup[1;+\infty)$. **32. а)** $(-\infty;-2]\cup\{2\}$; **б)** $(-\infty;-8]\cup\{8\}$. **33. а)** $\{1\}\cup[2;+\infty\}$; **б)** $\{2\}\cup[3;+\infty\}$. **34. а)** $[-19;-3)\cup(-3;+\infty)$; **б)** $[-19;1)\cup(1;+\infty)$. **35. а)** $[1{,}5;2]$; **б)** $[-1{,}5;-1]$. **36. а)** $\{2\}$; **б)** $\{3\}$. **37. а)** $(2;+\infty)$; **б)** $(0;+\infty)$. **38. а)** $[-1;0]$; **б)** $[1;2]$. **39. а)** $[-0{,}7;-0{,}6]$; **б)** $[0{,}3;0{,}4]$. **40. а)** $[-1;0]\cup[1;+\infty)$; **б)** $[-2;0]\cup[2;+\infty)$. **41. а)** $[2;2{,}5]\cup[3;+\infty)$; **б)** $[1;1{,}5]\cup[2;+\infty)$. **42. а)** $\{4;5\}$; **б)** $\{2;3\}$. **43. а)** $[-4;4]\cup\{-7;7\}$; **б)** $[-5;5]\cup\{-6;6\}$. **44. а)** $[-13;-4]\cup\{13\}$; **б)** $[-7;-3]\cup\{7\}$. **45. а)** $\left\{-2;\frac{2}{3}\right\}$; **б)** $\left\{1;2\right\}$. **46. а)** $[-8;-1)\cup\{3\}$; **б)** $[-5;3)\cup$ $\cup\{4\}$. **47. а)** $[3;3{,}5]$; **б)** $[-2;-0{,}25]$. **48. а)** $(-\infty;-5)\cup[-4;-2]\cup\{2\}\cup[4;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-5)\cup[-4;-1]\cup\{1\}\cup[4;+\infty)$. **49. а)** $(-\infty;-2]\cup\{3\}\cup[15;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-4]\cup\{3\}\cup[6;+\infty)$. **50. а)** $[0;2]\cup(2{,}5;7)$; **б)** $[0;3]\cup(3{,}5;6)$. **51. а)** $\left[-\frac{1}{7};0\right]\cup\{5\}$; **б)** $\left[-\frac{4}{7};0\right]\cup\{3\}$. **52. а)** $\left[-\frac{1}{16};0\right)\cup(0;+\infty)$; **б)** $\left[-\frac{1}{5};0\right)\cup$ $\cup(0;+\infty)$. **53. а)** $(-\infty;1{,}5]\cup[2;2{,}5]$; **б)** $(-\infty;0{,}5]\cup[1;1{,}5]$. **54. а)** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$; **б)** $\left(-\infty;\frac{1}{6}\right]$. **55. а)** $\left\{\frac{3}{2}\right\}\cup[3;+\infty)$; **б)** $\left\{\frac{4}{3}\right\}\cup[3;+\infty)$. **56. а)** $[0{,}75;1]$; **б)** $[-1{,}25;-1]$. **57. а)** $\{2{,}5\}\cup[6;7]$; **б)** $\{0{,}5\}\cup[4;5]$. **58. а)** $\{0{,}2\}\cup(0{,}5;2]$; **б)** $\{-0{,}8\}\cup(-0{,}5;1]$. **59. а)** $[-6;2]\cup\{3\}$; **б)** $[-5;3]\cup\{4\}$. **60. а)** $\left[\frac{1}{49};4\right]$; **б)** $\left[\frac{49}{9};9\right]$. **61. а)** $[0;1]\cup\left[\frac{81}{16};+\infty\right)$; **б)** $\left[0;\frac{1}{16}\right]\cup[1;+\infty)$. **62. а)** $[-5;-3]\cup$ $\cup\{0\}\cup[3;5]$; **б)** $[-5;-4]\cup\{0\}\cup[4;5]$. **63. а)** $\left(-\frac{5}{14};-\frac{5}{17}\right)$; **б)** $\left(-\frac{101}{24};-\frac{257}{63}\right)$. **64. а)** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup(5;\infty)$; **б)** $(-\infty;-3]\cup(1{,}25;\infty)$. **65. а)** $[-12;-11]\cup\{-7\}\cup$ $\cup[-3;-2]$; **б)** $[-11;-9]\cup\{-6\}\cup[-3;-1]$. **66. а)** $[-1;3]\cup\{9\}\cup[15;19]$; **б)** $[-3;-1]\cup\{7\}\cup[15;17]$. **67. а)** $\{-2\}\cup[14;+\infty)$; **б)** $\{-3\}\cup[33;+\infty)$.

68. а) $[13;85]$; **б)** $[7;39]$. **69. а)** $\{-7;6\}$; **б)** $\{-5;6\}$. **70. а)** $\{-4;7\}$; **б)** $\{-5;8\}$. **71. а)** $[4;+\infty)$; **б)** $[6;+\infty)$. **72. а)** $[-2;2]$; **б)** $[-3;3]$. **73. а)** $\{-2;1{,}5\}$; **б)** $\{3;4\}$. **74. а)** $[-6;-2)$; **б)** $[-7;-3)$. **75. а)** $[2;6]$; **б)** $[3;12]$. **76. а)** $[-3;22]$; **б)** $[-2;-1{,}2]$. **77. а)** $(3;28]$; **б)** $(-1;15]$. **78. а)** $\left[1;\frac{8}{7}\right]$; **б)** $\left[1;\frac{9}{8}\right]$. **79. а)** $\{0\}$; **б)** $\{0\}$. **80. а)** $\{0\}$; **б)** $\{0\}$. **81. а)** $(0;2)$; **б)** $(0;3)$.

Диагностическая работа 8

Вариант 1

1. $(-\infty;0{,}3]\cup[3;+\infty)$. **2.** $[-0{,}8;-0{,}4]$. **3.** $\{1\}$. **4.** $\left[-\frac{13}{12};-1\right]\cup[1;+\infty)$. **5.** $\left[\frac{2}{3};\frac{11}{3}\right)$. **6.** $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$. **7.** $\{4\}\cup[8;+\infty)$. **8.** $[-3;3]\cup\{-10;10\}$. **9.** $(-\infty;1{,}5]$. **10.** $[-2{,}5;-1)\cup(0{,}5;2]$. **11.** $[-5;-4)$. **12.** $\{1\}$.

Вариант 2

1. $(-\infty;0{,}2]\cup[2;+\infty)$. **2.** $[0{,}5;4{,}5]$. **3.** $\{1\}$. **4.** $[-3{,}25;-3]\cup[-1;+\infty)$. **5.** $[0{,}2;2)$. **6.** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. **7.** $\{8\}\cup[12;+\infty)$. **8.** $[-2;2]\cup\{-9;9\}$. **9.** $(-\infty;0{,}5]$. **10.** $\left[-\frac{14}{3};-3\right)\cup\left(\frac{1}{3};2\right]$. **11.** $(4;5]$. **12.** $\{-1\}$.

Глава 6

Упражнения к § 6.1

1. а) $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\}$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\}$, $n\in\mathbb{Z}$.

2. а) $\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;-\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

3. а) $\left[-\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

4. а) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

5. а) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

6. а) $(-\pi-\arcsin 0{,}3+2\pi n;\arcsin 0{,}3+2\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$;
б) $(-\pi-\arcsin 0{,}4+2\pi n;\arcsin 0{,}4+2\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$.

7. а) $[-\pi+\arcsin 0{,}2+2\pi n;-\arcsin 0{,}2+2\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$;
б) $[-\pi+\arcsin 0{,}1+2\pi n;-\arcsin 0{,}1+2\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$.

8. а) $(-\arcsin 0{,}7+2\pi n;\pi+\arcsin 0{,}7+2\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$;
б) $(-\arcsin 0{,}6+2\pi n;\pi+\arcsin 0{,}6+2\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$.

9. а) $[\arcsin 0{,}4+2\pi n;\pi-\arcsin 0{,}4+2\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$;
б) $[\arcsin 0{,}9+2\pi n;\pi-\arcsin 0{,}9+2\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$.

10. а) $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$;
б) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.
11. а) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \arcsin 0{,}23+2\pi n\right)\cup\left(\pi-\arcsin 0{,}23+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}$;
б) $\left[-\arcsin 0{,}32+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \pi+\arcsin 0{,}32+2\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}$.
12. а) $[-\arcsin 0{,}12+2\pi n;\ \arcsin 0{,}34+2\pi n]\cup$
$\cup[\pi-\arcsin 0{,}34+2\pi n;\ \pi+\arcsin 0{,}12+2\pi n],\ n\in\mathbb{Z}$;
б) $[-\arcsin 0{,}43+2\pi n;\ \arcsin 0{,}21+2\pi n]\cup$
$\cup[\pi-\arcsin 0{,}21+2\pi n;\ \pi+\arcsin 0{,}43+2\pi n],\ n\in\mathbb{Z}$.
13. а) $x\neq\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; **б)** $x\neq 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
14. а) $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}$.
15. а) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}$.
16. а) $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.
17. а) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.
18. а) $(\arccos 0{,}11+2\pi n;\ 2\pi-\arccos 0{,}11+2\pi n),\ n\in\mathbb{Z}$;
б) $(\arccos 0{,}22+2\pi n;\ 2\pi-\arccos 0{,}22+2\pi n),\ n\in\mathbb{Z}$.
19. а) $(-\pi+\arccos 0{,}33+2\pi n;\ \pi-\arccos 0{,}33+2\pi n),\ n\in\mathbb{Z}$;
б) $(-\pi+\arccos 0{,}44+2\pi n;\ \pi-\arccos 0{,}44+2\pi n),\ n\in\mathbb{Z}$.
20. а) $[\pi-\arccos 0{,}71+2\pi n;\ \pi+\arccos 0{,}71+2\pi n],\ n\in\mathbb{Z}$;
б) $[\pi-\arccos 0{,}62+2\pi n;\ \pi+\arccos 0{,}62+2\pi n],\ n\in\mathbb{Z}$.
21. а) $[-\arccos 0{,}321+2\pi n;\ \arccos 0{,}321+2\pi n],\ n\in\mathbb{Z}$;
б) $[-\arccos 0{,}123+2\pi n;\ \arccos 0{,}123+2\pi n],\ n\in\mathbb{Z}$.
22. а) $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$;
б) $\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.
23. а) $\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ -\arccos 0{,}89+2\pi n\right]\cup\left[\arccos 0{,}89+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$;
б) $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ -\arccos 0{,}98+2\pi n\right]\cup\left[\arccos 0{,}98+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.
24. а) $[-\pi+\arccos 0{,}65+2\pi n;\ -\arccos 0{,}43+2\pi n]\cup$
$\cup[\arccos 0{,}43+2\pi n;\ \pi-\arccos 0{,}65+2\pi n],\ n\in\mathbb{Z}$;
б) $[-\pi+\arccos 0{,}56+2\pi n;\ -\arccos 0{,}34+2\pi n]\cup$
$\cup[\arccos 0{,}34+2\pi n;\ \pi-\arccos 0{,}56+2\pi n],\ n\in\mathbb{Z}$.
25. а) $\left[\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}$.
26. а) $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.
27. а) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}$.
28. а) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.

29. а) $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

30. а) $\left[\operatorname{arctg}2+\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[\operatorname{arctg}3+\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

31. а) $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ -\operatorname{arctg}3+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ -\operatorname{arctg}2+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

32. а) $\left(-\operatorname{arctg}5+\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(-\operatorname{arctg}4+\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

33. а) $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \operatorname{arctg}7+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \operatorname{arctg}6+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

34. а) $\left[-\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{3}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[-\dfrac{\pi}{3}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

35. а) $\left(-\dfrac{\pi}{6}+\pi n;\ \operatorname{arctg}7+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(-\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ \operatorname{arctg}8+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

36. а) $[-\operatorname{arctg}10+\pi n;\ \operatorname{arctg}4+\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$;
б) $[-\operatorname{arctg}4+\pi n;\ \operatorname{arctg}10+\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$.

37. а) $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

38. а) $\left[\dfrac{5\pi}{6}+\pi n;\ \pi+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[\dfrac{2\pi}{3}+\pi n;\ \pi+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

39. а) $\left(\pi n;\ \dfrac{3\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(\pi n;\ \dfrac{5\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

40. а) $\left(\dfrac{\pi}{3}+\pi n;\ \pi+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ \pi+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

41. а) $\left(\pi n;\ \dfrac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(\pi n;\ \dfrac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

42. а) $(\pi n;\ \pi-\operatorname{arcctg}2+\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $(\pi n;\ \pi-\operatorname{arcctg}3+\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$.

43. а) $(\pi-\operatorname{arcctg}5+\pi n;\ \pi+\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $(\pi-\operatorname{arcctg}4+\pi n;\ \pi+\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$.

44. а) $(\pi n;\ \operatorname{arcctg}0{,}2+\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $(\pi n;\ \operatorname{arcctg}0{,}1+\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$.

45. а) $[\operatorname{arcctg}12+\pi n;\ \pi+\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $[\operatorname{arcctg}13+\pi n;\ \pi+\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$.

46. а) $\left(\dfrac{\pi}{6}+\pi n;\ \dfrac{3\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ \dfrac{5\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

47. а) $\left[\operatorname{arcctg}6+\pi n;\ \dfrac{2\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[\dfrac{\pi}{3}+\pi n;\ \pi-\operatorname{arcctg}6+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

48. а) $[\operatorname{arcctg}30+\pi n;\ \pi-\operatorname{arcctg}20+\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$;
б) $[\operatorname{arcctg}20+\pi n;\ \pi-\operatorname{arcctg}30+\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$.

49. а) $\left[\dfrac{\pi}{4}+2\pi n;\ \dfrac{\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[\dfrac{\pi}{6}+2\pi n;\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

50. а) $[\arcsin 0{,}75+2\pi n;\ \arccos 0{,}6+2\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$;
б) $[\arcsin 0{,}55+2\pi n;\ \arccos 0{,}8+2\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$.

51. а) $\left[\pi-\arcsin\dfrac{5}{13}+2\pi n;\ 2\pi-\arccos\dfrac{11}{13}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$;
б) $\left[\pi-\arcsin\dfrac{12}{13}+2\pi n;\ 2\pi-\arccos\dfrac{4}{13}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

52. а) $[\operatorname{arctg}2{,}5+\pi n;\ \operatorname{arcctg}0{,}3+\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$;
б) $[\operatorname{arctg}1{,}25+\pi n;\ \operatorname{arcctg}0{,}7+\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$.

53. а) $\left[\dfrac{\pi}{4}+2\pi n;\ \dfrac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\ \dfrac{4\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\pi n;\ \dfrac{7\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$;

б) $\left[\dfrac{\pi}{6}+2\pi n;\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi n\right]\cup\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\ \dfrac{5\pi}{4}+2\pi n\right]\cup\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\pi n;\ \dfrac{11\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

54. а) $[\operatorname{arcctg} 7+2\pi n;\ \arcsin 0{,}7+2\pi n]\cup[\pi-\arcsin 0{,}7+2\pi n;\ \pi+2\pi n)\cup$
$\cup[\pi+\operatorname{arcctg} 7+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n),\ n\in\mathbb{Z}$;
б) $[\operatorname{arcctg} 8+2\pi n;\ \arcsin 0{,}8+2\pi n]\cup[\pi-\arcsin 0{,}8+2\pi n;\ \pi+2\pi n)\cup$
$\cup\pi+\operatorname{arcctg} 8+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n),\ n\in\mathbb{Z}$.

Диагностическая работа 9

Вариант 1

1. $\left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;-\frac{\pi}{4}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$. **2.** $(-\arcsin 0{,}77+2\pi n;\ \pi+\arcsin 0{,}77+2\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$. **3.** $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\arcsin 0{,}07+2\pi n\right)\cup\left(\pi-\arcsin 0{,}07+2\pi n;\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$. **4.** $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{11\pi}{6}+2\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$. **5.** $[-\pi+\arccos 0{,}78+2\pi n;\pi-\arccos 0{,}78+2\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$. **6.** $\left(\arccos 0{,}17+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ 2\pi-\arccos 0{,}17+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **7.** $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-\frac{\pi}{3}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$. **8.** $\left(\operatorname{arctg} 18+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **9.** $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\operatorname{arctg} 3+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **10.** $\left(\frac{2\pi}{3}+\pi n;\pi+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **11.** $(\pi n;\ \operatorname{arcctg} 2{,}2+\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$. **12.** $\left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \pi-\operatorname{arcctg} 9+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Вариант 2

1. $\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$. **2.** $(-\arcsin 0{,}88+2\pi n;\ \pi+\arcsin 0{,}88+2\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$. **3.** $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\arcsin 0{,}06+2\pi n\right)\cup\left(\pi-\arcsin 0{,}06+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$. **4.** $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{7\pi}{4}+2\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$. **5.** $[-\pi+\arccos 0{,}69+2\pi n;\pi-\arccos 0{,}69+2\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$. **6.** $\left(\arccos 0{,}19+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ 2\pi-\arccos 0{,}19+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **7.** $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-\frac{\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$. **8.** $\left(\operatorname{arctg} 15+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **9.** $\left[-\operatorname{arctg} 3+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **10.** $\left(\frac{5\pi}{6}+\pi n;\pi+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **11.** $(\pi n;\ \operatorname{arcctg} 1{,}1+\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$. **12.** $\left[\operatorname{arcctg} 8+\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Упражнения к § 6.2

1. а) $\left[\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}\right], n\in\mathbb{Z}$.
2. а) $\left(\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(\frac{2\pi n}{5};\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{5}\right), n\in\mathbb{Z}$.
3. а) $\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3};\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}\right), n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$.
4. а) $\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[\frac{2\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5};\frac{8\pi}{15}+\frac{2\pi n}{5}\right], n\in\mathbb{Z}$.

5. а) $\left[-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}\right), n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi n}{3}; \frac{7\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}\right), n\in\mathbb{Z}$.

6. а) $\left(\frac{8\pi}{15}+\frac{\pi n}{5}; \frac{2\pi}{3}+\frac{\pi n}{5}\right), n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(-\frac{9\pi}{40}+\frac{\pi n}{10}; -\frac{3\pi}{20}+\frac{\pi n}{10}\right), n\in\mathbb{Z}$.

7. а) $\left[-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right), n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[\frac{8\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}; \frac{10\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}\right), n\in\mathbb{Z}$.

8. а) $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{2\pi}{3}+\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

9. а) $\left[-\frac{\pi}{12}+\pi n; \frac{\pi}{12}+\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[-\frac{\pi}{8}+\pi n; \frac{\pi}{8}+\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

10. а) $\left[-\frac{3\pi}{8}+\pi n; \frac{3\pi}{8}+\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[-\frac{5\pi}{12}+\pi n; \frac{5\pi}{12}+\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

11. а) $\left[\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{7\pi}{6}+\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n; -\frac{\pi}{6}+\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

12. а) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

13. а) $\left[-\frac{\pi}{60}+\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{60}+\frac{\pi n}{5}\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{5}; \frac{7\pi}{60}+\frac{\pi n}{5}\right], n\in\mathbb{Z}$.

14. а) $\left(-\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi}{15}+\frac{2\pi n}{5}\right), n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(-\frac{2\pi}{21}+\frac{2\pi n}{7}; \frac{2\pi}{21}+\frac{2\pi n}{7}\right), n\in\mathbb{Z}$.

15. а) $(-0{,}5\arccos 0{,}3+\pi n; 0{,}5\arccos 0{,}3+\pi n), n\in\mathbb{Z}$;
б) $(-0{,}2\arccos 0{,}2+0{,}4\pi n; 0{,}2\arccos 0{,}2+0{,}4\pi n), n\in\mathbb{Z}$.

16. а) $\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}; \frac{5\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}\right), n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(-\frac{3\pi}{8}+\pi n; \frac{\pi}{8}+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$.

17. а) $\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n; \frac{7\pi}{3}+2\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$.

18. а) $\left[2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[-\pi+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

19. а) $\left[\frac{13\pi}{12}+2\pi n; \frac{31\pi}{12}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[\frac{\pi}{12}+2\pi n; \frac{7\pi}{12}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

20. а) $\left[-\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[\frac{\pi}{28}+\frac{\pi n}{7}; \frac{3\pi}{28}+\frac{\pi n}{7}\right], n\in\mathbb{Z}$.

21. а) $\left[-\pi+\arcsin\frac{1}{8}+2\pi n; -\arcsin\frac{1}{8}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$;
б) $\left[-\pi+\arcsin\frac{1}{12}+2\pi n; -\arcsin\frac{1}{12}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

22. а) $\left[\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$;
б) $\left[\arcsin\frac{3}{8}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \pi-\arcsin\frac{3}{8}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

23. а) $\{2\pi n\}; \left[\arccos\frac{2}{3}+2\pi n; 2\pi-\arccos\frac{2}{3}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$;
б) $\{2\pi n\}; \left[\arccos\frac{5}{7}+2\pi n; 2\pi-\arccos\frac{5}{7}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

24. а) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$;
б) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{11}+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$.

25. а) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \operatorname{arcctg} 0{,}8+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \operatorname{arcctg}\frac{7}{9}+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$.

26. а) $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

27. а) $\left[\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n; \pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

28. а) $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n; \pi n\right)\cup(\pi n; \operatorname{arcctg}3], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $[-\operatorname{arcctg}3; \pi n)\cup\left(\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

29. а) $\left[\frac{3\pi}{20}+\frac{2\pi n}{5}; \frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}; \frac{9\pi}{20}+\frac{2\pi n}{5}\right], n\in\mathbb{Z}$;

б) $\left[\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3}; \frac{7\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}\right], n\in\mathbb{Z}$.

30. а) $\left[\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}; \frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}\right], n\in\mathbb{Z}$;

б) $\left[\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{3}\right], n\in\mathbb{Z}$.

31. а) $\left[\frac{5\pi}{48}+\frac{\pi n}{4}; \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}; \frac{7\pi}{48}+\frac{\pi n}{4}\right], n\in\mathbb{Z}$;

б) $\left[\frac{3\pi}{20}+\frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}\right)\cup\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{5}\right], n\in\mathbb{Z}$.

32. а) $\left[-\frac{\pi}{40}+\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi n}{5}\right)\cup\left(\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{40}+\frac{\pi n}{5}\right], n\in\mathbb{Z}$;

б) $\left[-\frac{\pi}{72}+\frac{\pi n}{6}; \frac{\pi n}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi n}{6}; \frac{\pi}{72}+\frac{\pi n}{6}\right], n\in\mathbb{Z}$.

33. а) $\left[\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}; \frac{7\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}\right], n\in\mathbb{Z}$;

б) $\left[-\frac{\pi}{12}+\pi n; \pi n\right)\cup\left(\pi n; \frac{\pi}{12}+\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

34. а) $[2\pi n; \pi+2\pi n], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

35. а) $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\}\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{13\pi}{6}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$;

б) $\{2\pi n\}\cup\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

36. а) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{9\pi}{4}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

37. а) $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{13\pi}{6}+2\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$.

38. а) $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$.

39. а) $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

40. а) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

41. а) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$.

42. а) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{13\pi}{6}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

43. а) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

44. а) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n; \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$;

б) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n; \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$.

45. а) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n; 2\pi n\right)\cup(2\pi n; \pi+2\pi n)\cup\left(\pi+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right], n\in\mathbb{Z}$;

б) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\, 2\pi n\right)\cup(2\pi n;\, \pi+2\pi n)\cup\left(\pi+2\pi n;\, \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right],\, n\in\mathbb{Z}.$

46. а) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\, \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]\cup$ $\cup\{\pi+2\pi n\},\ n\in\mathbb{Z};$ **б)** $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;-\pi+2\pi n\right)\cup(-\pi+2\pi n;\, 2\pi n)\cup$ $\cup\left(2\pi n;\, \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\};\, n\in\mathbb{Z}.$

47. а) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\, \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right),\, n\in\mathbb{Z};$

б) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\, \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right),\, n\in\mathbb{Z}.$

48. а) $\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;-\pi+2\pi n\right)\cup\left(-\pi+2\pi n;-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\, 2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(2\pi n;\, \frac{\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z};$ **б)** $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\, 2\pi n\right)\cup\left(2\pi n;\, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\, \pi+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\, \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right),\, n\in\mathbb{Z};$

49. а) $[2\pi n;\, \pi+2\pi n],\, n\in\mathbb{Z};$ **б)** $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right],\, n\in\mathbb{Z}.$

50. а) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\, \frac{\pi}{6}+\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\, \frac{3\pi}{4}+\pi n\right],\, n\in\mathbb{Z};$

б) $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\, \frac{\pi}{4}+\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\, \frac{2\pi}{3}+\pi n\right],\, n\in\mathbb{Z}.$

51. а) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\, \frac{\pi}{6}+\pi n\right],\, n\in\mathbb{Z};$ **б)** $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n;\, \frac{\pi}{3}+\pi n\right],\, n\in\mathbb{Z}.$

52. а) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\, \frac{\pi}{6}+\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\, \frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\, \frac{3\pi}{4}+\pi n\right],\, n\in\mathbb{Z};$

б) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\, \frac{\pi}{6}+\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\, \frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\, \frac{2\pi}{3}+\pi n\right],\, n\in\mathbb{Z}.$

53. а) $\left[\operatorname{arctg}2+\pi n;\, \frac{\pi}{4}+\pi n\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+\pi n;\, \pi-\operatorname{arctg}2+\pi n\right],\, n\in\mathbb{Z};$

б) $\left[\operatorname{arctg}3+\pi n;\, \frac{\pi}{4}+\pi n\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+\pi n;\, \pi-\operatorname{arctg}3+\pi n\right],\, n\in\mathbb{Z}.$

54. а) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\, \pi+\pi n\right),\, n\in\mathbb{Z};$ **б)** $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\, \frac{\pi}{4}+\pi n\right),\, n\in\mathbb{Z}.$

55. а) $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\, \operatorname{arctg}4+\pi n\right],\, n\in\mathbb{Z};$ **б)** $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\, \operatorname{arctg}6+\pi n\right],\, n\in\mathbb{Z}.$

56. а) $[\operatorname{arctg}3+\pi n;\, \pi+\operatorname{arctg}2+\pi n],\, n\in\mathbb{Z};$

б) $[\operatorname{arctg}4+\pi n;\, \pi+\operatorname{arctg}3+\pi n],\, n\in\mathbb{Z}.$

57. а) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\, \operatorname{arctg}8+\pi n\right),\, n\in\mathbb{Z};$ **б)** $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\, \operatorname{arctg}7+\pi n\right),\, n\in\mathbb{Z}.$

58. а) $\left[2\pi n;\, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right],\, n\in\mathbb{Z};$ **б)** $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\, \pi+2\pi n\right],\, n\in\mathbb{Z}.$

59. а) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\, \pi+2\pi n\right),\, n\in\mathbb{Z};$ **б)** $\left(2\pi n;\, \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right),\, n\in\mathbb{Z}.$

60. а) $\left[-\pi+2\pi n; -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right] \cup \left\{\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n\right\} \cup \left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \pi+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$;

б) $\left[-\pi+2\pi n; -\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right] \cup \left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n; 2\pi n\right] \cup$
$\cup \left[\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

61. а) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{2\pi}{3}+\pi n\right] \cup \left(\frac{3\pi}{4}+\pi n; \pi+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$;

б) $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right) \cup \left[\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right) \cup \left[\frac{5\pi}{6}+\pi n; \pi+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

62. а) $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right\}$, $k\in\mathbb{Z}$; $\left\{\frac{2\pi n}{3}\right\}$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right\}$, $k\in\mathbb{Z}$; $\left\{\frac{\pi n}{2}\right\}$, $n\in\mathbb{Z}$.
63. а) $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi l\right\}$, $l\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi l\right\}$, $l\in\mathbb{Z}$. **64. а)** $\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi l\right\}$, $l\in\mathbb{Z}$; **б)** $\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi l\right\}$, $l\in\mathbb{Z}$. **65. а)** $\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi l\right\}$, $l\in\mathbb{Z}$; **б)** $\{\pi l\}$, $l\in\mathbb{Z}$. **66. а)** $(0; 3)$; **б)** $(0; 4)$. **67. а)** $\{0\}$; **б)** $\{0\}$. **68. а)** $\left[-\frac{4}{3}; -1\right]$; **б)** $\left[-\frac{1}{3}; 0\right]$. **69. а)** $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{9}{4}; +\infty\right)$; **б)** $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{9}{2}; +\infty\right)$. **70. а)** $\{-1\}$; **б)** $\{-3\}$. **71. а)** $\left[-\frac{10}{7}; -\frac{4}{3}\right]$; **б)** $\left[\frac{4}{7}; \frac{2}{3}\right]$. **72. а)** $[2; 2{,}2]$; **б)** $\left[3; \frac{23}{7}\right]$. **73. а)** $[-3; 2]$; **б)** $[-2; 3]$. **74. а)** $[0; 3]$; **б)** $\{6\}$. **75. а)** $\{-1\}$; **б)** $\{-1\}$. **76. а)** $\{1\}$; **б)** $\{1\}$. **77. а)** $[-1; \cos 3] \cup [\cos 1; 1]$; **б)** $[-1; \cos 3] \cup [\cos 2; 1]$. **78. а)** $\left[\sin\frac{1}{3}; \sin\frac{1}{2}\right]$; **б)** $\left[\sin\frac{1}{4}; \sin\frac{1}{2}\right]$. **79. а)** $(-\infty; \operatorname{tg} 3] \cup [\operatorname{tg} 4; +\infty)$; **б)** $(-\infty; \operatorname{tg} 2] \cup [\operatorname{tg} 5; +\infty)$. **80. а)** $[\operatorname{ctg} 5; \operatorname{ctg} 4]$; **б)** $[\operatorname{ctg} 10; \operatorname{ctg} 2]$.

Диагностическая работа 10

Вариант 1

1. $\left[-\frac{13\pi}{36}+\frac{\pi n}{6}; -\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi n}{6}\right]$, $n\in\mathbb{Z}$. **2.** $\left[-\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi n}{5}; \frac{4\pi}{15}+\frac{2\pi n}{5}\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.
3. $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **4.** $\left[-\frac{11\pi}{24}+\pi n; \frac{7\pi}{24}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.
5. $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n\right) \cup \left(\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$. **6.** $\left[\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}\right) \cup \left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{5}\right]$, $n\in\mathbb{Z}$. **7.** $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.
8. $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **9.** $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right] \cup \left[2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \pi+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$. **10.** $\{0\}$. **11.** $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sin\frac{1}{3}\right)$. **12.** $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Вариант 2

1. $\left(-\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{8}; -\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{8}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **2.** $\left[-\frac{5\pi}{32}+\frac{\pi n}{4}; \frac{\pi}{32}+\frac{\pi n}{4}\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.
3. $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **4.** $\left[-\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right]$, $n\in\mathbb{Z}$. **5.** $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n; \pi n\right) \cup \left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$. **6.** $\left[\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{3}\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

7. $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$. **8.** $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. **9.** $\left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi n; -\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$. **10.** $\{0\}$. **11.** $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\sin\frac{1}{4}\right)$. **12.** $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Глава 7

Упражнения к § 7.1

1. а) $(-\infty; 2]$; **б)** $(-\infty; 3]$. **2. а)** $[-2; +\infty)$; **б)** $[-1; +\infty)$. **3. а)** $(-\infty; 1{,}5)$; **б)** $(-\infty; 1{,}5)$. **4. а)** $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; **б)** $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **5. а)** $(-0{,}5; +\infty)$; **б)** $(-0{,}25; +\infty)$. **6. а)** $(0; +\infty)$; **б)** $(0; +\infty)$. **7. а)** $(-\infty; -1)$; **б)** $(-\infty; -1)$. **8. а)** $(-\infty; -2]$; **б)** $(-\infty; -2]$. **9. а)** $[1; 2]$; **б)** $[-2; -1]$. **10. а)** $(-\infty; -0{,}5)\cup(1; +\infty)$; **б)** $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)\cup(1; +\infty)$. **11. а)** $(-3; 3)$; **б)** $(-4; 4)$. **12. а)** $(-\infty; -0{,}5)\cup(2; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -2)\cup(0{,}5; +\infty)$. **13. а)** $\{2\}$; **б)** $\{3\}$. **14. а)** $(-\infty; 2]$; **б)** $(-\infty; 2]$. **15. а)** $[-0{,}2; +\infty)$; **б)** $[-0{,}2; +\infty)$. **16. а)** $(-\infty; 2)$; **б)** $(-\infty; 2)$. **17. а)** $(-\infty; -3]\cup[1; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -3]\cup[1; +\infty)$. **18. а)** $[19; +\infty)$; **б)** $[16; +\infty)$. **19. а)** $(-\infty; 1{,}6]$; **б)** $(-\infty; 1{,}75]$. **20. а)** $(-\infty; -2)\cup(2; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -3)\cup(3; +\infty)$. **21. а)** $(-0{,}4; 0{,}4)$; **б)** $(-2{,}5; 2{,}5)$. **22. а)** $(-\infty; 11]$; **б)** $(-\infty; 9]$. **23. а)** $[-3; +\infty)$; **б)** $[10; +\infty)$. **24. а)** $(-\infty; -2]$; **б)** $(-\infty; -6]$. **25. а)** $(-\infty; 0{,}75)\cup(2; +\infty)$; **б)** $(-\infty; 0{,}25)\cup(3; +\infty)$. **26. а)** $(-\infty; 0{,}125]$; **б)** $(-\infty; 0{,}25]$. **27. а)** $(-\infty; 10)$; **б)** $(-\infty; 14)$. **28. а)** $(0{,}5; 2)$; **б)** $(0{,}5; 2)$. **29. а)** $[-4; 6)$; **б)** $[-5; 7)$. **30. а)** $(14; 30)$; **б)** $(10; 26)$. **31. а)** $(6; 16)$; **б)** $(5; 15)$. **32. а)** $(7; 64)$; **б)** $(9; 125)$. **33. а)** $\{2\}\cup[3; 4]$; **б)** $\{3\}\cup[4; 5]$. **34. а)** $\{-5\}$; **б)** $\{6\}$. **35. а)** $[1; 3)$; **б)** $(1; 3]$. **36. а)** $\left[-\frac{4}{3}; -1\right]\cup\{1\}$; **б)** $[-1{,}5; -1]\cup\{1\}$. **37. а)** $\{1\}$; **б)** $\{1\}$. **38. а)** $(-7; -4]$; **б)** $(-7; -2]$.

Диагностическая работа 11

Вариант 1

1. $[-2; +\infty)$. **2.** $[0{,}2; 1]$. **3.** $(2; +\infty)$. **4.** $(1; 4)$. **5.** $(-\infty; -1)\cup\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$. **6.** $(-\infty; -12)\cup(12; +\infty)$. **7.** $(-\infty; -4]\cup[1; +\infty)$. **8.** $\{3\}$. **9.** $(0{,}5; 2)$. **10.** $(-61; 62]$. **11.** $(10; 12)$. **12.** $(8; 18)$.

Вариант 2

1. $[-1; +\infty)$. **2.** $[0{,}5; 1]$. **3.** $(2; +\infty)$. **4.** $(2; 5)$. **5.** $(-\infty; -1)\cup\left(\frac{7}{6}; +\infty\right)$. **6.** $(-\infty; -11)\cup(11; +\infty)$. **7.** $(-\infty; -4]\cup[1; +\infty)$. **8.** $\{2\}$. **9.** $(0{,}5; 2)$. **10.** $(-49; 50]$. **11.** $(14; 16)$. **12.** $(7; 17)$.

Упражнения к § 7.2

1. а) $\left(0; \frac{5}{3}\right]$; **б)** $\left(0; \frac{4}{3}\right]$. **2. а)** $(-\infty; 1) \cup (6; \infty)$; **б)** $(-\infty; 3) \cup (10; \infty)$. **3. а)** $(-\infty; -8] \cup [-5; 4{,}5)$; **б)** $[-8; -7] \cup (1{,}5; +\infty)$. **4. а)** $(-4; 4)$; **б)** $(-5; 5)$. **5. а)** $(-2; +\infty)$; **б)** $\left(-\frac{7}{9}; +\infty\right)$. **6. а)** $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$; **б)** $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$. **7. а)** $[4; 6)$; **б)** $[2; 6)$. **8. а)** $[4; +\infty)$; **б)** $[3; +\infty)$. **9. а)** $(-\infty; 3]$; **б)** $(-\infty; 4]$. **10. а)** $(2; +\infty)$; **б)** $(-2; +\infty)$. **11. а)** $(3{,}5; +\infty)$; **б)** $(-\infty; 2{,}5)$. **12. а)** $\left[-3; -2\sqrt{2}\,\right] \cup \left[2\sqrt{2}; 3\right]$; **б)** $\left[-4; -\sqrt{15}\,\right] \cup \left[\sqrt{15}; 4\right]$. **13. а)** $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$; **б)** $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **14. а)** $\left[-2; -\frac{4}{3}\right] \cup [-1; 1)$; **б)** $(-1; 1] \cup$ $\cup \left[\frac{4}{3}; 2\right]$. **15. а)** $(-2; -1)$; **б)** $(2; 4)$. **16. а)** $(-6; -2) \cup [2; +\infty)$; **б)** $(-6; 1) \cup$ $\cup [2; +\infty)$. **17. а)** $(1; 2] \cup [4; +\infty)$; **б)** $(1; 4] \cup [6; +\infty)$. **18. а)** $(1; 2)$; **б)** $(0; 3)$. **19. а)** $(-\infty; -2) \cup (1; 2)$; **б)** $(-\infty; -3) \cup (1; 3)$. **20. а)** $[-3; -1]$; **б)** $[-3; 0]$. **21. а)** $(-\infty; 1]$; **б)** $(-\infty; 4]$. **22. а)** $[-2; 3]$; **б)** $[-3; 1]$. **23. а)** $[-2; 0]$; **б)** $[-2; 1]$. **24. а)** $[-2; 2]$; **б)** $[-2; 3]$. **25. а)** $(-0{,}2; 1) \cup (2; 6)$; **б)** $(-0{,}75; 0) \cup (1; 2)$. **26. а)** $[5; 9]$; **б)** $[-4; -3]$. **27. а)** $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$; **б)** $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$. **28. а)** $(0; 5)$; **б)** $(0; 4)$. **29. а)** $[0; 2]$; **б)** $[-1; 1]$. **30. а)** $(-3; 0] \cup [2; 3)$; **б)** $(-5; 0] \cup [2; 5)$. **31. а)** $(25; +\infty)$; **б)** $(4; +\infty)$. **32. а)** $(-3; +\infty)$; **б)** $(-1; +\infty)$. **33. а)** $(0; 0{,}4]$; **б)** $(0; 0{,}2]$. **34. а)** $(-\sqrt{5}; -1] \cup [1; \sqrt{5})$; **б)** $(-\sqrt{13}; -2] \cup [2; \sqrt{13})$. **35. а)** $(-\infty; -\sqrt{10}] \cup \{-3; 3\} \cup [\sqrt{10}; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -2\sqrt{5}] \cup \{-4; 4\} \cup [2\sqrt{5}; +\infty)$. **36. а)** $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$. **37. а)** $[-1; 0]$; **б)** $[-1; 0]$. **38. а)** $(-\infty; 2] \cup \{3\} \cup [4; +\infty)$; **б)** $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$. **39. а)** $(-\infty; 0] \cup [1; 2]$; **б)** $(-\infty; 0] \cup [1; 2]$. **40. а)** $(-\infty; 0] \cup \{1\} \cup [\log_2 3; +\infty)$; **б)** $(-\infty; 0] \cup \{1\} \cup$ $\cup [\log_3 5; +\infty)$. **41. а)** $(-\infty; 1) \cup (\log_2 7; \log_2 10)$; **б)** $(-\infty; 0) \cup (\log_3 2; \log_3 5)$. **42. а)** $(-\infty; -0{,}5] \cup \{0\} \cup [\log_4 6; +\infty)$; **б)** $(-\infty; \log_3 0{,}6] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$. **43. а)** $[-3; 1)$; **б)** $[-3; 1)$. **44. а)** $(1; 3]$; **б)** $(-3; -1]$. **45. а)** $(-\infty; \log_7 4) \cup$ $\cup (1; +\infty)$; **б)** $(\log_6 5; 1)$. **46. а)** $(-\infty; 0] \cup (\log_6 4; 1)$; **б)** $(-\infty; 0] \cup (\log_3 2; 1)$. **47. а)** $\{0\} \cup (1; \log_2 3)$; **б)** $\{0\} \cup (\log_3 2; 1)$. **48. а)** $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; -1] \cup \{0\} \cup$ $\cup [1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$; **б)** $\left(-\infty; -\sqrt{2}\,\right) \cup \left(-\sqrt{2}; -1\right] \cup \{0\} \cup \left[1; \sqrt{2}\,\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$. **49. а)** $(-\infty; 0] \cup (1; \log_3 5)$; **б)** $(-\infty; 0] \cup (1; \log_4 6)$. **50. а)** $(-\infty; 0] \cup (0{,}5; 1)$; **б)** $[0; 0{,}5) \cup (1; \infty)$. **51. а)** $(1; 2) \cup \{4\}$; **б)** $(1; 2) \cup \{3\}$. **52. а)** $\{1\}$; **б)** $\{1\}$. **53. а)** $(0; 1)$; **б)** $(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$. **54. а)** $\{1\}$; **б)** $\{1\}$. **55. а)** $\{1\} \cup (2; \log_2 7]$; **б)** $\{1\} \cup (3; \log_2 9]$. **56. а)** $\{1\} \cup (3; \log_2 9]$; **б)** $\{1\} \cup (2; \log_2 7]$. **57. а)** $\{1\} \cup$ $\cup (2; \log_2 5]$; **б)** $\{1\} \cup (4; \log_2 17]$. **58. а)** $\{-1\} \cup (1; \log_3 4]$; **б)** $\{-1\} \cup (1; \log_3 5]$. **59. а)** $\{-3\}$; **б)** $\{-2\}$. **60. а)** $(-\infty; 0] \cup \{3\}$; **б)** $(-\infty; 0] \cup \{4\}$. **61. а)** $[-0{,}6; 1] \cup$ $\cup [4; +\infty)$; **б)** $[-1{,}25; 1] \cup [3; +\infty)$. **62. а)** $\{0\}$; **б)** $\{0\}$.

Диагностическая работа 12
Вариант 1

1. $[\log_3 0{,}7; +\infty)$. **2.** $[3; +\infty)$. **3.** $(-\infty; 2)$. **4.** $\{0\} \cup (1; 2)$. **5.** $[-1; 0]$. **6.** $(0; 2]$. **7.** $[-2{,}5; -1] \cup \{1\}$. **8.** $(-\infty; -1) \cup \{1\} \cup (2{,}5; +\infty)$. **9.** $(-\infty; 1] \cup [1{,}5; 2] \cup (5; +\infty)$. **10.** $[7; +\infty)$. **11.** $[1; 17]$. **12.** $\{1{,}5\}$.

Вариант 2

1. $[\log_{11} 2{,}5; +\infty)$. **2.** $[3; +\infty)$. **3.** $(-\infty; -2)$. **4.** $\{1\} \cup (2; 3)$. **5.** $[-1; 0]$. **6.** $(0; 2]$. **7.** $\{-1\} \cup [1; 3{,}5]$. **8.** $(-\infty; 1) \cup \{3\} \cup (4{,}5; +\infty)$. **9.** $(-\infty; -1] \cup [-0{,}5; 0] \cup (3; +\infty)$. **10.** $[8; +\infty)$. **11.** $[1; 26]$. **12.** $\{0{,}5\}$.

Глава 8

Упражнения к § 8.1

1. а) $(0; 25)$; **б)** $(0; 64)$. **2. а)** $(0; 27]$; **б)** $(0; 32]$. **3. а)** $[0{,}5; +\infty)$; **б)** $[0{,}2; +\infty)$. **4. а)** $[1; +\infty)$; **б)** $[1; +\infty)$. **5. а)** $\left(0; \frac{1}{49}\right)$; **б)** $\left(0; \frac{1}{64}\right)$. **6. а)** $(0; 25]$; **б)** $(0; 50]$. **7. а)** $(-1{,}25; 30)$; **б)** $(2{,}5; 43)$. **8. а)** $(25; +\infty)$; **б)** $(25; +\infty)$. **9. а)** $[3; +\infty)$; **б)** $[0{,}8; +\infty)$. **10. а)** $(10; +\infty)$; **б)** $(40; +\infty)$. **11. а)** $(1{,}5; 2)$; **б)** $(0{,}75; 1)$. **12. а)** $[5; +\infty)$; **б)** $[6; +\infty)$. **13. а)** $(-\infty; -13) \cup (13; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -13) \cup (13; +\infty)$. **14. а)** $(-10; -6) \cup (6; 10)$; **б)** $(-10; -8) \cup (8; 10)$. **15. а)** $(-5; 5)$; **б)** $(-8; 8)$. **16. а)** $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$. **17. а)** $[-2; -1{,}6) \cup (1{,}6; 2]$; **б)** $\left[-\frac{10}{7}; -\frac{6}{7}\right) \cup \left(\frac{6}{7}; \frac{10}{7}\right]$. **18. а)** $[-6; 6]$; **б)** $[-12; 12]$. **19. а)** $(-29; -20] \cup [20; 29)$; **б)** $(-26; -10] \cup [10; 26)$. **20. а)** $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$. **21. а)** $(-1; 0) \cup (8; 9)$; **б)** $(-1; 0) \cup (3; 4)$. **22. а)** $(0; 1) \cup$ $\cup (16; 17)$; **б)** $(0; 1) \cup (25; 26)$. **23. а)** $(-\infty; -8) \cup (2; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$. **24. а)** $[-4; -3{,}2) \cup (0; 0{,}8]$; **б)** $[-4; -2{,}2) \cup (0; 1{,}8]$. **25. а)** $(0; 1{,}5] \cup [4; 5{,}5)$; **б)** $(0; 1{,}5] \cup [3; 4{,}5)$. **26. а)** $[-0{,}8; 0) \cup (3{,}2; 4]$; **б)** $[-1{,}2; 0) \cup (1{,}8; 3]$. **27. а)** $(-\infty; -8) \cup (2{,}5; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -2) \cup (7{,}5; +\infty)$. **28. а)** $(-6; -4) \cup (2; 4)$; **б)** $(-3; -1) \cup (5; 7)$. **29. а)** $(-\infty; -1) \cup (4{,}5; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -1) \cup (5{,}5; +\infty)$. **30. а)** $(-\infty; -5{,}5] \cup [2; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -4] \cup [3{,}5; +\infty)$. **31. а)** $[-2; -1{,}2) \cup (2; 2{,}8]$; **б)** $[-3; -2{,}2) \cup (1; 1{,}8]$. **32. а)** $(1; 2{,}5] \cup [4; 5{,}5)$; **б)** $(1; 1{,}5] \cup [7; 7{,}5)$. **33. а)** $(-\infty; -2{,}2] \cup [2; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -1{,}8] \cup [3; +\infty)$. **34. а)** $(-1{,}4; 2)$; **б)** $(-1{,}2; 1)$. **35. а)** $(6{,}6; 22)$; **б)** $(4{,}4; 22)$. **36. а)** $(3{,}25; 15]$; **б)** $(3{,}4; 18]$. **37. а)** $[-1; -0{,}4) \cup (0{,}4; 1]$; **б)** $[-1; -0{,}75) \cup (0{,}75; 1]$. **38. а)** $(-\infty; -5) \cup (5; 9)$; **б)** $(-\infty; -5) \cup (5; 16)$. **39. а)** $(4; 5)$; **б)** $(6; 9)$. **40. а)** $(2{,}5; 5]$; **б)** $(3{,}5; 7]$. **41. а)** $[5; 6)$; **б)** $[5; 8)$. **42. а)** $(-\infty; -3) \cup (1; 3] \cup [4; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -4] \cup$ $\cup [-2; -1) \cup (6; +\infty)$. **43. а)** $(10; 12)$; **б)** $(14; 15)$. **44. а)** $(5; 6] \cup \{8\}$; **б)** $(3; 5] \cup$ $\cup \{8\}$. **45. а)** $(2; 3] \cup \{6\}$; **б)** $(3; 4] \cup \{7\}$. **46. а)** $\{-4; 2\}$; **б)** $\{-6; 2\}$. **47. а)** $\left(\frac{8}{3}; 3\right]$; **б)** $(4{,}5; 5]$. **48. а)** $\{-3\} \cup [-1{,}5; -0{,}5) \cup (1; 2]$; **б)** $\{-4\} \cup$ $\cup [-2{,}5; -1{,}5) \cup (1; 2]$.

Диагностическая работа 13

Вариант 1

1. $(4; +\infty)$. **2.** $(0{,}008; +\infty)$. **3.** $\left(\frac{14}{13}; 6\right]$. **4.** $(0{,}8; 8]$. **5.** $(-\infty; -4{,}5] \cup [3; +\infty)$. **6.** $(-25; -7) \cup (7; 25)$. **7.** $(-4; -3) \cup (0{,}5; 1{,}5)$. **8.** $(1{,}25; 8]$. **9.** $(-5; -4] \cup$ $\cup [-2; -1)$. **10.** $[16; 18]$. **11.** $\{-3; 3\}$. **12.** $\{-2\} \cup [2; 3]$.

Вариант 2

1. $(3;+\infty)$. **2.** $(0{,}25;+\infty)$. **3.** $\left(\frac{12}{11};4\right]$. **4.** $(-1{,}2;15]$. **5.** $(-\infty;-5]\cup[2{,}5;+\infty)$. **6.** $(-20;-12)\cup(12;20)$. **7.** $(-3;-2)\cup(0{,}2;1{,}2)$. **8.** $(0{,}25;7]$. **9.** $(-5;-3]\cup\cup[-1;1)$. **10.** $[16;32]$. **11.** $\{-4;4\}$. **12.** $\{-3\}\cup[3;4]$.

Упражнения к § 8.2

1. а) $(-\infty;-9)$; **б)** $(-\infty;-8)$. **2. а)** $(-6;-3{,}8)$; **б)** $(-5;0{,}4)$. **3. а)** $(18;19)$; **б)** $(13;14)$. **4. а)** $(0;2]$; **б)** $(6;9]$. **5. а)** $[-2;-0{,}5)\cup(-0{,}5;0)\cup(0;0{,}5)\cup(0{,}5;2]$; **б)** $[-5;-0{,}2)\cup(-0{,}2;0)\cup(0;0{,}2)\cup(0{,}2;5]$. **6. а)** $(-2{,}5;-2]\cup(1;2]$; **б)** $(-5{,}5;-5]\cup(-2;-1]$. **7. а)** $(-2;-1]\cup[4;8)$; **б)** $(-3;-2]\cup[3;7)$. **8. а)** $[-2;5)$; **б)** $[4;6)$. **9. а)** $[-2;8)\cup(8;9)$; **б)** $[-4;2)\cup(2;3)$. **10. а)** $(4;5)\cup\cup(5;10]$; **б)** $(1;2)\cup(2;3]$. **11. а)** $[-3;0)\cup[3;20)$; **б)** $[-2;0)\cup[2;15)$. **12. а)** $[-1;0)\cup(0;3]$; **б)** $[-1;0)\cup(0;4]$. **13. а)** $\left[-\frac{8}{7};-\frac{1}{7}\right)\cup(1;2]$; **б)** $\left[-\frac{9}{4};-\frac{1}{4}\right)\cup(1;3]$. **14. а)** $(0;1]$; **б)** $(0;1]$. **15. а)** $(1;40]$; **б)** $(-0{,}4;11{,}6]$. **16. а)** $(-\infty;-23)\cup[16;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-1)\cup[5;+\infty)$. **17. а)** $[-7;-5)\cup(-1;1]$; **б)** $[-11;-5)\cup(1;7]$. **18. а)** $[-7;-5)\cup(4;15]$; **б)** $[-10;-2)\cup(3;16]$. **19. а)** $(-2;-1)\cup[0{,}5;2]$; **б)** $(-3;-2)\cup[0{,}5;5]$. **20. а)** $\left(0;\frac{4}{7}\right)$; **б)** $\left(\frac{2}{3};1\right)\cup\cup(1;+\infty)$. **21. а)** $(-1;0)\cup(5;6]$; **б)** $[-5;-4)\cup(0;1)$. **22. а)** $(1;2]\cup[8;+\infty)$; **б)** $(-4;-3]\cup[5;+\infty)$. **23. а)** $(0;1)\cup(1;3]$; **б)** $(1;2)\cup(2;4]$. **24. а)** $(-1;0]\cup\cup(2;3)$; **б)** $(-3;-2]\cup(0;1)$. **25. а)** $(3;3{,}5]\cup\{4\}\cup(5;6)$; **б)** $(4;4{,}5]\cup\{5\}\cup(6;7)$. **26. а)** $\{-1\}\cup[0;1)\cup(1;2]$; **б)** $\{-3\}\cup[-2;-1)\cup(-1;0]$. **27. а)** $(-5;-4{,}5)\cup\cup\{-4\}\cup[-3;-2)\cup(-2;-1]$; **б)** $(3;3{,}5)\cup\{4\}\cup[5;6)\cup(6;7]$. **28. а)** $[-8;-4)\cup\cup(1;3)$; **б)** $[-7;-3)\cup(2;4)$. **29. а)** $(0;0{,}2)\cup(3;6)\cup(8;16)$; **б)** $\left(0;\frac{1}{7}\right)\cup(2;4)\cup\cup(9;18)$. **30. а)** $(-1;0)\cup(0;1)\cup\{3\}$; **б)** $(-1;0)\cup(0;1)\cup\{5\}$. **31. а)** $[-4;-2)\cup\cup(4;5]\cup(11;12)$; **б)** $[-7;-5)\cup(1;2]\cup(8;9)$. **32. а)** $\left(\frac{3}{7};\frac{5}{6}\right)$; **б)** $\left(\frac{5}{6};\frac{6}{5}\right)$. **33. а)** $(0;1)\cup(1;1{,}5]\cup(2;+\infty)$; **б)** $(1;2)\cup(2;2{,}5]\cup(3;+\infty)$. **34. а)** $(-5;-4{,}3)\cup\cup(-4{,}1;-4)\cup[0;0{,}25)\cup(1;1{,}25]$; **б)** $(-6;-5{,}9)\cup(-5{,}7;-5)\cup[0;0{,}2)\cup(1;1{,}2]$. **35. а)** $\left(-2;-\frac{5}{4}\right)\cup\left(-\frac{6}{5};-1\right)\cup\left[0;\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2};5\right]$; **б)** $\left(-3;-\frac{5}{2}\right)\cup\cup\left(-\frac{7}{3};-2\right)\cup\left[0;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};3\right]$. **36. а)** $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};1\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right]$; **б)** $\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{4}{3};\frac{3}{2}\right]$. **37. а)** $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right)$; **б)** $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{5}{4};+\infty\right)$. **38. а)** $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};5\right]$; **б)** $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{4}{3};\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2};6\right]$. **39. а)** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\sqrt{\frac{5}{8}}\right)\cup[-0{,}5;0{,}5]\cup\left(\sqrt{\frac{5}{8}};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; **б)** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cup\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]\cup\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. **40. а)** $\left[-\frac{8}{3};-\frac{5}{2}\right]\cup\left(-\frac{7}{3};-\frac{13}{6}\right)$; **б)** $\left[\frac{9}{4};\frac{7}{3}\right]\cup\left(\frac{5}{2};\frac{31}{12}\right)$. **41. а)** $(0;1)\cup[4;+\infty)$; **б)** $(0;1)\cup[6;+\infty)$. **42. а)** $(-1{,}4;-1{,}2)\cup[2;6)$; **б)** $(-2{,}4;-2{,}2)\cup[1;5)$. **43. а)** $\left(0;\frac{1}{16}\right)\cup(16;+\infty)$; **б)** $\left(0;\frac{1}{27}\right)\cup(27;+\infty)$.

44. а) $[-5;-0{,}2]\cup[0{,}2;5]$; **б)** $[-2;-0{,}5]\cup[0{,}5;2]$. **45. а)** $\left(\frac{1}{32};\frac{1}{2}\right)\cup(8;128)$; **б)** $\left(\frac{1}{16};\frac{1}{4}\right)\cup(1;4)$. **46. а)** $\left(0;\frac{1}{6}\right)\cup[6;+\infty)$; **б)** $(0;0{,}5)\cup[8;+\infty)$. **47. а)** $(1;10)$; **б)** $(1;10)$. **48. а)** $(0;0{,}1)\cup\{1\}\cup(10;+\infty)$; **б)** $(0;0{,}01)\cup\{1\}\cup(100;+\infty)$. **49. а)** $[0{,}25;1)\cup[2;16)$; **б)** $\left[\frac{1}{27};1\right)\cup[3;27)$. **50. а)** $(0;3]\cup(9;27)$; **б)** $(0;1]\cup$ $\cup(3;9)$. **51. а)** $\{3\}\cup(9;27)$; **б)** $\{2\}\cup(4;8)$. **52. а)** $[-2;12]$; **б)** $[-4;2]$. **53. а)** $(-7;-\sqrt{42}]\cup\{0\}\cup[\sqrt{42};7)$; **б)** $(-27;-18\sqrt{2}]\cup\{0\}\cup[18\sqrt{2};27)$. **54. а)** $[0{,}04;0{,}2]\cup[5;25]$; **б)** $\left[\frac{1}{27};\frac{1}{3}\right]\cup[3;27]$. **55. а)** $(0;2)$; **б)** $(0;3)$. **56. а)** $(-1;0)\cup(3;4)$; **б)** $(-1;0)\cup(4;5)$. **57. а)** $\left[\frac{1}{3};1\right)\cup[81;+\infty)$; **б)** $\left[\frac{1}{2};1\right)\cup$ $\cup[512;+\infty)$. **58. а)** $(1;2]\cup[512;+\infty)$; **б)** $(1;5]\cup[625;+\infty)$. **59. а)** $\left[\frac{1}{32};\frac{1}{2}\right]\cup$ $\cup[2;32]$; **б)** $\left[\frac{1}{27};\frac{1}{3}\right]\cup[3;27]$. **60. а)** $(0{,}125;0{,}5)\cup(8;32)$; **б)** $\left(\frac{1}{16};\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2};2\right)$. **61. а)** $(0;0{,}0001)\cup(0{,}0001;0{,}001]\cup\{0{,}01\}\cup[0{,}1;1)\cup(1;+\infty)$; **б)** $\left(0;\frac{1}{64}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{1}{64};\frac{1}{32}\right]\cup\left\{\frac{1}{8}\right\}\cup\left[\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$. **62. а)** $(-1{,}9;-1)\cup(-1;8]$; **б)** $(2{,}2;3)\cup$ $\cup(3;27]$. **63. а)** $\left(\frac{1}{16};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; **б)** $\left(\frac{1}{32};\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$. **64. а)** $(0;0{,}1]\cup$ $\cup(1;10)$; **б)** $(0;0{,}1]\cup(10;10\,000)$. **65. а)** $\{-0{,}5\}$; **б)** $\left\{\frac{2}{3}\right\}$. **66. а)** $(0;2{,}5)\cup$ $\cup(2{,}5;2{,}5\sqrt[3]{4})\cup(5\sqrt[3]{2};5\sqrt{2})\cup(5\sqrt{2};+\infty)$; **б)** $(0;1)\cup(1;\sqrt[3]{4})\cup(2\sqrt[3]{2};2\sqrt{2})\cup$ $\cup(2\sqrt{2};+\infty)$. **67. а)** $(0;0{,}5]\cup\{1\}\cup[64;+\infty)$; **б)** $\{1\}\cup[2;16]$. **68. а)** $\{0;4\}$; **б)** $\{0;2\}$. **69. а)** $(1{,}5;2)\cup(6;+\infty)$; **б)** $(0{,}5;1)\cup(5;+\infty)$. **70. а)** $[\log_2 0{,}8;0)\cup$ $\cup(0;2)\cup(2;4)\cup[5;+\infty)$; **б)** $[\log_2 0{,}1;-3)\cup(-3;-1)\cup(-1;1)\cup[2;+\infty)$. **71. а)** $\{0;2\}\cup[2{,}5;+\infty)$; **б)** $\{-1;1\}\cup[1{,}5;+\infty)$. **72. а)** $\{-3;0\}\cup[1;2)$; **б)** $\{-2;0\}\cup[4;6)$. **73. а)** $\{-1\}\cup(6;7)$; **б)** $\{-6\}\cup(3;4)$. **74. а)** $[-2;-1{,}2)\cup\{3\}$; **б)** $\{1\}\cup(3{,}3;4]$. **75. а)** $[2;4)\cup(8;+\infty)$; **б)** $[2;9)\cup(81;+\infty)$. **76. а)** $\{0;3\}$; **б)** $\{-1;2\}$. **77. а)** $(6;7)$; **б)** $(-2;-1)$. **78. а)** $\{-1\}\cup(1;2)$; **б)** $\{-2\}\cup(2;2{,}5]$. **79. а)** $\left(\frac{5}{3};2\right)\cup\{3\}$; **б)** $\left(\frac{8}{3};3\right)\cup\{4\}$. **80. а)** $\{3\}\cup(4;5)$; **б)** $\{2\}\cup(5;8)$. **81. а)** $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};-1\right]\cup\{0;2\}$; **б)** $\{-1;0\}\cup\left[4;\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)$. **82. а)** $\{-3;0\}\cup[2;4)$; **б)** $\{0\}\cup[1;3)$. **83. а)** $(15;16)$; **б)** $(25;26)$. **84. а)** $(2;11)$; **б)** $(3;5)$. **85. а)** $(0{,}9;2]$; **б)** $(0{,}7;2]$. **86. а)** $\{10\}$; **б)** $\{12\}$. **87. а)** $\{-2\}$; **б)** $\{3\}$. **88. а)** $\{-4\}\cup[3{,}5;4]$; **б)** $\{-3\}\cup[2{,}5;3]$.

Диагностическая работа 14

Вариант 1

1. $(0;20]$. **2.** $(0{,}2;25]$. **3.** $\left[\frac{1}{2};1\right)\cup[16;+\infty)$. **4.** $(0;2)\cup(10;12)$. **5.** $(1;2)\cup$ $\cup(2;2{,}5]\cup(3;+\infty)$. **6.** $\left(\frac{1}{4};2\right)\cup(12;+\infty)$. **7.** $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{8}{3};+\infty\right)$. **8.** $(-6;-5)\cup$ $\cup(-5;-3]$. **9.** $(1;2)$. **10.** $(-1;\log_3 2]\cup\{3\}$. **11.** $[10;24]$. **12.** $\{2\}$.

Вариант 2

1. $(0; 6]$. **2.** $(0{,}1; 10]$. **3.** $\left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup [512; +\infty)$. **4.** $(0; 1) \cup (6; 7)$. **5.** $(0; 1) \cup$ $\cup (1; 1{,}5] \cup (2; +\infty)$. **6.** $\left(\frac{1}{6}; 1\right) \cup (14; +\infty)$. **7.** $(-0{,}8; 0{,}6] \cup [1; +\infty)$. **8.** $(6; 7) \cup$ $\cup (7; 9]$. **9.** $(2; 3)$. **10.** $(2; \log_2 5] \cup \{4\}$. **11.** $[20; 25]$. **12.** $\{1\}$.