МАТЕМАТИКА

ЕГЭ 2018

ПРОФИЛЬНЫЙ 14

Под редакцией И. В. Ященко

Р. К. Гордин

ГЕОМЕТРИЯ. СТЕРЕОМЕТРИЯ

ФГОС

МАТЕМАТИКА

14

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

Р. К. Гордин

ЕГЭ 2018. Математика
Геометрия. Стереометрия

Задача 14 (профильный уровень)

Под редакцией И. В. Ященко

Издание соответствует новому Федеральному государственному
образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2018

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Г68

Гордин Р. К.

Г68 ЕГЭ 2018. Математика. Геометрия. Стереометрия. Задача 14 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2018. — 128 с.

ISBN 978-5-4439-1214-1

Пособия по математике серии «ЕГЭ 2018. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи 14 профильного уровня.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по стереометрии.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует новому Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включён в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

12+

ISBN 978-5-4439-1214-1

Предисловие

Это учебное пособие предназначено для подготовки к решению задачи 14 ЕГЭ по математике на профильном уровне.

Предполагается, что школьник освоил школьный курс стереометрии с оценкой не ниже 4. Перед работой с этим задачником необходимо повторить основные определения и теоремы из школьного учебника. Это также полезно и в процессе работы с пособием.

Пособие начинается с основных сведений о многогранниках. В первом параграфе собраны задачи, связанные с изображением пространственных фигур на плоскости и построением сечений многогранников. Следующие восемь параграфов содержат методы решения задач на доказательство и вычисление по стандартным темам ЕГЭ: угол между прямыми, угол между плоскостями, расстояния от точки до прямой и до плоскости, угол между прямой и плоскостью, расстояние между прямыми, площадь сечения, объёмы, фигуры вращения.

Каждый параграф начинается с повторения теории и нескольких примеров решения задач. Затем идут подготовительные задачи для самостоятельного решения. Как правило, эти задачи взяты из пособия В. А. Смирнова «Задача С2», издававшегося в предыдущие годы. Далее расположены задачи на доказательство (или на построение) и вычисление.

В § 10 рассматриваются задачи на вычисление элементов правильных пирамид и задачи повышенной трудности (задачи со звёздочкой).

В приложении рассматриваются примеры решения стереометрических задач методом координат.

Пособие завершают шесть диагностических работ, каждая из которых содержит по шесть задач, расположенных по возрастанию сложности. Если школьник решает четыре задачи за два часа, это можно считать вполне хорошим результатом.

Краткий список основных сведений о многогранниках

Диагональю многогранника называется отрезок, соединяющий две вершины, не лежащие в одной грани.

n-Угольной призмой называется многогранник, две грани которого — равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях (основания), а остальные n граней (боковые грани) — параллелограммы.

Призма называется *прямой*, если её боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания. В противном случае призма называется наклонной. Во всех задачах, связанных с призмой, будем считать, что $AA_1, BB_1, \ldots$ — боковые рёбра призмы $AB\ldots A_1B_1\ldots$

Прямая призма называется *правильной*, если её основание — правильный многоугольник.

Параллелепипедом называется призма, основание которой — параллелограмм.

Противоположные грани параллелепипеда попарно равны и параллельны. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Параллелепипед называется *прямым,* если его боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания.

Параллелепипед называется *прямоугольным*, если все его грани — прямоугольники. Длины трёх рёбер, исходящих из одной вершины, называются измерениями прямоугольного параллелепипеда.

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

Куб — это прямоугольный параллелепипед с равными измерениями.

n-Угольной пирамидой с вершиной S называется многогранник $SA_1\ldots A_n$, грань $A_1A_2\ldots A_n$ которого — n-угольник (основание пирамиды), а остальные n граней — треугольники A_1SA_2, A_2SA_3, ..., A_nSA_1 с общей вершиной S, лежащей вне плоскости основания (боковые грани).

Пирамида называется *правильной*, если её основание — правильный многоугольник, а высота пирамиды проходит через центр основания.

Боковые рёбра правильной пирамиды равны, боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Двугранные углы при основании равны, двугранные углы при боковых рёбрах равны.

Треугольную пирамиду называют также *тетраэдром* (четырёхгранником), а правильную треугольную пирамиду, все шесть рёбер которой равны, — *правильным тетраэдром*.

§ 1. Построения на проекционном чертеже (параллельная проекция)

Изображение пространственной фигуры на плоскости — это параллельная проекция этой фигуры на плоскость.

В дальнейшем используются свойства параллельных проекций, а также следующие факты.

1. Если две различные точки прямой принадлежит плоскости, то вся прямая лежит в этой плоскости (аксиома стереометрии).

2. Если две различные плоскости имеют общую точку, то их пересечение — прямая, проходящая через эту точку (аксиома стереометрии).

3. Если плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости β, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения параллельна прямой a.

4. Если пересекающиеся плоскости α и β проходят через параллельные прямые a и b соответственно, то прямая пересечения этих плоскостей параллельна прямым a и b.

5. Прямые пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.

6. Наклонная пересекает плоскость в точке, лежащей на любой параллельной проекции наклонной на эту плоскость.

Подготовительные задачи

Построение прямой пересечения двух плоскостей

1. Дана четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте прямую пересечения плоскостей AA_1C_1 и BB_1D_1 (т. е. на изображении призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте изображение прямой пересечения плоскостей AA_1C_1 и BB_1D_1).

2. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте прямую пересечения плоскостей BB_1D_1 и ABC_1.

3. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, M — точка пересечения медиан основания ABC. Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и A_1MC_1.

4. Четырёхугольник $ABCD$ — основание пирамиды $SABCD$. Постройте прямую пересечения плоскостей ASB и CSD, если: а) прямые AB и CD пересекаются; б) прямые AB и CD параллельны.

5. Основание пирамиды $SABCD$ — трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Точка M лежит на ребре SB. Постройте прямую пересечения плоскостей ADM и SBC.

6. Дана треугольная пирамида $ABCD$, M — точка пересечения медиан грани ABC. Постройте прямую пересечения плоскости ADC с плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым AC и BD.

7. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, M — точка, лежащая на ребре CC_1. Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BMA_1.

8. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки K, L и M лежат на рёбрах AD, CD и BB_1 соответственно. Постройте прямую пересечения плоскостей KLM и BB_1D_1D.

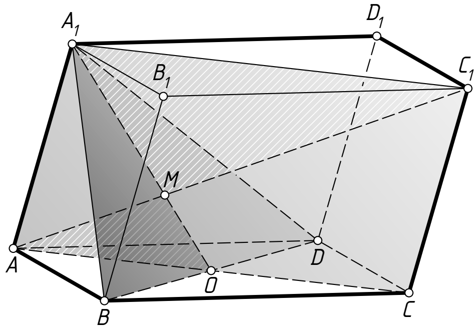
9. Основание пирамиды $SABCDEF$ — шестиугольник $ABCDEF$, противоположные стороны которого попарно равны и параллельны. Постройте прямую пересечения плоскостей ASD и CSF.

10. Дана шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, основания которой — правильные шестиугольники. Точка O — центр основания $ABCDEF$, M — середина бокового ребра DD_1. Постройте прямую пересечения плоскости $A_1B_1C_1$ с плоскостью, проходящей через точки O и M параллельно прямой AE.

Построение точки пересечения прямой с плоскостью

Пример 1. Докажите, что в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ AC_1 проходит через точку пересечения медиан треугольника BA_1D и делится ею в отношении $1:2$, считая от точки A.

Р е ш е н и е. Пусть O — центр параллелограмма $ABCD$. Тогда A_1O — медиана треугольника BA_1D. Поскольку A_1 и O — общие точки плоскостей BA_1D и AA_1C_1C, эти плоскости пересекаются по прямой A_1O. Прямые AC_1 и A_1O, лежащие в плоскости AA_1C_1C, пересекаются



в некоторой точке M. Тогда M — точка пересечения прямой AC_1 с плоскостью BA_1D.

Из подобия треугольников AMO и C_1MA_1 следует, что

$$\frac{AM}{MC_1} = \frac{OM}{MA_1} = \frac{OA}{A_1C_1} = \frac{OA}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Точка M лежит на медиане A_1O треугольника BA_1D и делит эту медиану в отношении $2:1$, считая от вершины. Следовательно, M — точка пересечения медиан треугольника BA_1D. ◁

1. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Точка M лежит на ребре BC, причём $BM:MC=1:2$. Постройте точку пересечения прямой, проходящей через точку M и середину ребра CD, с плоскостью ABD.

2. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M лежит на ребре AA_1. Постройте точку пересечения прямой DM с плоскостью $A_1B_1C_1$.

3. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, M — точка пересечения медиан грани ABC, точка N лежит на боковом ребре CC_1. Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью $A_1B_1C_1$.

4. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание которой — параллелограмм $ABCD$. Точка M лежит на боковом ребре SC. Постройте точку пересечения прямой BM с плоскостью ASD.

5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M лежит на ребре AA_1. Постройте точку пересечения прямой CM с плоскостью $A_1B_1C_1$.

6. Дана треугольная пирамида $ABCD$, M — точка пересечения медиан грани ABC. Постройте точку пересечения прямой, проходящей через точку B и середину отрезка DM, с плоскостью ACD.

7. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Точки K, L и M лежат на рёбрах AB, BC и CD соответственно. Постройте точку пересечения прямой KM с плоскостью ALD.

8. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Точка M лежит на боковом ребре SD. Постройте точку пересечения прямой BM с плоскостью ASC.

9. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M лежит на ребре DD_1. Постройте точку пересечения прямой DB_1 с плоскостью AMC.

10. Основание пирамиды $SABCDEF$ — шестиугольник $ABCDEF$, противоположные стороны BC и EF которого параллельны. Точка M лежит на ребре SC. Постройте точку пересечения прямой BM с плоскостью ESF.

Построение сечений многогранников

1. Постройте сечение треугольной пирамиды $DABC$ плоскостью, проходящей через следующие точки:

а) B, D и середину M ребра AC;

б) B и середины рёбер AD и CD;

в) середину K ребра AD и точки L и M, лежащие на продолжениях рёбер AB и AC за точки B и C;

г) середины рёбер BC, AD и точку L, лежащую на продолжении ребра AC за точку C;

д) середины K, L и M рёбер AD, AB и BC;

е) A, C и точку пересечения медиан грани ABD;

ж) середины рёбер AD, CD и точку M, лежащую на ребре BC, если $BL:LC=1:2$;

з) K, L и M, лежащие на рёбрах AD, AB и BC соответственно, если $AK:KD=BL:LA=BM:MC=1:2$;

и) точки пересечения медиан граней ABD, BCD и ABC;

к) середины рёбер BC, CD и точку, лежащую на медиане DM грани ABD.

2. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через следующие точки:

а) середины рёбер AB, AD и AA_1;

б) B, C и середину ребра A_1B_1;

в) A, C и середину ребра A_1B_1;

г) середины рёбер AA_1, AD и центр грани BB_1C_1C;

д) центры граней $ABCD$, AA_1B_1B и BB_1C_1C;

е) середины рёбер AB, BC и DD_1;

ж) середины рёбер A_1B_1, CC_1 и вершину A;

з) середину ребра CC_1 и точки K, L, лежащие на рёбрах AB и A_1B_1, если $BK:KA=A_1L:LB_1=1:2$;

и) середину ребра A_1B_1, вершину A и точку M на ребре B_1C_1, если $B_1M:MC_1=1:3$;

к) середины рёбер AD, CD и A_1B_1;

л) середины рёбер AB, BC и CC_1;

м) вершину B_1, центр грани $ABCD$ и середину ребра AA_1;

н) середины рёбер CD, BC и точку M, лежащую на продолжении ребра AA_1 за точку A_1, если $MA_1=\frac{1}{2}AA_1$;

о)* середины рёбер AD, CC_1 и A_1B_1.

3. Постройте сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через следующие точки:

а) середину ребра AA_1 и вершины B и C_1;

б) середины рёбер AA_1, B_1C_1 и вершину B;

в) центры граней AA_1B_1B, BB_1C_1C и точку M ребра BC, если $CM:MB=1:2$;

г) середины рёбер AB, A_1C_1 и CC_1;

д) середины рёбер AA_1, A_1C_1 и центр основания ABC;

е) центр грани AA_1B_1B, середину ребра B_1C_1 и точку M ребра A_1C_1, если $A_1M:MC_1=1:2$.

ж) центр основания ABC и центры боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C.

4. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через следующие точки:

а) A, B и середина ребра SD;

б) середины рёбер AB, BC и SC;

в) середины рёбер AB, BC и SD;

г) середины рёбер AB, AD параллельно ребру SC;

д) середины рёбер AD, SC и точку B;

е) середины рёбер AB, AD и SC;

ж) центр основания, середину ребра SD и точку M ребра SA, если $AM:MS=1:3$;

з) середину ребра SA и точки M и N рёбер SB и SC, если $BM:MS=$ $=SN:NC=1:2$.

5. Основание шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через следующие точки:

а) A, B и F_1;

б) A, C и D_1;

в) B, E и середину ребра FF_1;

г) B, D и середину ребра AA_1;

д) B, C и E_1;

е) B, C и середину ребра DD_1

ж) B, D и середину ребра FF_1.

6. Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через следующие точки:

а) C, F и середину ребра SD;

б) A, B и середину ребра SD;

в) центр основания параллельно плоскости ASB;

г) A, C и середину ребра SD;

д) B и середины рёбер AS и CS;

е) B, C и середину отрезка, соединяющего вершину пирамиды с центром основания.

Задачи на построение на проекционном чертеже и вычисление отношений отрезков

1.1. Точка M лежит на ребре AB треугольной пирамиды $ABCD$, причём $AM : MB = 1 : 2$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M и середины рёбер BC и AD.

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро CD?

1.2. Точка M — середина ребра AD треугольной пирамиды $ABCD$. Точки K и L лежат на прямых AB и AC соответственно, причём B — середина отрезка AK, а C — середина отрезка AL.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M, K и L.

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро BD?

1.3. Точки M и N — середины рёбер соответственно AB и BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M, N и D_1.

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро AA_1?

1.4. Точка M — середина ребра CD параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M, A_1 и C_1.

б) Пусть секущая плоскость пересекает прямую DD_1 в точке P. Найдите отношение $PD : PD_1$.

1.5. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$ с центром O. Точка M лежит на отрезке SO, причём $OM : MS = 1 : 2$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AM параллельно прямой BD.

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро SC?

1.6. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$ с центром O. Точка M — середина отрезка AO.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым SA и BD.

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро SC?

1.7. Точки M и N — середины рёбер соответственно CC_1 и AB треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M, N и A_1.

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро BC?

1.8. Точки M и N — середины рёбер соответственно AA_1 и AB треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M, N и C_1.

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро BC?

1.9. Основания шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1E_1F_1$ — правильные шестиугольники. Точка M — середина ребра AA_1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки C, D и M.

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро BB_1?

1.10. Основания шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1E_1F_1$ — правильные шестиугольники.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A, B и D_1.

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро FF_1?

1.11. Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точки M и N — середины рёбер BC и EF.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую MN параллельно ребру SA.

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро SC?

1.12. Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую BF параллельно ребру SA.

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро SC?

1.13. Точка M — середина ребра AD параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым BD и CB_1.

б) В каком отношении плоскость сечения делит диагональ AC_1 параллелепипеда?

1.14. Точка M — середина ребра AD параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M и B_1 параллельно прямой A_1C_1.

б) В каком отношении плоскость сечения делит диагональ BD_1 параллелепипеда?

1.15. Точки M и N — середины рёбер соответственно AB и CD треугольной пирамиды $ABCD$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку пересечения медиан треугольника ABC параллельно прямым AB и CD.

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок MN?

1.16. Точки M и N — середины рёбер соответственно AB и CD треугольной пирамиды $DABC$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра AD параллельно прямым AB и CD.

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок MN?

1.17. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание которой параллелограмм $ABCD$. Точка M — середина ребра AB.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым AC и SB.

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок, соединяющий точку D с серединой ребра SB?

1.18. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание которой параллелограмм $ABCD$. Точка M — середина ребра SD.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую BM параллельно прямой AC.

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок, соединяющий точку S с центром параллелограмма $ABCD$?

1.19. Точка M — середина ребра AB треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую A_1M параллельно прямой AC.

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок, соединяющий точку B_1 с серединой ребра AC?

1.20. Точки M и N — середины рёбер соответственно AC и BB_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей MNC_1 и $A_1B_1C_1$.

б) В каком отношении плоскость MNC_1 делит ребро AB?

1.21. Основания шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1E_1F_1$ — правильные шестиугольники. Точка M — середина ребра CC_1, O — центр грани $ABCDEF$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M, O и E_1.

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро EF?

1.22. Основания шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1E_1F_1$ — правильные шестиугольники. Точка M — середина ребра CC_1.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей D_1ME_1 и ABC.

б) В каком отношении плоскость D_1ME_1 делит диагональ B_1E призмы?

1.23. Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точки M и N — середины рёбер SA и SC.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M, N и B.

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок, соединяющий вершину S с центром основания пирамиды?

1.24. Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точка M — середина ребра BC.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей FSM и ASB.

б) В каком отношении плоскость FSM делит отрезок, соединяющий точку A с серединой ребра SD?

§ 2. Угол между прямыми

Углом между пересекающимися прямыми называется градусная мера наименьшего из углов, образованных при пересечении прямых.

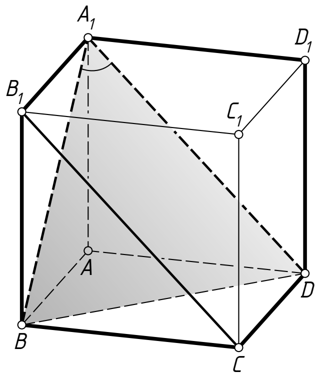
Угол между скрещивающимися прямыми определяется так. Либо через точку M, лежащую на одной из прямых, проводится прямая, параллельная второй, либо через точку M, не лежащую ни на одной из данных прямых, проводятся прямые, соответственно параллельные данным. В каждом из этих случаев углом между скрещивающимися прямыми называют угол между полученными пересекающимися прямыми.

В курсе геометрии доказывается, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки M.

Пример 1. Найдите угол между скрещивающимися диагоналями соседних граней куба.

Ответ: $60°$.

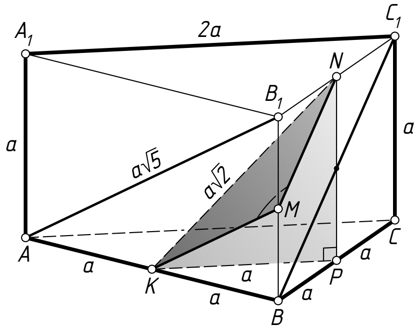
Р е ш е н и е. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдём угол между прямыми BA_1 и CB_1. Заметим, что $DA_1 \parallel CB_1$, значит, угол между скрещивающимися прямыми BA_1 и CB_1 равен углу между пересекающимися прямыми BA_1 и DA_1, т. е. углу BA_1D — углу равностороннего треугольника BA_1D. Следовательно, угол между скрещивающимися прямыми BA_1 и CB_1 равен $60°$. ◁



Пример 2. Найдите угол между скрещивающимися диагоналями двух боковых граней правильной треугольной призмы, боковое ребро которой вдвое меньше стороны основания.

Ответ: $\arccos \frac{1}{5}$.

Р е ш е н и е. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$, причём $AA_1 = a$, $AB = 2a$. Найдём угол между прямыми AB_1 и BC_1. Для этого отметим середины K, M и N рёбер AB, BB_1 и B_1C_1. Тогда KM и MN — средние линии треугольников ABB_1 и BB_1C_1, поэтому $KM \parallel AB_1$ и $MN \parallel BC_1$. Значит, угол между скрещивающимися прямыми AB_1 и BC_1 равен углу между пересекающимися прямыми MK и MN.



Пусть P — ортогональная проекция точки N плоскость ABC. Тогда P — середина ребра BC, а KP — средняя линия треугольника ABC, $KP = \frac{1}{2}AC = a$. Из прямоугольного треугольника KPN находим, что $KN = a\sqrt{2}$, а поскольку

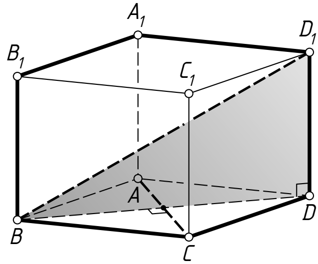
$$KM = MN = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$

то по теореме косинусов

$$\cos\angle KMN = \frac{\frac{5a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} - 2a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{5}. \qquad \triangleleft$$

Пример 3. Основание прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб $ABCD$. Найдите угол между прямыми BD_1 и AC.

Ответ: 90°.



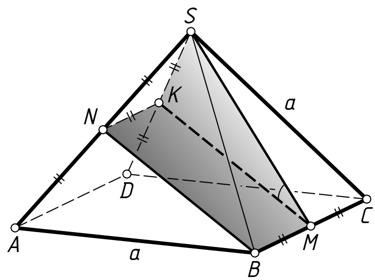
Р е ш е н и е. Диагональ BD ромба $ABCD$ — ортогональная проекция диагонали BD_1 параллелепипеда на плоскость ABC. Диагонали ромба перпендикулярны, значит, по теореме о трёх перпендикулярах $BD_1 \perp AC$. ◁

Пример 4. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равны. Точка M — середина стороны BC основания $ABCD$, точка N — середина бокового ребра SA. Найдите угол между прямыми SM и BN.

Ответ: $\arccos\frac{5}{6}$.

Р е ш е н и е. Пусть все рёбра пирамиды равны a. Отметим середину K бокового ребра SD. Отрезок NK — средняя линия треугольника ASD, поэтому $NK = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = BM$ и $NK \parallel AD \parallel BM$. Значит, $BMKN$ — параллелограмм. Тогда $MK \parallel BN$, следовательно, угол между скрещивающимися прямыми SM и BN равен углу между пересекающимися прямыми SM и MK, т. е. углу при вершине M треугольника SMK со сторонами $MK = SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $SK = \frac{a}{2}$. По теореме косинусов

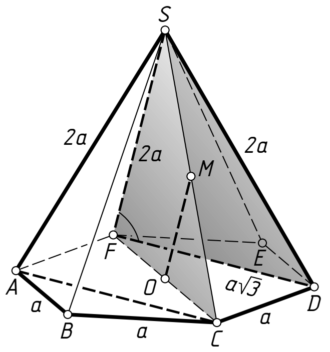
$$\cos\angle SMK = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2}{2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{6}.$$ ◁



Пример 5. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ вдвое больше стороны основания $ABCDEF$. Точка O — центр основания, точка M — середина бокового ребра SC. Найдите угол между прямыми OM и AC.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Р е ш е н и е. Положим $AB = a$, тогда $SA = 2a$. Угол между скрещивающимися прямыми OM и AC равен углу между пересекающимися прямыми SF и FD, соответственно параллельным OM и AC (OM —



средняя линия треугольника CSF). Поскольку $SF = SD = SA = 2a$, треугольник FDS равнобедренный с основанием $DF = a\sqrt{3}$. Следовательно, косинус искомого угла равен

$$\frac{\frac{1}{2}DF}{SF} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \qquad \triangleleft$$

Подготовительные задачи

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите углы между прямыми: а) AA_1 и BC; б) AA_1 и BD; в) AA_1 и BD_1; г) BA_1 и CB_1; д) CA_1 и BC_1.

2. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Точки K, M и N — середины рёбер BD, AB и AC соответственно. Найдите углы между прямыми: а) AB и CD; б) DM и BC; в) DM и BN; г) AK и BN.

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Все рёбра пирамиды равны, M — середина бокового ребра SD. Найдите углы между прямыми: а) AS и BD; б) AS и CD; в) SA и CM; г) SB и CM.

4. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Боковое ребро AA_1 равно стороне основания ABC. Точка M — середина ребра BC. Найдите углы между прямыми: а) AC и B_1C_1; б) AA_1 и BC_1; в) AM и BC_1; г) BC_1 и CA_1.

5. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Боковое ребро AA_1 равно стороне основания $ABCDEF$. Найдите углы между прямыми: а) EA_1 и AB; б) BE_1 и AF; в) BD_1 и CD; г) BE_1 и AB_1.

6. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Боковое ребро вдвое больше стороны основания. Найдите углы между прямыми: а) SB и AF; б) SC и AE; в) SB и AE; г) SB и AD.

Задачи на доказательство и вычисление

2.1. Дана треугольная пирамида $ABCD$.

а) Постройте её сечение плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно рёбрам AD и BC.

б) Найдите угол между прямыми AD и BC, если $AD=24$, $BC=10$, а расстояние между серединами рёбер BD и AC равно 13.

2.2. Точка K лежит на ребре AD треугольной пирамиды $ABCD$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через точку K параллельно рёбрам AB и CD.

б) Пусть M — точка пересечения плоскости α с ребром BC. Найдите угол между прямыми AB и CD, если K — середина ребра AD, $AB=8$, $CD=6$, $KM=5$.

2.3. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M — середина бокового ребра SC.

а) Постройте точку пересечения прямой BM с плоскостью грани ESF.

б) Найдите угол между прямыми BM и DE.

2.4. Точка G лежит на боковом ребре SC правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ с вершиной S.

а) Постройте точку пересечения прямой BG с плоскостью боковой грани ESF.

б) Найдите угол между прямыми BG и AD, если стороны основания пирамиды равны 6, боковые рёбра равны $3\sqrt{13}$, а $SG:GC=1:2$.

2.5. Основания призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонние треугольники. Точки M и M_1 — центры оснований ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно.

а) Докажите, что угол между прямыми BM и C_1M_1 равен $60°$.

б) Найдите угол между прямыми BM_1 и C_1M, если призма прямая и $AB:AA_1=3:2$.

2.6. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Точка M — середина ребра AB. Известно, что $AB=2AA_1$.

а) Докажите, что прямые A_1C и MB_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми AC_1 и MB_1.

2.7. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром 1.

а) Докажите, что плоскости ACA_1 и B_1CE_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми BF_1 и CD_1.

2.8. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

а) Докажите, что плоскости AB_1F и ACC_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми AB_1 и CF_1, если $AA_1 = AB\sqrt{2}$.

2.9. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка K лежит на ребре SD и отлична от S и D.

а) Может ли сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AB и точку K, быть параллелограммом?

б) Пусть K — середина ребра SD, M — середина ребра AB, а пирамида $SABCD$ правильная, причём все её рёбра равны. Найдите угол между прямыми AK и SM.

2.10. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка K — середина ребра SD.

а) Плоскость проходит через точку K параллельно медианам BM и SN граней BSC и ASD. Постройте прямую пересечения этой плоскости с плоскостью основания пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми BM и SN, если пирамида $SABCD$ правильная, причём все её рёбра равны.

2.11. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки K и L — центры граней BB_1C_1C и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Докажите, что точка пересечения прямой KL с плоскостью основания $ABCD$ равноудалена от вершин B и C.

б) Пусть M — середина ребра CD. Найдите котангенс угла между прямыми MD_1 и KL, если известно, что $AB = 2AA_1$.

2.12. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M — середина ребра A_1B_1.

а) Докажите, что любая плоскость, проведённая через точку M параллельно диагонали CA_1 параллелепипеда, проходит через центр грани BB_1C_1C.

б) Найдите угол между прямыми BM и CB_1, если параллелепипед прямоугольный, $AB = 2BC$ и $CC_1 : BC = 4 : 3$.

2.13. Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$, высота пирамиды проходит через точку D.

а) Докажите, что все боковые грани пирамиды — прямоугольные треугольники.

б) Пусть M — середина бокового ребра SC. Найдите угол между прямыми AM и BC, если известно, что отношение высоты пирамиды к стороне её основания равно $\sqrt{11}$.

2.14. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Точки M и N — середины рёбер AB и SC.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую MN параллельно SA.

б) Найдите угол между прямыми SA и MN, если боковое ребро пирамиды равно стороне основания.

2.15. В основании пирамиды $DABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Высота пирамиды проходит через точку B.

а) Докажите, что отрезок, соединяющий середины рёбер BC и AD, равен отрезку, соединяющему середины рёбер AB и CD.

б) Найдите угол между прямой BD и прямой, проходящей через середины рёбер BC и AD, если известно, что $BD = AC$.

2.16. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. На ребре BC взята точка M, причём $BM : CM = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через центры граней $A_1B_1C_1$ и BB_1C_1C параллельно ребру AC, проходит через точку M.

б) Пусть K — середина ребра A_1C_1, N — центр грани BB_1C_1C. Найдите угол между прямыми B_1K и MN, если $AC = 18\sqrt{3}$, $AA_1 = \sqrt{13}$.

2.17. Основание призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$.

а) Постройте точку пересечения прямой B_1E с плоскостью ACD_1.

б) Найдите угол между прямыми AB_1 и BD_1, если призма правильная, а $AA_1 : AB = \sqrt{3} : 1$.

2.18. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. Плоскость, проходящая через центр основания $A_1B_1C_1$ и середину K ребра BC, параллельна прямой AB. Эта плоскость пересекает прямую CC_1 в точке L.

а) Докажите, что $CL = 3CC_1$.

б) Найдите угол между прямыми KL и AC_1, если $\angle ACB = 90^\circ$ и $AA_1 = AC = \frac{1}{4}BC$.

2.19. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, причём $BC = 2AD$, и прямым углом при вершине A. Высота пирамиды проходит через точку A.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AD и середину M ребра SC, — прямоугольник.

б) Найдите косинус угла между прямыми AM и CD, если известно, что $AD = AB$ и $SA = \sqrt{3}AB$.

2.20. В основании пирамиды $SABCD$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Высота пирамиды проходит через точку A, SH — высота треугольника BSC. Известно, что $BC=2AD$, $AB=AD=2SA$.

а) Докажите, что $SH=CD$.

б) Найдите косинус угла между прямыми CD и SH.

2.21. Основание $ABCD$ прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб с острым углом 60° при вершине A. Точка M — середина ребра CD, точка H лежит на стороне AB, причём DH — высота ромба $ABCD$.

а) Докажите, что $D_1M \perp DH$.

б) Найдите угол между прямыми MD_1 и BC_1, если $\angle ABA_1 = 60^\circ$.

2.22. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 2BC$ и боковой стороной $AB=BC$.

а) Докажите, что $AB \perp DB_1$.

б) Найдите угол между прямыми CD_1 и DB_1, если боковая грань AA_1D_1D — квадрат.

2.23. Две правильные пирамиды $DABC$ и $FABC$ имеют общее основание ABC и расположены по разные стороны от него. Все плоские углы при вершинах D и F прямые.

а) Докажите, что угол между плоскостями ADB и AFB равен углу между прямыми CD и CF.

б) Найдите угол между прямыми AD и BF, если боковые рёбра каждой пирамиды равны 1.

2.24. Две правильные четырёхугольные пирамиды $EABCD$ и $FABCD$ имеют общее основание $ABCD$ и расположены по разные стороны от него. Точки M и N — середины рёбер BC и AB соответственно. Все рёбра пирамид равны.

а) Докажите, что угол между прямыми AE и BF равен 60°.

б) Найдите угол между прямыми EM и FN.

§ 3. Угол между плоскостями

Угол между пересекающимися плоскостями — это наименьший из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Если одну из плоскостей заменить на параллельную, то полученный угол будет равен данному.

Угол между плоскостями равен углу между прямыми, соответственно перпендикулярными эти плоскостям.

Чаще всего при вычислении угла между плоскостями либо строят линейный угол соответствующего двугранного угла, либо находят угол между перпендикулярами к этим плоскостям.

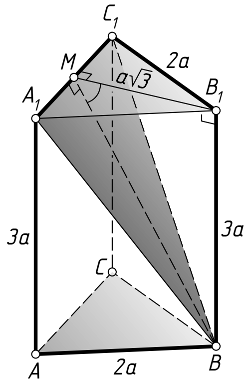
Две плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Признак перпендикулярности плоскостей. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой, то эти плоскости перпендикулярны.

Пример 1. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Её боковое ребро AA_1 относится к стороне основания как $3:2$. Найдите угол между плоскостью основания ABC и плоскостью A_1BC_1.

Ответ: 60°.

Р е ш е н и е. Плоскости оснований призмы параллельны, поэтому угол между плоскостями ABC и A_1BC_1 равен углу между плоскостями $A_1B_1C_1$ и A_1BC_1, которые пересекаются по прямой A_1C_1.



Пусть M — середина ребра A_1C_1. Тогда $B_1M \perp A_1C_1$ и $BM \perp A_1C_1$. Значит, BMB_1 — линейный угол искомого двугранного угла.

Положим $BB_1 = AA_1 = 3a$, тогда $A_1B_1 = AB = 2a$ и

$$B_1M = \frac{A_1B_1\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Значит,

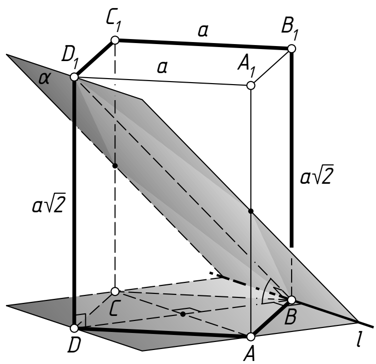
$$\operatorname{tg}\angle BMB_1 = \frac{BB_1}{B_1M} = \frac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Следовательно, $\angle BMB_1 = 60^\circ$. ◁

Пример 2. Через диагональ BD_1 правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ проведена плоскость α, параллельная прямой AC. Найдите угол между плоскостью α и плоскостью основания призмы, если $AB : AA_1 = 1 : \sqrt{2}$.

Ответ: 45°.

Р е ш е н и е. Плоскость ABC проходит через прямую AC, параллельную плоскости α, значит, прямая l пересечения плоскостей проходит через точку B параллельно AC. Поскольку $DB \perp AC$, а DB — ортогональная проекция наклонной D_1B на плоскость ABC, то $DB \perp l$ и по теореме о трёх перпендикулярах $D_1B \perp l$. Следовательно, DBD_1 — линейный угол искомого двугранного угла.



Положим $AB = a$, тогда $DD_1 = AA_1 = a\sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника DBD_1 находим, что

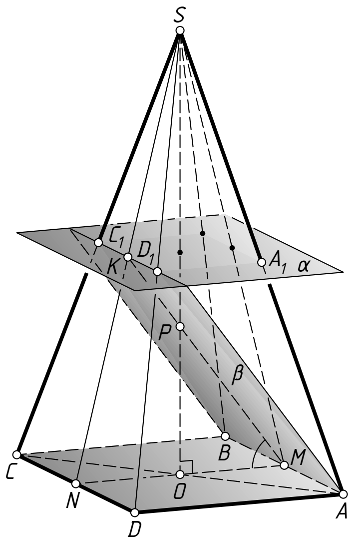
$$\operatorname{tg}\angle DBD_1 = \frac{DD_1}{DB} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1.$$

Следовательно, $\angle DBD_1 = 45^\circ$. ◁

Пример 3. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание которой — прямоугольник $ABCD$, а высота проходит через центр O основания. Через середину A_1 бокового ребра SA проведена плоскость α, параллельная плоскости основания, а через середину C_1 бокового ребра SC и ребро AB — плоскость β. Найдите угол между плоскостями α и β, если $AB:BC:SA=8:6:13$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Р е ш е н и е. Поскольку плоскость α параллельна плоскости основания пирамиды, прямая пересечения плоскости α с плоскостью CSD параллельна CD, а искомый угол равен углу между плоскостью β и плоскостью основания пирамиды.



Пусть плоскость α пересекает боковое ребро SD в точке D_1. Тогда C_1D_1 — средняя линия треугольника CSD, поэтому точка K пересечения отрезка C_1D_1 с медианой SN треугольника SCD — середина SN.

Пусть M — середина ребра AB. Плоскость MSN проходит через высоту SO пирамиды, а т. к. MK и SO — медианы треугольника MCN, то их точка пересечения P делит высоту SO в отношении $OP:PS=1:2$.

Прямая AB перпендикулярна плоскости MSN, т. к. она перпендикулярна двум пересекающимся прямым SM и MN этой плоскости. Значит, линейный угол искомого двугранного угла — это угол KMN.

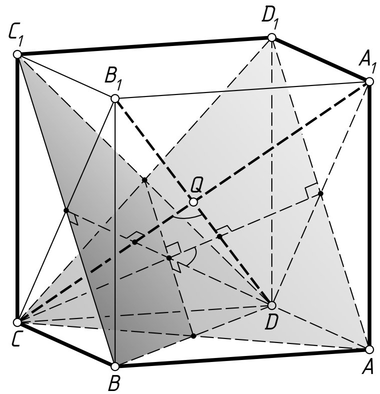
Положим $AB = 8a$, тогда $BC = 6a$, $SA = 13a$. По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников ABC и AOS находим, что $AC = 10a$ и $SO = 12a$. Тогда $PO = \frac{1}{3}SO = 4a$, а т. к. $OM = \frac{1}{2}MN = 3a$, то

$$\operatorname{tg}\angle KMN = \operatorname{tg}\angle PMO = \frac{PO}{OM} = \frac{4a}{3a} = \frac{4}{3}. \quad \triangleleft$$

Пример 4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями BC_1D и AD_1C.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

Р е ш е н и е. Прямая CA_1 перпендикулярна плоскости BC_1D, а прямая B_1D — плоскости AD_1C. Значит, угол между этими плоскостями равен углу между прямыми CA_1 и B_1D, т. е. углу между диагоналями прямоугольника A_1B_1CD.



Пусть ребро куба равно $2a$, а диагонали CA_1 и B_1D пересекаются в точке Q. Тогда

$$CA_1 = 2a\sqrt{3}, \quad DQ = QC = \frac{1}{2}CA_1 = a\sqrt{3}.$$

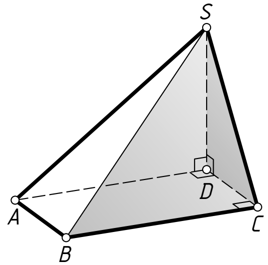
Из равнобедренного треугольника CQD находим, что

$$\cos\angle CQD = \frac{3a^2 + 3a^2 - 4a^2}{2 \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}. \quad \triangleleft$$

Пример 5. Основание пирамиды $SABCD$ — прямоугольник $ABCD$, боковое ребро SD перпендикулярно плоскости основания. Найдите угол между плоскостями BSC и CSD.

Ответ: 90°.

Р е ш е н и е. Прямая BC перпендикулярна плоскости CSD, т. к. она перпендикулярна двум пересекающимся прямым CD и SD этой плоскости. Плоскость BSC проходит через прямую BC, перпендикулярную плоскости CSD, следовательно, эти плоскости перпендикулярны. ◁



Подготовительные задачи

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями: а) BCC_1 и ABC_1; б) ABC и CB_1D_1; в) BA_1C_1 и AB_1D_1; г) ABC_1 и BCD_1.

2. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Точки K и M — середины рёбер BD и CD соответственно. Найдите углы между плоскостями: а) AKC и ABD; б) AMB и ABC; в) AKM и ABC;

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Все рёбра пирамиды равны, E — середина бокового ребра SC. Найдите углы между плоскостями: а) SAD и SBC; б) ABC и SCD; в) ABC и BDE; г) BSC и DSC; д) ABE и ABC.

4. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Боковое ребро AA_1 равно стороне основания ABC. Точка M — середина ребра BC. Найдите углы между плоскостями: а) AA_1M и ABC; б) ABC и CA_1B_1; в) ACB_1 и BA_1C_1; г) A_1C_1M и $A_1B_1C_1$.

5. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Боковое ребро AA_1 равно стороне основания $ABCDEF$. Найдите углы между плоскостями: а) ABC и DB_1F_1; б) AFF_1 и DEE_1; в) AFF_1 и BCC_1; г) AFF_1 и BDD_1.

6. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Боковое ребро вдвое больше стороны основания. Найдите углы между плоскостями: а) SBC и SEF; б) SAF и SBC; в) ABC и SEF; г) SBD и ABC.

Задачи на доказательство и вычисление

3.1. Основание пирамиды совпадает с одной из граней куба, а вершина — с центром противоположной грани.

а) Докажите, что пирамида правильная.

б) Найдите угол между плоскостями её соседних боковых граней.

3.2. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D. Точка M — середина ребра AB, N — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую CD.

а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой AB.

б) Найдите угол между боковыми гранями пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $60°$.

3.3. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Точка O — центр основания, K — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую SC.

а) Докажите, что прямая OK перпендикулярна прямой BD.

б) Найдите двугранный угол при боковом ребре пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $60°$.

3.4. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Диагонали AD и CE основания пересекаются в точке P, Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую SD.

а) Докажите, что прямая PQ перпендикулярна прямой CE.

б) Найдите двугранный угол при боковом ребре пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $60°$.

3.5. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1=1:2$.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

3.6. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1=1:3$.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

3.7. Основание пирамиды $SABCD$ — прямоугольник $ABCD$. Высота пирамиды лежит в грани CSD.

а) Докажите, что прямые AD и SC перпендикулярны.

б) Известно, что $AB:BC=2\sqrt{3}:1$, высота пирамиды проходит через середину ребра CD, а угол между боковой гранью BSC и плоскостью основания равен 45°. Найдите углы остальных боковых граней с плоскостью основания.

3.8. Основание пирамиды $ABCD$ — прямоугольный треугольник ABC. Высота пирамиды проходит через середину гипотенузы AB.

а) Докажите, что боковые рёбра пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания.

б) Известно, что $BC:AC=\sqrt{3}:1$, а угол между боковой гранью BDC и плоскостью основания равен 60°. Найдите углы двух других боковых граней с плоскостью основания.

3.9. Точки M и N — середины боковых рёбер соответственно AA_1 и CC_1 прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что отрезок, соединяющий вершину B_1 с серединой ребра AC, делится плоскостью BMN в отношении $2:1$, считая от точки B_1.

б) Найдите угол между плоскостями AA_1C_1 и MBN, если $AB=BC=$ $=15$, $AC=24$ и $AA_1=144$.

3.10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 5, боковые рёбра равны 2, точка D — середина ребра CC_1.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и ADB_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.

3.11. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S все рёбра равны.

а) Постройте прямую пересечения плоскости SAD с плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AS.

б) Найдите угол между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AS.

3.12. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром 1.

а) Докажите, что плоскости ACA_1 и B_1CE_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями B_1CE_1 и ABC.

3.13. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, а высота призмы равна 1. Точка E лежит на диагонали BD_1, причём $BE=1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью A_1C_1E.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

3.14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=4:3$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=5$, $AD=8$, $AA_1=14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении $2:5$.

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1.

3.15. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 4, а высота призмы равна $\sqrt{17}$. Точка E лежит на диагонали BD_1, причём $BE=1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью A_1C_1E.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью ABC.

3.16. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM=2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K=2$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью A_1C_1E.

б) Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1.

3.17. В треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SB, O — точка пересечения медиан основания.

а) Докажите, что плоскость CMK делит отрезок SO в отношении $3:2$, считая от вершины S.

б) Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если пирамида правильная, $SC=6$, $AB=4$.

3.18. Основание четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$ с центром O. Точка M — середина ребра SC, K — середина ребра SA.

а) Докажите, что плоскость BMK делит ребро SD в отношении $1:2$, считая от вершины S.

б) Найдите угол между плоскостями BMK и ABC, если пирамида правильная, $AB=10$, $SC=8$.

3.19. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через прямую BD_1 проведена плоскость α, параллельная прямой AC.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью α.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC, если $AB=a$, $BC=b$, $CC_1=c$.

3.20. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через прямую BD_1 проведена плоскость α, параллельная прямой AC. Сечение параллелепипеда плоскостью α — ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью BCC_1, если $AA_1:AB=3:2$.

§ 4. Расстояние от точки до прямой. Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Это расстояние удобно находить как высоту какого-то треугольника. Высота треугольника равна его удвоенной площади, делённой на основание. В частности, если треугольник прямоугольный, то его высота, опущенная на гипотенузу, равна произведению катетов, делённому на гипотенузу.

Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость. При вычислении этого перпендикуляра удобно использовать следующие простые соображения.

1. Расстояние от точки до плоскости не изменится, если эту точку сместить вдоль любой прямой, параллельной плоскости.

2. Если точки B и C лежат на прямой, пересекающей плоскость в точке A, то расстояния от точек B и C до плоскости относятся как $BA:CA$. В частности, если C — середина наклонной AB, то расстояние от точки C до плоскости вдвое меньше расстояния до этой плоскости от точки B, а если A — середина отрезка BC, то точки B и C равноудалены от плоскости.

Кроме того, полезен такой факт. Диагональ AC_1 в любом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точку пересечения медиан треугольника BA_1D и делится ею в отношении $1:2$, считая от вершины A. Если же $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, то эта диагональ перпендикулярна плоскости BA_1D, значит, расстояние от вершины A до этой плоскости равно трети диагонали, т. е. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, где a — длина ребра куба.

Пример 1. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB=5$, $BC=6$, $AA_1=6\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины C до диагонали DB_1 параллелепипеда.

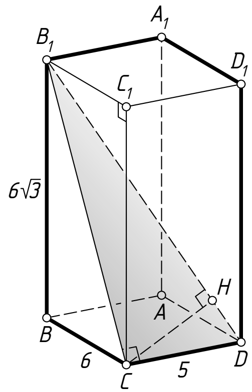
Ответ: $\frac{60}{13}$.

Р е ш е н и е. Прямая DC перпендикулярна плоскости BCC_1, значит, $DC \perp CB_1$. Из прямоугольных треугольников CC_1B_1 и DCB_1 находим, что

$$CB_1 = \sqrt{36+108} = 12, \quad DB_1 = \sqrt{144+25} = 13.$$

Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую DB_1. Тогда CH — высота прямоугольного треугольника DCB_1, опущенная на гипотенузу. Следовательно,

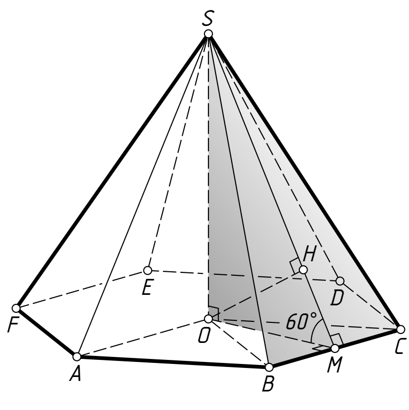
$$CH = \frac{CD \cdot CB_1}{DB_1} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}. \qquad \triangleleft$$



Пример 2. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Сторона основания пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 60°. Найдите расстояние от точки A до плоскости BSC.

Ответ: 3.

Р е ш е н и е. Пусть O — центр основания пирамиды. Поскольку прямая OA параллельна плоскости BSC, точки A и O равноудалены от этой плоскости. Опустим перпендикуляр OH из точки O на апофему SM пирамиды, лежащую в грани BSC. Тогда OH — перпендикуляр к плоскости BSC, а OMS — линейный угол двугранного угла при



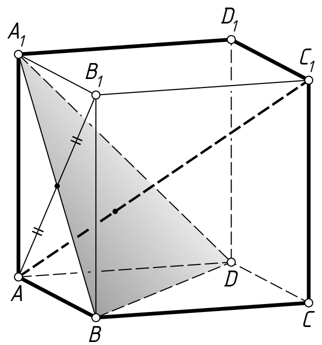
стороне BC основания пирамиды. По условию $\angle OMS = 60°$. Из прямоугольного треугольника OHM находим, что

$$OH = OM \sin\angle OMS = \frac{BC\sqrt{3}}{2}\sin 60° = \frac{4\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3. \qquad \triangleleft$$

Пример 3. Найдите расстояние от вершины B_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ до плоскости BA_1D.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

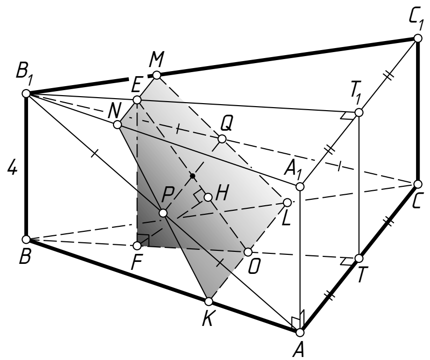
Р е ш е н и е. Отрезок AB_1 делится прямой BA_1, а значит, и плоскостью BA_1D, пополам. Следовательно, точки B_1 и A равноудалены от этой плоскости. Расстояние же от точки A до плоскости BA_1D, как было показано выше, равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\triangleleft$



Пример 4. Основание ABC прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC со сторонами $AB = BC$ и медианой $BT = 9$. Через точку O пересечения медиан треугольника ABC и центры P и Q боковых граней ABB_1A_1 и BCC_1B_1 соответственно проведена плоскость. Найдите расстояние от точки C до этой плоскости, если $AA_1 = 4$.

Ответ: 2,4.

Р е ш е н и е. Отрезок PQ — средняя линия треугольника AB_1C, поэтому прямая PQ параллельна ребру AC, а значит, и плоскостям ABC и $A_1B_1C_1$. Плоскость OPQ пересекает основания пирамиды по прямым, параллельным PQ. Пусть K и L — точки пересечения плоскости OPQ с рёбрами AB и BC соответственно. Тогда $\frac{AK}{KB} = \frac{CL}{LB} = \frac{OT}{OB} = \frac{1}{2}$. Пусть M и N — точки пересечения плоскости OPQ с рёбрами B_1C_1 и A_1B_1 соответственно, а E — точка пересечения медианы B_1T_1 основания $A_1B_1C_1$ с прямой MN. Тогда из равенства треугольников



B_1PN и AKP следует, что $NB_1 = AK$. Значит,

$$\frac{B_1M}{MC_1} = \frac{B_1N}{NA_1} = \frac{AK}{KB} = \frac{1}{2}.$$

Треугольник NB_1M подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом $\frac{NB_1}{A_1B_1} = \frac{1}{3}$, значит,

$$B_1E = \frac{1}{3}B_1T_1 = \frac{1}{3}BT = 3.$$

Опустим перпендикуляр EF из точки E на прямую BT. Тогда

$$EF = BB_1 = 4, \quad OF = BO - BF = BO - B_1E = 6 - 3 = 3,$$

$$EO = \sqrt{OF^2 + EF^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Пусть FH — высота прямоугольного треугольника EFO. Тогда $FH \perp EO$ и $FH \perp AC$, значит, FH — перпендикуляр к плоскости OPQ. Из равенства $OF \cdot EF = EO \cdot FH$ находим, что

$$FH = \frac{OF \cdot EF}{EO} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

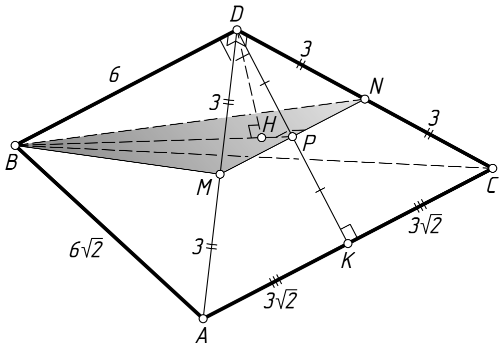
Следовательно, расстояние от точки F до плоскости OPQ равно $\frac{12}{5}$.

Отрезок BC пересекает плоскость OPQ в точке L, причём $\frac{BL}{LC} = 2$, значит, расстояние от точки C до плоскости OPQ вдвое меньше расстояния до этой плоскости от точки B, а т. к. F — середина BO, то искомое расстояние равно длине отрезка FH. ◁

Пример 5. Боковые рёбра DA, DB и DC правильной пирамиды $DABC$ попарно перпендикулярны. Найдите расстояние от точки C до плоскости, проходящей через точку B и середины рёбер DA и DC, если сторона основания пирамиды равна $6\sqrt{2}$.

Ответ: 2.

Р е ш е н и е. Пусть P — точка пересечения медианы DK грани ADC со средней линией MN треугольника ADC. Тогда P — середина DK. Точка N — середина ребра DC, поэтому точки C и D равноудалены от плоскости BMN. Следовательно, задача сводится к вычислению расстояния от точки D до этой плоскости.



Из равнобедренного прямоугольного треугольника ADB находим, что

$$DB = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6,$$

значит, $DA = DC = DB = 6$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым DA и DC плоскости ADC, поэтому BD — перпендикуляр к плоскости ADC, а треугольник BDP прямоугольный. Пусть DH — его высота. Поскольку $DH \perp BP$ и $DH \perp MN$, то DH — перпендикуляр к плоскости BMN. Значит, расстояние от точки D до плоскости BMN равно длине отрезка DH. Далее находим, что

$$DP = \frac{1}{2}DK = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad BP = \sqrt{BD^2 + DP^2} = \sqrt{36 + \frac{9}{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$DH = \frac{DB \cdot DP}{BP} = \frac{6 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}}{\frac{9}{\sqrt{2}}} = 2. \qquad \triangleleft$$

Подготовительные задачи

1. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите расстояния: а) от точки B до прямой DA_1; б) от точки A до прямой BB_1; в) от точки B_1 до прямой DA_1; г) от точки A до плоскости CB_1D_1; д) от точки A до плоскости BDC_1; е) от точки B до плоскости AB_1D_1; ж) от точки B до плоскости DA_1C_1.

2. Рёбра правильного тетраэдра $ABCD$ равны 1. Точка P — середина ребра AB. Найдите расстояния: а) от точки P до прямой CD; б) от точки A до плоскости BCD; в) от точки P до плоскости ADC; г) от центра грани ABC до плоскости BCD.

3. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 1. Точка E — середина бокового ребра SC. Найдите расстояния: а) от точки A до прямой SC; б) от точки E до прямой AB; в) от точки E до прямой BD; г) от точки A до плоскости BSD; д) от точки S до плоскости BED.

4. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1. Точка M — середина ребра BC. Найдите расстояния: а) от точки B до прямой AC_1; б) от точки A до прямой B_1C_1; в) от точки M до прямой A_1C_1; г) от точки A до плоскости BCA_1; д) от точки M до плоскости AB_1C_1.

5. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1. Найдите расстояния: а) от точки B до прямой A_1F_1; б) от точки B до прямой FE_1; в) от точки B до прямой AD_1; г) от точки A до прямой D_1F_1; д) от точки A до прямой B_1E; е) от точки A до плоскости DEA_1; ж) от точки A до плоскости DEF_1; з) от точки A до плоскости BFE_1; и) от точки A до плоскости BFA_1; к) от точки A до плоскости CEF_1.

6. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Стороны основания равны 1, боковые рёбра равны 2. Точка G — середина ребра SC. Найдите расстояния: а) от точки S до прямой BF; б) от точки B до прямой SA; в) от точки F до прямой BG; г) от точки A до прямой SD; д) от точки A до прямой SC; е) от точки A до плоскости SDE; ж) от точки A до плоскости SBF; з) от точки A до плоскости SCE.

Задачи на доказательство и вычисление

4.1. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание $ABCD$ — квадрат. Точка M — центр боковой грани BCC_1B_1.

а) Докажите, что плоскость A_1D_1M делит диагональ AC_1 в отношении $2:1$, считая от точки A.

б) Найдите расстояние от точки M до прямой BD_1, если сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 3.

4.2. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$. Точка M — центр боковой грани BCC_1B_1.

а) Постройте точку пересечения прямой A_1M с плоскостью ABC.

б) Найдите расстояние от точки M до прямой AB_1, если призма прямая, ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C, а диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны 17 и 15 соответственно.

4.3. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

а) Докажите, что плоскость CA_1F_1 делит ребро BB_1 пополам.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой A_1F_1, если стороны основания призмы равны 5, а боковые рёбра равны 11.

4.4. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S.

а) Докажите, что плоскость α, проходящая через ребро AB и середину ребра SE, делит ребро SC в отношении $2:1$, считая от вершины S.

б) Найдите расстояние от точки S до плоскости α, если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен $60°$.

4.5. Основание пирамиды $DABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Высота пирамиды проходит через середину ребра AC, а боковая грань ACD — равносторонний треугольник.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро BC и произвольную точку M ребра AD, — прямоугольный треугольник.

б) Найдите расстояние от вершины D до этой плоскости, если M — середина ребра AD, а высота пирамиды равна 6.

4.6. Основание пирамиды $SABCD$ — прямоугольник $ABCD$. Высота SH пирамиды лежит в плоскости CSD.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро BC и произвольную точку M ребра SA, отличную от S и A, — прямоугольная трапеция.

б) Найдите расстояние от вершины S до этой плоскости, если H — середина ребра CD, M — середина ребра SA, $SC = CD$ и $SH = 2\sqrt{3}$.

4.7. Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Боковое ребро SD перпендикулярно плоскости основания. Точка M — середина высоты пирамиды.

а) Докажите, что прямая SB параллельна плоскости ACM.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости ACM, если $AB = 8$, а угол между плоскостью ACM и плоскостью основания пирамиды равен $45°$.

4.8. Основание пирамиды $SABCD$ — прямоугольник $ABCD$. Боковое ребро SD перпендикулярно плоскости основания.

а) Докажите, что прямые SC и AD перпендикулярны.

б) Пусть M — середина высоты пирамиды. Найдите расстояние от точки B до плоскости ACM, если $AB=8$, $BC=6$, а синус угла между плоскостью ACM и плоскостью основания пирамиды равен $\frac{5}{6}$.

4.9. Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Высота пирамиды втрое больше стороны основания и проходит через точку E.

а) Докажите, что угол между боковой гранью ASB и плоскостью основания равен $60°$.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости ASB, если сторона основания пирамиды равна 4.

4.10. Основание шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$ с центром O. Отрезок OA_1 — высота призмы.

а) Докажите, что плоскость FF_1E перпендикулярна плоскости основания призмы.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости BCC_1, если сторона основания призмы равна $2\sqrt{3}$.

4.11. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

а) Докажите, что плоскость ADC_1 перпендикулярна плоскости FBB_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости ADC_1, если $AA_1=4$, а косинус угла между прямой AC_1 и плоскостью ABC равен $\frac{3}{\sqrt{13}}$.

4.12. Дана правильная четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания $\sqrt{2}$ и боковым ребром 2. Точки M и N — середины рёбер A_1B_1 и CC_1 соответственно.

а) Докажите, что $MN \perp BC_1$.

б) Найдите расстояние от точки M до плоскости BC_1D.

4.13. Основание пирамиды $SABCD$ — равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, причём $AD=2BC=2AB$. Высота SH пирамиды проходит через точку пересечения прямых AB и CD.

а) Докажите, что треугольник SBD прямоугольный.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости ASD, если $SH = BC = 4$.

4.14. Основание пирамиды $SABCD$ — прямоугольная трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием AD и прямым углом D. Высота SH пирамиды проходит через точку пересечения прямых AB и CD.

а) Докажите, что грань ASD — прямоугольный треугольник.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости ASD, если $AD = 3BC = 3$, $\angle BAD = 45°$ и $SH = 4$.

4.15. Боковые рёбра пирамиды $SABC$ с вершиной S попарно перпендикулярны.

а) Докажите, что высота SH пирамиды проходит через точку пересечения высот основания ABC.

б) Найдите SH, если боковые рёбра равны 2, 2 и $7\sqrt{2}$.

4.16. Боковые рёбра пирамиды $SABC$ с вершиной S попарно перпендикулярны, M — произвольная точка на ребре BC.

а) Докажите, что плоскости AMS и BSC перпендикулярны.

б) Высота SH пирамиды равна 12. Прямая AH пересекает ребро BC в точке K. Найдите расстояние от точки K до прямой AS, если $AS = 20$.

4.17. Плоскость проходит через середины боковых рёбер DA и DC треугольной пирамиды $DABC$ и точку пересечения медиан основания ABC.

а) Постройте точку пересечения этой плоскости с прямой DB.

б) Найдите расстояние от точки A до этой плоскости, если все рёбра пирамиды равны $3\sqrt{6}$.

4.18. Плоскость проходит через середины сторон AD и BC основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и точку пересечения медиан боковой грани CSD.

а) Постройте точку пересечения прямой AS с этой плоскостью.

б) Найдите расстояние от точки B до этой плоскости, если все рёбра пирамиды равны $2\sqrt{3}$.

4.19. Все грани параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равные ромбы, причём плоские углы при вершине C — острые.

а) Докажите, что $AA_1 \perp BD$.

б) Найдите расстояние от вершины C до плоскости $A_1B_1C_1$, если плоские углы при вершине C равны $60°$, а $AA_1 = \sqrt{6}$.

4.20. Основание наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник ABC. Боковые грани AA_1B_1B и AA_1C_1C — равные ромбы с острым углом при общей вершине A.

а) Докажите, что боковая грань BB_1C_1C — квадрат.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости BB_1C_1, если $\angle CAA_1 = 60°$, а сторона основания призмы равна $\sqrt{2}$.

4.21. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Боковые рёбра SA и SD равны. Точка M лежит на боковом ребре SC и не совпадает с его концами. Плоскость α проходит через точку M параллельно прямым BC и SA.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α — равнобедренная трапеция.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если боковая сторона этой трапеции равна меньшему основанию, а все рёбра пирамиды равны 1.

4.22. Точка K лежит на стороне AB основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, все рёбра которой равны. Плоскость α проходит через точку K параллельно плоскости ASD. Сечение пирамиды плоскостью α — четырёхугольник, в который можно вписать окружность.

а) Докажите, что $BK = 2AK$.

б) Найдите расстояние от вершины S до плоскости α, если все рёбра пирамиды равны 1.

4.23. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре B_1C_1 отмечена точка L так, что $B_1L = 1$. Точки K и M — середины рёбер AB и A_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка M, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

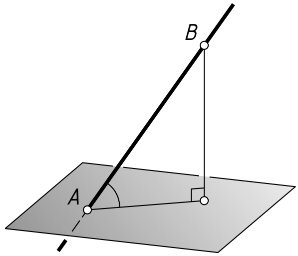
4.24. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC.

§ 5. Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и её ортогональной проекцией на плоскость.



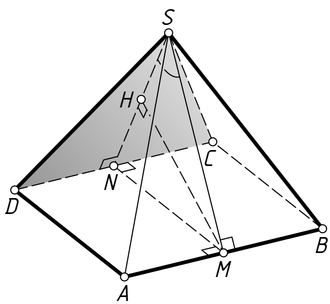
Если заменить прямую и плоскость на параллельные им прямую и плоскость, то угол между прямой и плоскостью не изменится.

Если наклонная пересекает плоскость в точке A, а B — произвольная точка этой наклонной, отличная от A, то синус угла между наклонной и плоскостью равен отношению расстояния от точки B до плоскости к длине отрезка AB. Задача на вычисление угла между наклонной с плоскостью чаще всего сводится в нахождению расстояния от точки до плоскости (см. предыдущую главу).

Пример 1. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ апофема равна стороне основания. Найдите угол между плоскостью CSD и апофемой пирамиды, содержащейся в плоскости ASB.

Ответ: $60°$.

Решение. Пусть M и N — середины рёбер AB и CD соответственно. Проведём высоту MH равнобедренного треугольника MSN. Прямая MH перпендикулярна двум пересекающимся прямым SN и CD плоскости CSD, значит, MH — перпендикуляр к этой плоскости, SH —

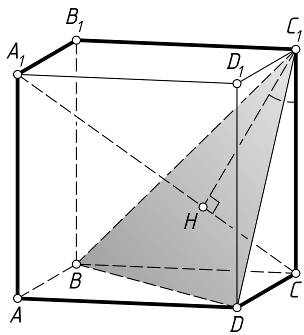


ортогональная проекция наклонной MS на плоскость CSD, а MSN — угол между наклонной MS и этой плоскостью. Поскольку $MN = MS = NS$, треугольник MSN равносторонний. Следовательно, $\angle MSN = 60^\circ$. ◁

Пример 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между ребром AA_1 и плоскостью BC_1D.

Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Р е ш е н и е. Поскольку $AA_1 \parallel CC_1$, искомый угол равен углу между наклонной CC_1 с плоскостью BC_1D.



Пусть ребро куба равно a, а диагональ CA_1 пересекает плоскость BC_1D в точке H. Диагональ CA_1 перпендикулярна плоскости BC_1D, поэтому C_1H — ортогональная проекция наклонной CC_1 на эту плоскость, а искомый угол — это угол CC_1H. Кроме того, диагональ CA_1 делится плоскостью BC_1D в отношении $1:2$, считая от вершины C. Из прямоугольного треугольника CHC_1 находим, что

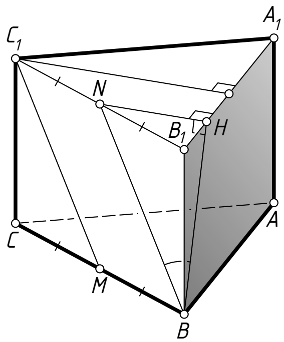
$$\sin \angle CC_1H = \frac{CH}{CC_1} = \frac{\frac{1}{3}CA_1}{CC_1} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Следовательно, $\angle CC_1H = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$. ◁

Пример 3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро относится к стороне основания как $1:\sqrt{2}$. Точка M — середина ребра BC. Найдите угол между прямой C_1M и плоскостью AA_1B_1.

Ответ: 30°.

Р е ш е н и е. Пусть N — середина ребра B_1C_1. Тогда BMC_1N — параллелограмм, поэтому $NB \parallel C_1M$. Значит, искомый угол — это угол между наклонной NB и плоскостью AA_1B_1.



Опустим перпендикуляр NH из точки N на прямую A_1B_1. Поскольку $NH \perp A_1B_1$ и $NH \perp AA_1$, прямая NH перпендикулярна плоскости AA_1B_1. Значит, искомый угол равен углу NBH.

Пусть $CC_1 = a$, тогда $A_1B_1 = a\sqrt{2}$. Перпендикуляр NH вдвое меньше высоты равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$, проведённой из вершины C_1, т. е.

$$NH = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Из прямоугольного треугольника BB_1N находим, что

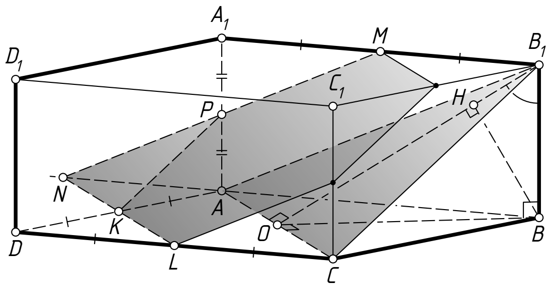
$$BN = \sqrt{NB_1^2 + BB_1^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Значит, $NH = \frac{1}{2}BN$. Следовательно, $\angle NBH = 30^\circ$. ◁

Пример 4. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырёхугольная призма с основанием $ABCD$. Точки K, L, M — середины рёбер AD, CD, A_1B_1 соответственно. Найдите угол между прямой BB_1 и плоскостью KLM, если $AA_1 : AB = 1 : \sqrt{6}$.

Ответ: 60°.

Р е ш е н и е. Пусть прямые KL и AB пересекаются в точке N, а прямая MN пересекает ребро AA_1 в точке P. Тогда точка P лежит в плоскости KLM, причём треугольник AKN равен треугольнику DKL, а треугольник APN — треугольнику A_1PM. Значит, P — середина ребра AA_1. Отрезки KL и PM — средние линии треугольников ADC и AA_1B_1, поэтому $KL \parallel AC$ и $PM \parallel AB_1$, т. е. две пересекающиеся прямые AC и AB_1 плоскости AB_1C соответственно параллельны двум пересекающимся прямым KL и PM плоскости KLM. Следовательно, эти плоскости параллельны, а значит, угол между прямой BB_1 и плоскостью KLM равен углу между этой прямой и плоскостью AB_1C.



Пусть O — центр квадрата $ABCD$, а BH — высота прямоугольного треугольника OBB_1. Тогда BH — перпендикуляр к плоскости AB_1C, HB_1 — ортогональная проекция наклонной BB_1 на эту плоскость, а $\angle BB_1H$ — угол между прямой BB_1 и этой плоскостью.

Пусть $BB_1 = AA_1 = a$, тогда $AB = a\sqrt{6}$ и

$$BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot AB\sqrt{2} = a\sqrt{3}.$$

Значит,

$$\operatorname{tg}\angle BB_1H = \operatorname{tg}\angle BB_1O = \frac{BO}{BB_1} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$

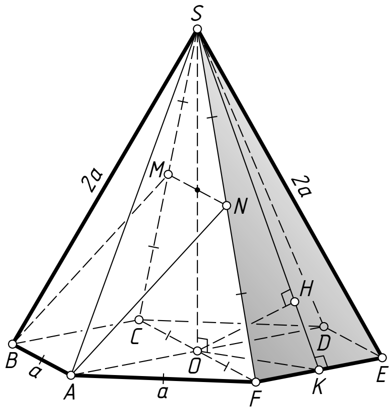
Следовательно, $\angle BB_1H = 60^\circ$. ◁

Пример 5. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ вдвое больше стороны основания $ABCDEF$. Точка M — середина бокового ребра SC. Найдите угол между прямой BM и плоскостью ESF.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Р е ш е н и е. Обозначим $AB = a$, $SC = 2a$. Пусть O — центр основания пирамиды, N — середина бокового ребра SF. Тогда MN — средняя линия равностороннего треугольника CSF. Поэтому $MN \parallel CF \parallel AB$ и $MN = \frac{1}{2}CF = AB = a$. Значит, $ABMN$ — параллелограмм, поэтому $AN = BM$ и $AN \parallel BM$. Следовательно, угол между прямой BM и плоскостью ASF равен углу между этой плоскостью и прямой AN.

Прямая OA параллельна плоскости ESF, значит, расстояние от точки A до плоскости ESF равно расстоянию до этой плоскости от точки O. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на медиану SK треугольника ESF. Тогда OH — перпендикуляр к плоскости ESF. Значит, синус искомого угла равен отношению $\frac{OH}{AN}$.



Рассмотрим прямоугольный треугольник SOK, в котором

$$SO = \frac{CF\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}, \quad OK = \frac{OF\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Отрезок OH — высота этого треугольника, проведённая из вершины прямого угла, поэтому

$$OH = \frac{SO \cdot OK}{SK} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{15}}{2}} = \frac{3a}{\sqrt{15}}.$$

По формуле для медианы треугольника

$$AN = \frac{1}{2}\sqrt{2SA^2 + 2AF^2 - SF^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 4a^2 + 2a^2 - 4a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Пусть искомый угол равен α. Тогда

$$\sin\alpha = \frac{OH}{AN} = \frac{\frac{3a}{\sqrt{15}}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}. \qquad \lhd$$

Подготовительные задачи

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите углы: а) между прямой AC_1 и плоскостью BDD_1; б) между прямой AB и плоскостью CB_1D_1; в) между прямой DD_1 и плоскостью ACB_1; г) между прямой AC и плоскостью BCD_1.

2. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Точки K, M и N — середины рёбер BD, AB и AC соответственно. Найдите углы: а) между прямой CD и плоскостью ABD; б) между прямой DM и плоскостью ADC;

в) между прямой KN и плоскостью ADC; г) между прямой BD и плоскостью KMN.

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Все рёбра пирамиды равны, M — середина бокового ребра SD. Найдите углы: а) между прямой AM и плоскостью ABC; б) между прямой BD и плоскостью BSC; в) между прямой BM и плоскостью ASD; г) между прямой SA и плоскостью CSD.

4. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1. Точка M — середина ребра BC. Найдите углы: а) между прямой A_1M и плоскостью ABC; б) между прямой BB_1 и плоскостью AB_1C_1; в) между прямой C_1M и плоскостью ABB_1; г) между прямой AA_1 и плоскостью A_1C_1M.

5. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1. Найдите углы: а) между прямой AA_1 и плоскостью BCE_1; б) между прямой BC_1 и плоскостью AFF_1; в) между прямой BD_1 и плоскостью ABB_1; г) между прямой BE_1 и плоскостью ABB_1.

6. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Найдите углы: а) между прямой BC и плоскостью ASF; б) между прямой AB и плоскостью BSC; в) между прямой SA и плоскостью BSC; г) между прямой AC и плоскостью CSD.

Задачи на доказательство и вычисление

5.1. Основание треугольной пирамиды $DABC$ — прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Высота пирамиды проходит через точку C.

а) Докажите, что противоположные рёбра пирамиды попарно перпендикулярны.

б) Найдите углы боковых рёбер DA и DB с плоскостью основания, если $AC = 15$, $BC = 20$, а угол между плоскостями ABC и ABD равен 45°.

5.2. Высота PC треугольной пирамиды $PABC$ с вершиной P проходит через точку C. Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что основание пирамиды — прямоугольный треугольник.

б) Найдите углы боковых рёбер PA и PB с плоскостью основания, если $AC = 6$, $BC = 8$, а расстояние от точки P до прямой AB равно 5.

5.3. Дана треугольная пирамида $SABC$ с основанием ABC; O — точка пересечения медиан треугольника ABC.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через прямую AB и середину отрезка SO, делит боковое ребро SC в отношении $1:3$, считая от вершины S.

б) Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды, если пирамида правильная, а её высота составляет $\frac{4}{5}$ от высоты SM боковой грани SAB.

5.4. Дана треугольная пирамида $SABC$; O — точка пересечения медиан основания ABC.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через прямую AB и середину M ребра SC, делит отрезок SO в отношении $3:1$, считая от вершины S.

б) Найдите угол между прямой BC и плоскостью ABM, если пирамида правильная, а угол между прямой, проходящей через точку M и середину ребра AB, и прямой SO равен $45°$.

5.5. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AD=2$, $AA_1=4$, $AB=2\sqrt{15}$. Точка M — середина ребра C_1D_1, точка N лежит на ребре AA_1, причём $AN=3$.

а) Докажите, что $MN \perp CB_1$.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью грани BB_1C_1C.

5.6. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$, основание которой — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и катетом BC, вдвое большим бокового ребра призмы. Точка M — середина ребра A_1C_1, точка N лежит на ребре BC, причём $CN:NB=1:3$.

а) Докажите, что $MN \perp CB_1$.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью основания $A_1B_1C_1$, если $AA_1:AB=1:\sqrt{7}$.

5.7. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$. Скрещивающиеся диагонали BA_1 и CB_1 боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C перпендикулярны.

а) Докажите, что $AB:AA_1=\sqrt{2}:1$.

б) Найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью BCC_1.

5.8. Дана правильная четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Точка M — середина ребра B_1C_1. Прямые CA_1 и BM перпендикулярны.

а) Докажите, что диагональ основания призмы вдвое больше бокового ребра.

б) Найдите угол между прямой CA_1 и плоскостью BCC_1.

5.9. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание которой — параллелограмм $ABCD$. Точка K — середина медианы SM грани CSD, N — середина ребра AB.

а) Постройте точку пересечения прямой KN с плоскостью ASC.

б) Найдите угол между прямой KN и плоскостью ASC, если пирамида правильная, а её боковые грани образуют с плоскостью основания углы, равные $60°$.

5.10. Дана треугольная пирамида $DABC$. Точки M и N — середины рёбер BC и AD, L — середина ребра AB.

а) Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью CDL.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью CDL, если пирамида правильная, а угол между её боковым ребром и плоскостью основания ABC равен $60°$.

5.11. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Точка M — середина ребра SD.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки A, B и M.

б) Найдите угол между прямой AM и плоскостью CSF, если $AB:SA=1:\sqrt{19}$.

5.12. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AB и середину высоты SH пирамиды.

б) Пусть K — точка пересечения этой плоскости с ребром SC. Найдите угол между прямой BK и плоскостью ASB, если $AB : AS = 1 : 2$.

5.13. Точка M — середина ребра AB правильного тетраэдра $DABC$.

а) Докажите, что ортогональная проекция точки M на плоскость ACD лежит на медиане AP грани ACD.

б) Найдите угол между прямой DM и плоскостью ACD.

5.14. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Все рёбра пирамиды равны. Точка M — середина ребра BC.

а) Докажите, что ортогональная проекция середины ребра AB на плоскость CSD делит медиану SN этой грани в отношении $1 : 2$, считая от вершины S.

б) Найдите угол между прямой SM и плоскостью CSD.

5.15. Основание $ABCD$ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равнобедренная трапеция с основаниями AB и CD. Боковые стороны равны меньшему основанию CD, а их продолжения пересекаются под углом $60°$.

а) Плоскость CA_1D_1 пересекает ребро AB в точке M. Докажите, что прямая D_1M проходит через середину диагонали A_1C.

б) Найдите угол между боковым ребром BB_1 и плоскостью CA_1D_1, если призма прямая, а $AA_1 : AD = \sqrt{3} : 2$.

5.16. Основание $ABCD$ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — трапеция с основаниями $AB = 2CD$.

а) Докажите, что плоскость BA_1D_1 проходит через середину бокового ребра CC_1.

б) Найдите угол между боковым ребром AA_1 и этой плоскостью, если призма прямая, трапеция $ABCD$ — прямоугольная с прямым углом при вершине B, а $BC = CD$ и $AA_1 = \sqrt{6}CD$.

5.17. Точка M — середина медианы BK основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, а N — центр боковой грани AA_1B_1B.

а) Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью $A_1B_1C_1$.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью грани BB_1C_1C, если известно, что $\frac{AB}{AA_1} = 2\sqrt{2}$.

5.18. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ M — точка пересечения медиан основания ABC, а N — центр боковой грани AA_1B_1B.

а) Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью $A_1B_1C_1$.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью BB_1C, если известно, что $\frac{AB}{AA_1} = 2\sqrt{3}$.

5.19. Основания ABC и $A_1B_1C_1$ призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонние треугольники. Отрезок, соединяющий центр O основания ABC с серединой ребра A_1B_1, перпендикулярен основаниям призмы.

а) Докажите, что грань ABB_1A_1 — прямоугольник.

б) Найдите угол между прямой BC и плоскостью ABC_1, если высота призмы равна стороне основания.

5.20. Основания ABC и $A_1B_1C_1$ призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонние треугольники. Отрезок, соединяющий центр O основания ABC с вершиной C_1, перпендикулярен основаниям призмы.

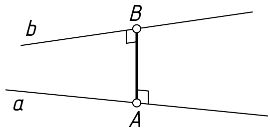
а) Докажите, что плоскости ABC_1 и OCC_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ABC_1, если боковое ребро призмы равно стороне основания.

§ 6. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстоянием между двумя фигурами называется расстояние между ближайшими точками этих фигур.

Общим перпендикуляром скрещивающихся прямых a и b называется отрезок, концы A и B которого лежат на прямых a и b соответственно и который перпендикулярен обеим прямым.



В школьном курсе стереометрии доказывается, для любых двух скрещивающихся прямых существует общий перпендикуляр, и притом только один, а расстояние между этими прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

Вот несколько способов вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми a и b.

1. Через точку A прямой a проводится прямая b', параллельная b. Тогда расстояние между прямыми равно расстоянию от любой точки B прямой b до плоскости, проходящей через пересекающиеся прямые a и b'.

2. Построение общего перпендикуляра и вычисление его длины.

3. Вычисление расстояния между двумя параллельными плоскостями, содержащими прямые a и b соответственно.

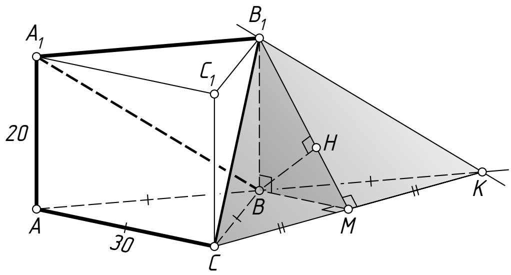
4. Применение формулы для объёма тетраэдра: $V = \frac{1}{6}abh\sin\alpha$, где V — объём тетраэдра, a и b — длины его противолежащих рёбер, h — расстояние между прямыми, содержащими эти рёбра, α — угол между этими прямыми.

5. Метод координат (см. приложение).

Пример 1. Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 30, боковое ребро равно 20. Найдите расстояние между прямыми BA_1 и CB_1.

Ответ: 12.

Р е ш е н и е. Через вершину B_1 проведём прямую, параллельную BA_1. Пусть K — точка пересечения проведённой прямой с прямой AB. Тогда BA_1B_1K — параллелограмм, поэтому $KB_1 \parallel BA_1$ и $KB_1 = BA_1 = CB_1$. Поскольку прямая BA_1 параллельна плоскости KB_1C, расстояние между прямыми BA_1 и CB_1 равно расстоянию от любой



точки прямой BA_1 до плоскости KB_1C. Найдём расстояние от точки B до этой плоскости.

Пусть B_1M — высота равнобедренного треугольника KB_1C. Тогда BM — высота равнобедренного треугольника KBC, значит, высота BH прямоугольного треугольника MBB_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым B_1M и KC плоскости KB_1C. Значит, BH — перпендикуляр к этой плоскости.

Отрезок BM — средняя линия треугольника AKC, поэтому $BM = \frac{1}{2}AC = 15$. По теореме Пифагора

$$MB_1 = \sqrt{BM^2 + BB_1^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25.$$

Следовательно,

$$BH = \frac{BM \cdot BB_1}{MB_1} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12. \qquad \triangleleft$$

Пример 2. Сторона основания $ABCDEF$ правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 4, высота SO равна 6. Найдите расстояние между прямыми AF и SC.

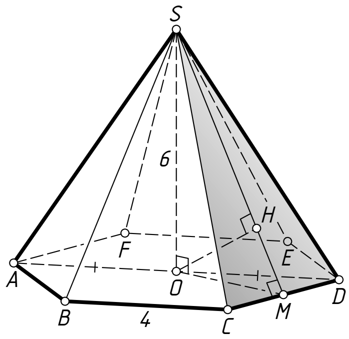
Ответ: 6.

Решение. Поскольку ребро AF параллельно ребру CD, прямая AF параллельна плоскости CSD, поэтому расстояние между прямыми AF и SC равно расстоянию от любой точки прямой AF до плоскости CSD. Точка O — середина наклонной AD к плоскости CSD, поэтому расстояние от точки A до плоскости CSD вдвое больше расстояния до этой плоскости от точки O.

Пусть SM — высота равнобедренного треугольника CSD, а OH — высота прямоугольного треугольника SOM. Тогда OH — перпендикуляр к плоскости SCD.

В прямоугольном треугольнике SOM известно, что

$$SO = 6, \quad OM = \frac{OC\sqrt{3}}{2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \quad \operatorname{tg}\angle OSM = \frac{OM}{SO} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Значит, $\angle OSM = 30^\circ$, поэтому

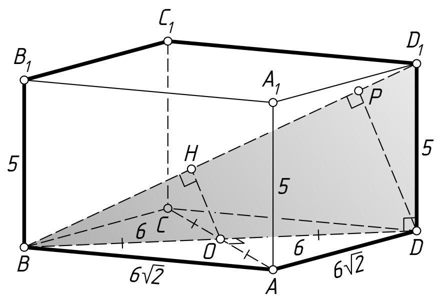
$$OH = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

Следовательно, расстояние от точки A до плоскости CSD, а значит и расстояние между прямыми AF и SC, равно 6. ◁

Пример 3. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат $ABCD$ со стороной $6\sqrt{2}$. Боковое ребро призмы равно 5. Найдите расстояние между прямыми AC и BD_1.

Ответ: $\frac{30}{13}$.

Р е ш е н и е. Опустим перпендикуляр OH из центра O квадрата $ABCD$ на прямую BD_1. Прямая AC перпендикулярна двум пересекающимся прямым BD и DD_1 плоскости BDD_1, значит, прямая AC перпендикулярна этой плоскости. Следовательно, прямая AC перпендикулярна OH, и поэтому OH — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AC и BD_1.



Пусть DP — высота прямоугольного треугольника BDD_1 с катетами

$$DD_1 = 5, \quad BD = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 12$$

и гипотенузой

$$BD_1 = \sqrt{DD_1^2 + BD^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Тогда

$$DP = \frac{DD_1 \cdot BD}{BD_1} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13},$$

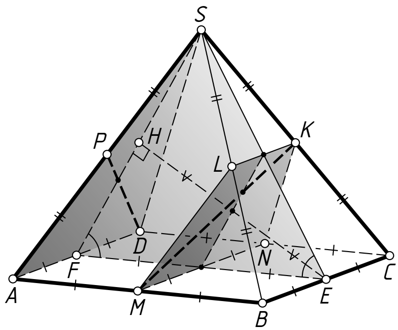
а поскольку OH — средняя линия треугольника PBD, получаем

$$OH = \frac{1}{2}DP = \frac{30}{13}. \qquad \triangleleft$$

Пример 4. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Точки M, K и P — середины рёбер AB, SC и SA соответственно. Найдите расстояние между прямыми MK и DP, если сторона основания пирамиды равна $4\sqrt{3}$, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 60°.

Ответ: 3.

Р е ш е н и е. Пусть L и N — середины рёбер SB и CD соответственно. Тогда $MN \parallel BC \parallel KL$, значит, точки K, L, M и N лежат в одной плоскости. Эта плоскость параллельна плоскости ASD, т. к. две пересекающиеся прямые MN и ML одной из этих плоскостей соответственно параллельны двум пересекающимся прямым AD и AS другой. Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми MK и DP равно расстоянию между этими плоскостями.



Пусть E и F — середины рёбер BC и AD соответственно. Тогда $\angle FES = 60^\circ$, поэтому треугольник ESF равносторонний. Его высота EH — перпендикуляр к плоскости ASD, а значит, и к параллельной ей плоскости KLM. Эта высота делится пополам плоскостью KLM, следовательно, расстояние между этими плоскостями вдвое меньше EH, т. е. равно

$$\frac{1}{2}EH = \frac{1}{2} \cdot \frac{FE\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3. \qquad \triangleleft$$

Пример 5. Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $DABC$ равна 12. Точки M и N — середины рёбер AB и BC соответственно, $DM = 4\sqrt{3}$. Найдите расстояние между прямыми DM и AN.

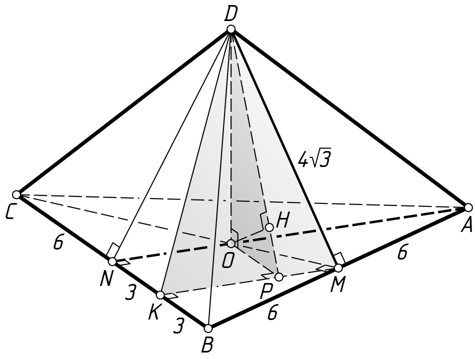
Ответ: $\frac{6}{\sqrt{5}}$.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Пусть O — центр основания пирамиды. Тогда

$$CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}, \quad OM = \frac{1}{3}CM = 2\sqrt{3},$$
$$DO = \sqrt{DM^2 - OM^2} = \sqrt{48-12} = 6.$$

Пусть K — середина отрезка BN. Тогда MK — средняя линия прямоугольного треугольника ANB, поэтому $MK \parallel AN$. Пусть P — проекция точки O на прямую MK; т. к. $OP \parallel BC$, то $OPKN$ — прямоугольник, значит, $OP = NK = 3$.

Прямая AN параллельна прямой MK, лежащей в плоскости DMK, значит, прямая AN параллельна этой плоскости, а расстояние между прямыми AN и DM равно расстоянию от любой точки прямой AN до плоскости DMK, например, от точки O.



Рассмотрим прямоугольный треугольник DPO, в нём $OP=3$, $DO=6$, поэтому $DP = \sqrt{DO^2+OP^2} = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Пусть OH — высота этого треугольника, опущенная из вершины прямого угла при вершине O. Тогда OH — перпендикуляр к плоскости DMK, а искомое расстояние d равно длине отрезка OH. Следовательно,

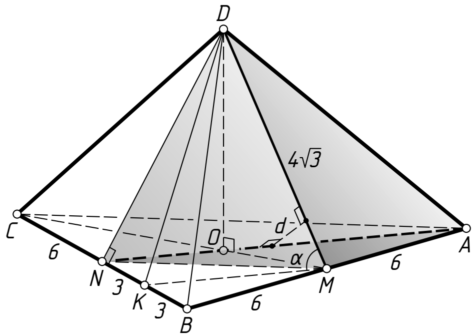
$$d = OH = \frac{OP \cdot DO}{DP} = \frac{3 \cdot 6}{3\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Второй способ. Пусть O — центр основания пирамиды. Тогда

$$CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}, \quad OM = \frac{1}{3}CM = 2\sqrt{3},$$

$$DO = \sqrt{DM^2 - OM^2} = \sqrt{48-12} = 6.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{144 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 72\sqrt{3}.$$



Пусть K — середина отрезка BN. Тогда MK — средняя линия прямоугольного треугольника ANB, поэтому

$$MK = \frac{1}{2}AN = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3},$$

$$DK^2 = DN^2 + KN^2 = 48 + 9 = 57.$$

Обозначим $\angle DMK = \alpha$. По теореме косинусов

$$\cos\alpha = \frac{DM^2 + MK^2 - DK^2}{2DM \cdot MK} = \frac{48+27-57}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{4}.$$

Тогда $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Объём треугольной пирамиды $DAMN$ в четыре раза меньше объёма данной пирамиды, т. к. площадь основания AMN в четыре раза меньше площади треугольника ABC, а высота DO — та же, что у исходной пирамиды. Таким образом, $V_{DAMN} = 18\sqrt{3}$. С другой стороны, если d — искомое расстояние между прямыми DM и AN, то

$$V_{DAMN} = \frac{1}{6}DM \cdot AN \cdot d\sin\alpha,$$

или

$$18\sqrt{3} = \frac{1}{6} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot d \cdot \frac{\sqrt{15}}{4},$$

откуда находим, что $d = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$. ◁

Подготовительные задачи

1. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите расстояния между прямыми: а) AB и DD_1; б) A_1A и BD_1; в) BD_1 и CB_1; г) BA_1 и CB_1.

2. Рёбра правильного тетраэдра $ABCD$ равны 1. Точки K, M и N — середины рёбер BD, AB и AC соответственно. Найдите расстояния между прямыми: а) BD и AC; б) KM и AC; в) AB и KN; г)* DM и BC; д)* AK и CM; е)* AK и BN.

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Все рёбра пирамиды равны 1, M — середина бокового ребра SD. Найдите расстояния между прямыми: а) SB и AC; б) SA и BC; в) AD и SC; г) SB и CM.

4. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1. Точка M — середина AC. Найдите расстояния между прямыми: а) CC_1 и AB; б) AB и CB_1; в) AB_1 и BC_1; г) BM и AC_1.

5. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1. Найдите расстояния между прямыми: а) AE_1 и DB_1; б) BB_1 и EF_1; в) AA_1 и CF_1; г) AB_1 и CD_1; д) BE и DB_1.

6. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Сторона основания равна 1, боковое ребро равно 2. Найдите расстояния между прямыми: а) SB и AF; б) SB и AE; в) SB и DF; г) SB и AD.

Задачи на доказательство и вычисление

6.1. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D.

а) Докажите, что её сечение плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно прямым AD и BC, — прямоугольник.

б) Найдите расстояние между противоположными рёбрами, если сторона основания равна $6\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 10.

6.2. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S.

а) Постройте её сечение плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно прямым SA и BC.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и SC, если сторона основания равна 30, а боковое ребро равно $5\sqrt{34}$.

6.3. Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат $ABCD$.

а) Докажите, что прямые BD_1 и AC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если стороны основания параллелепипеда равны 3, а боковые рёбра равны 6.

6.4. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине A, а боковая грань AA_1C_1C — квадрат.

а) Докажите, что прямые CB_1 и AC_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $AC=2$, $AB_1=$ $=2\sqrt{3}$.

6.5. Основание пирамиды $SABCD$ — ромб $ABCD$ с углом 60° при вершине A. Боковое ребро SD перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания.

а) Докажите, что прямые AC и SB перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{2}$.

6.6. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб $ABCD$ с углом 120° при вершине D, а боковые грани призмы — квадраты.

а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания призмы равна $8\sqrt{3}$.

6.7. Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания.

а) Докажите, что плоскости ASD и CSD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми SC и BD, если сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$.

6.8. Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания, а треугольник BSD равносторонний.

а) Докажите, что высота пирамиды равна стороне основания.

б) Найдите расстояние между прямыми SC и BD, если сторона основания равна $2\sqrt{3}$.

6.9. Основание пирамиды $DABC$ — треугольник ABC со сторонами $AC=6$, $BC=8$, $AB=10$. Все боковые рёбра равны.

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину отрезка AB.

б) Найдите расстояние между прямыми DM и BC, где DM — высота пирамиды $DABC$.

6.10. Основание пирамиды $DABC$ — прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Все боковые рёбра образуют равные углы плоскостью основания.

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину отрезка AB.

б) Известно, что $AB=18$, $AC=6$. Найдите расстояние между прямыми DM и CH, где DM — высота пирамиды $DABC$, CH — высота треугольника ABC.

6.11. Боковая грань правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S образует с плоскостью основания угол $45°$. Точка M — середина бокового ребра SD.

а) Докажите, что противоположные боковые грани пирамиды перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и CM, если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{2}$.

6.12. Боковая грань правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S образует с плоскостью основания угол $60°$. Точка M — середина бокового ребра SD.

а) Докажите, что плоскости AMB и CSD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и CM, если сторона основания пирамиды равна $4\sqrt{3}$.

6.13. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Постройте точку пересечения прямой AC_1 с плоскостью BA_1D.

б) Найдите расстояние между прямыми BA_1 и CB_1, если параллелепипед прямоугольный, $AA_1=\sqrt{5}$, $AB=BC=2\sqrt{10}$.

6.14. Точки M и N — середины рёбер соответственно AD и AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что косинус угла между прямыми D_1M и A_1N равен $\frac{4}{5}$.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если ребро куба равно 6.

6.15. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Точка M — середина бокового ребра CS.

а) Постройте точку пересечения прямой BM с плоскостью ESF.

б) Найдите расстояние между прямыми BM и EF, если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{6}$, а высота пирамиды равна $3\sqrt{2}$.

6.16. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Точка P — середина бокового ребра CC_1.

а) Постройте точку пересечения прямой BP с плоскостью AA_1F.

б) Найдите расстояние между прямыми BP и AB_1, если сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно $2\sqrt{3}$.

6.17. Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$. Плоскость α проходит через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1.

а) Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью ABC равен углу между прямыми BD_1 и AA_1.

б) Найдите косинус угла между плоскостью основания призмы и плоскостью α, если $AB=12$, $AD=\sqrt{31}$, а расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 5.

6.18. Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$. Плоскость α проходит через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D.

а) Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью ADD_1 равен углу между прямыми B_1D и AB.

б) Найдите тангенс угла между плоскостью грани ADD_1 и плоскостью α, если $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$, а расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$.

6.19. Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$, боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания, $BC=2SA$. Точка M — середина ребра AB.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую SM параллельно BD, — равносторонний треугольник.

б) Найдите расстояние между прямыми SM и BD, если $AB=6\sqrt{3}$.

6.20. Основание пирамиды $ABCD$ — равносторонний треугольник ABC, боковое ребро AD перпендикулярно плоскости основания, $AD : BC = 1 : \sqrt{2}$. Точки M и N — середины рёбер BC и AB соответственно.

а) Докажите, что угол между прямыми AM и DN равен 60°.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $AB=6\sqrt{2}$.

6.21. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Его основания $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — квадраты. Отрезок, соединяющий центр основания $ABCD$ с серединой ребра B_1C_1, перпендикулярен основаниям.

а) Докажите, что грани AA_1B_1B и $ABCD$ перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC, если все рёбра параллелепипеда равны 2.

6.22. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Его основания $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — квадраты. Отрезок, соединяющий вершину C с центром основания $A_1B_1C_1D_1$, перпендикулярен основаниям.

а) Докажите, что прямые CC_1 и BD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми A_1C и AB, если сторона основания параллелепипеда равна 6, а боковое ребро равно $\sqrt{34}$.

6.23. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка E — середина ребра AD. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой ED_1, а вершины P и Q — на прямой, проходящей через точку A_1 и пересекающей прямую BC в точке R.

а) Докажите, что $BR = 2BC$.

б) Найдите расстояние между серединами отрезков MN и PQ, если ребро куба равно a.

6.24. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $AC = BC$. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой CA_1, а вершины P и Q — на прямой AB_1.

а) Докажите, что $AA_1 = AC$.

б) Найдите расстояние между серединами отрезков MN и PQ, если $AC = a$.

§ 7. Площадь сечения

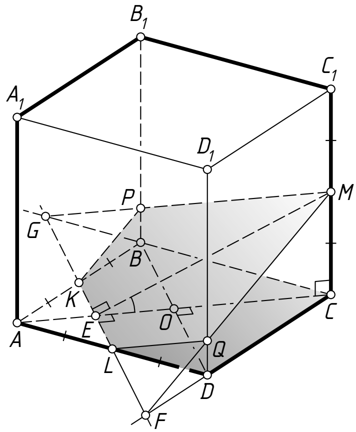
В некоторых случаях при вычислении площади сечения многогранника удобно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема о площади ортогональной проекции. Площадь ортогональной проекции S' плоского многоугольника на плоскость равна площади проектируемого многоугольника S, умноженной на косинус угла между его плоскостью и плоскостью проекции, т. е. $S' = S\cos\varphi$.

Пример 1. Найдите площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AD и CC_1, если его сторона равна 1.

Ответ: $\dfrac{7\sqrt{11}}{24}$.

Р е ш е н и е. Пусть K, L и M — середины рёбер соответственно AB, AD и CC_1 данного куба; F и G — точки пересечения прямой KL с прямыми CD и BC соответственно. Тогда секущая плоскость KLM пересекает ребро BB_1 в точке P пересечения прямых BB_1 и MG, лежащих в плоскости BB_1C_1. Аналогично строится точка Q пересечения секущей плоскости с ребром DD_1. Таким образом, искомое сечение — пятиугольник $KPMQL$.



Пусть O — центр грани $ABCD$, E — точка пересечения отрезков KL и AC. Поскольку E и M — общие точки секущей плоскости и плоскости AA_1C_1, эти плоскости пересекаются по прямой ME, а поскольку KL — средняя линия треугольника ABD, получаем $CE \perp KL$ и

$$CE = \frac{3}{4}AC = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Ребро CC_1 — перпендикуляр к плоскости ABC, поэтому CE — ортогональная проекция наклонной ME на эту плоскость, а угол CEM — линейный угол двугранного угла между секущей плоскостью и плоскостью ABC. Из прямоугольного треугольника CEM находим, что

$$ME = \sqrt{CM^2 + CE^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{8}} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}},$$

$$\cos\angle CEM = \frac{CE}{ME} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Пятиугольник $KBCDL$ — ортогональная проекция сечения $KPMQL$ на плоскость ABC, а поскольку

$$S_{KBCDL} = S_{ABCD} - S_{\Delta AKL} = S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{\Delta ABD} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

то по теореме о площади ортогональной проекции

$$S_{KPMQL} = \frac{S_{KBCDL}}{\cos\angle CEM} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{\sqrt{11}}} = \frac{7\sqrt{11}}{24}. \qquad \triangleleft$$

Подготовительные задачи

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

а) две его диагонали;

б) середины трёх рёбер, исходящих из одной вершины;

в) вершину B_1 и середины рёбер AB и AD;

г) диагональ AC_1 параллельно прямой BD;

д) середину ребра AB параллельно прямым BD и BC_1.

2. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром a. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

а) середину ребра AD параллельно плоскости ABC;

б) вершину D и середины рёбер AB и BC;

в) середину ребра AB параллельно рёбрам AC и BD;

г) высоту DH тетраэдра параллельно ребру AC;

д) центры граней ABC, ABD и BCD.

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Все рёбра пирамиды равны a. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

а) середину ребра SA параллельно плоскости основания пирамиды;

б) диагональ BD основания и середину ребра SC;

в) ребро AB и середину ребра SD;

г) через центр основания параллельно плоскости ASB;

д) середину ребра SC и точку A параллельно диагонали BD основания.

4. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Все рёбра призмы равны a. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

а) вершины A, B_1 и C;

б) ребро BC и центр основания $A_1B_1C_1$;

в) центры граней ABC, AA_1B_1B и BB_1C_1C;

г) прямую BC_1 параллельно медиане AM основания ABC;

д) середину ребра BB_1 параллельно прямым BA_1 и B_1C_1.

5. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Все рёбра призмы равны a. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

а) вершины A, B и C_1;

б) вершины B, F и C_1;

в) вершины A, B и D_1;

г) центр основания $ABCDEF$ параллельно прямым DE и AE_1;

д) середины рёбер BC, EF и центр грани AA_1B_1B.

6. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Стороны основания пирамиды равны a, а боковые рёбра равны $2a$. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

а) вершину S и диагональ BD основания;

б) середины рёбер AB и EF параллельно высоте пирамиды;

в) вершину S и середины рёбер AB и AF;

г) точки A, D и середину ребра SE;

д) ребро AB и середину ребра SD.

Задачи на доказательство и вычисление

7.1. Плоскость α проходит через высоту DD_1 правильного тетраэдра $ABCD$ и ребро AD.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна ребру BC.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью α, если ребра тетраэдра равны a.

7.2. Через вершины C, B_1 и D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна диагонали AC_1 куба.

б) Найдите площадь куба плоскостью α, если ребро куба равно a.

7.3. Через вершину S и диагональ BD основания правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ проведена плоскость α.

а) Докажите, что расстояние от центра основания до этой плоскости в три раза меньше расстояния до этой плоскости от точки F.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α, если сторона основания равна $\sqrt{3}$, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен $60°$.

7.4. Плоскость α проходит через сторону AB основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и середину ребра B_1C_1.

а) Пусть M — точка пересечения плоскости α с прямой CC_1. Докажите, что C_1 — середина отрезка CM.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если все рёбра призмы равны a.

7.5. Через вершину S правильной четырёхугольной пирамиды и середины сторон AD и CD основания проведена плоскость α; K — точка пересечения этой плоскости с прямой BC.

а) Докажите, что отрезок CK вдвое меньше стороны основания.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α, если сторона основания пирамиды равна a, а боковое ребро равно $2a$.

7.6. Дана правильная шестиугольная призма. Плоскость α проходит через сторону одного основания и противолежащую ей сторону другого основания.

а) Докажите, что плоскость α проходит через середины двух противоположных боковых рёбер призмы.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если боковые грани призмы — квадраты со стороной 2.

7.7. Через диагональ B_1D_1 грани $A_1B_1C_1D_1$ и середину ребра DC правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость α.

а) Постройте точку пересечения этой плоскости с прямой CC_1.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если $AB=a$, $CC_1=2a$.

7.8. Плоскость α перпендикулярна основанию правильной треугольной пирамиды $SABC$ и делит стороны AB и BC основания пополам.

а) Докажите, что плоскость α делит боковое ребро в отношении $1:3$, считая от вершины S.

б) Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если известно, что сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна 4.

7.9. Точки M и N — середины рёбер SA и SB правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S. Через M и N проведена плоскость, перпендикулярная плоскости основания.

а) Докажите, что эта плоскость делит медиану CE основания в отношении $1:5$, считая от точки E.

б) Найдите площадь сечения, если $AB=36$, $SA=31$.

7.10. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

7.11. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E=6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=4\sqrt{2}$, $AD=12$, $AA_1=14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении $4:3$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

7.12. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=5:3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F:FB=5:11$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=6\sqrt{2}$, $AD=10$, $AA_1=16$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

7.13. Дана правильная четырёхугольная пирамида $PABCD$ с вершиной в точке P. Через точку C и середину ребра AB перпендикулярно к основанию пирамиды проведена плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро BP в отношении $2:1$, считая от точки B.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α, если известно, что $PA=10$, $AC=16$.

7.14. В правильной шестиугольной пирамиде с вершиной S стороны основания $ABCDEF$ равны 6, а боковые рёбра равны 12. Точки K и M — середины рёбер и SF и SE соответственно.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью BKM.

б) Найдите площадь полученного сечения.

7.15. Точка M — середина ребра CD единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через вершину A_1 проведена плоскость, параллельная прямым AM и D_1M.

а) Докажите, что эта плоскость проходит через середину ребра AB.

б) Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.

7.16. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Точки M и N — середины рёбер AD и CD соответственно, точка K лежит на ребре BB_1, причём $B_1K:KB=1:2$.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точки M, N и K, делит ребро CC_1 в отношении $2:7$, считая от точки C.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью, если параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырёхугольная призма, сторона основания $ABCD$ равна $4\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 12.

7.17. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение плоскостью, проходящей через середину M ребра AB, точку B_1 и точку K, лежащую на ребре AC и делящую его в отношении $AK:KC=1:3$.

а) Докажите, что эта плоскость проходит через середину ребра A_1C_1.

б) Найдите площадь сечения, если известно, что сторона основания призмы равна $4\sqrt{2}$, а высота призмы равна $8\sqrt{2}$.

7.18. Основание четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно плоскости SAD.

б) Найдите площадь полученного сечения, если площадь грани SAD равна 16.

7.19. Основанием пирамиды $SABCD$ с равными боковыми рёбрами является прямоугольник $ABCD$. Плоскость α проходит через сторону AB основания и середину высоты пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит боковое ребро SD в отношении $1:2$, считая от вершины S.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α, если $AB=6$, $AD=8$, а высота пирамиды равна 6.

7.20. Через середину ребра AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, параллельная прямым BD_1 и A_1C_1.

а) Докажите, что эта плоскость делит диагональ DB_1 в отношении $3:5$, считая от от вершины D.

б) Найдите площадь полученного сечения, если ребро куба равно 4.

7.21. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость α проходит через прямую BA_1 параллельно прямой CB_1.

а) Докажите, что плоскость α делит диагональ AC_1 параллелепипеда в отношении $1:2$, считая от вершины A.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью α, если он прямой, его основание $ABCD$ — ромб с диагоналями $AC=10$ и $BD=8$, а боковое ребро параллелепипеда равно 12.

7.22. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Плоскость α проходит через прямую BC_1 параллельно прямой AB_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину ребра AC.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если призма правильная, сторона её основания равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 1.

7.23. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{3}$. На рёбрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM=A_1N=C_1K=1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

7.24. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM=B_1N=C_1K=2$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

§ 8. Объём многогранника

Объём призмы равен произведению площади основания на высоту: $V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн}} \cdot h$.

Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту: $V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$.

Иногда удобно использовать такую формулу объёма треугольной призмы: $V = \frac{1}{2} Pd$, где P — площадь боковой грани призмы, а d — расстояние от этой грани до параллельного ей ребра.

Отношение объёмов подобных многогранников равно кубу коэффициента подобия.

Если плоскость, проходящая через вершину, разбивает пирамиду на две пирамиды, то отношение объёмов этих пирамид равно отношению площадей их оснований.

Если плоскость пересекает боковые рёбра SA, SB и SC *треугольной* пирамиды $SABC$ (или их продолжения) в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, то $\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}} = \frac{SA_1}{SA} \cdot \frac{SB_1}{SB} \cdot \frac{SC_1}{SC}$.

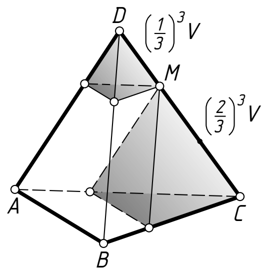
Пример 1. На ребре единичного правильного тетраэдра взята точка, которая делит это ребро в отношении $1:2$. Через эту точку проведены две плоскости, параллельные двум граням тетраэдра. Эти плоскости отсекают от тетраэдра две треугольные пирамиды. Найдите объём оставшейся части тетраэдра.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{18}$.

Р е ш е н и е. Высота правильного тетраэдра с ребром 1 равна $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, площадь основания равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Следовательно, если V — объём такого тетраэдра, то

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Пусть точка M лежит на ребре CD данного правильного тетраэдра $DABC$, причём $\frac{DM}{MC} = \frac{1}{2}$. Первая плоскость проходит через точку M параллельно плоскости ABC. Она отсекает от данного тетраэдра подобный ему тетраэдр, причём коэффициент подобия равен $\frac{DM}{DC} = \frac{1}{3}$. Значит, объём отсечённого тетраэдра равен $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot V = \frac{1}{27} V$. Вторая плоскость проходит через точку M параллельно плоскости ABD. Она от-



секает от данного тетраэдра подобный ему тетраэдр, причём коэффициент подобия равен $\frac{CM}{CD}=\frac{2}{3}$. Значит, объём отсечённого тетраэдра равен $\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot V=\frac{8}{27}V$. Следовательно, объём оставшейся части тетраэдра равен

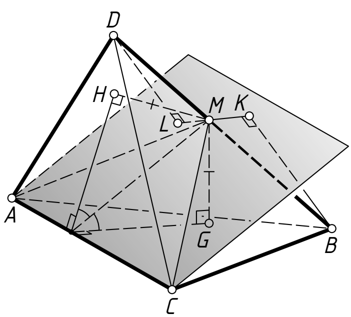
$$V-\frac{1}{27}V-\frac{8}{27}V=V-\frac{1}{3}V=\frac{2}{3}V=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{18}. \qquad \triangleleft$$

Пример 2. Докажите, что биссекторная плоскость двугранного угла при ребре AC пирамиды $DABC$ делит объём пирамиды и ребро BD на части, пропорциональные площадям граней ABC и ADC.

Р е ш е н и е. Пусть биссекторная плоскость двугранного угла с ребром AC пересекает ребро BD в точке M, а MG и MH — перпендикуляры, опущенные из точки M на плоскости граней ABC и ADC соответственно. Точка, лежащая на биссекторной плоскости двугранного, угла, равноудалена от его граней, поэтому $MG=MH$. Следовательно,

$$\frac{V_{MABC}}{V_{MADC}}=\frac{\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot MG}{\frac{1}{3}S_{\Delta ADC}\cdot MH}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADC}}.$$

С другой стороны, если BK и DL — перпендикуляры, опущенные из точек B и D на плоскость AMC, то из подобия прямоугольных тре-



угольников BKM и DLM получаем, что $\frac{BK}{DL}=\frac{BM}{DM}$. Значит,

$$\frac{V_{MABC}}{V_{MADC}}=\frac{\frac{1}{3}S_{\Delta AMC}\cdot BK}{\frac{1}{3}S_{\Delta AMC}\cdot DL}=\frac{BK}{DL}=\frac{BM}{DM}.$$

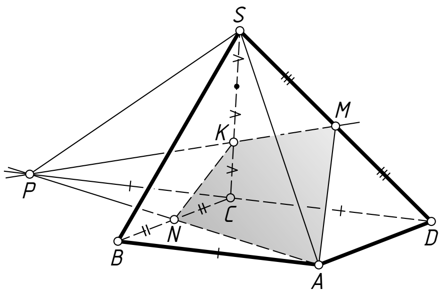
Следовательно,

$$\frac{V_{MABC}}{V_{MADC}}=\frac{BM}{DM}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADC}}.$$ ◁

Пример 3. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$, точки M и N — середины рёбер SD и BC. Найдите объём большей из частей, на которые плоскость AMN разбивает пирамиду $SABCD$, если объём пирамиды $SABCD$ равен V.

Ответ: $\frac{7}{12}V$.

Р е ш е н и е. Пусть прямые AN и CD, лежащие в плоскости ABC, пересекаются в точке P, а прямые MP и SC, лежащие в плоскости CSD, — в точке K. Тогда K — точка пересечения плоскости AMN с ребром SC.



Из равенства треугольников PCN и ABN следует, что $CP=AB=CD$, значит, C — середина отрезка DP. Тогда K — точка пересечения медиан SC и PM треугольника DSP, следовательно, $CK:KS=1:2$.

Рассмотрим треугольную пирамиду $MADP$. Площадь её основания ADP равна площади основания $ABCD$ данной пирамиды, а высота, опущенная из вершины M, вдвое меньше высоты данной пирамиды (см. с. 30), значит, $V_{MADP}=\frac{1}{2}V$. Площадь основания CPN треугольной пирамиды $KCPN$ в четыре раза меньше площади $ABCD$, а высота, опущенная на плоскость основания CPN, втрое меньше высоты пирамиды $SABCD$, значит,

$$V_{KCPN}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}V=\frac{1}{12}V.$$

Тогда объём части пирамиды $SABCD$, содержащей точку D, равен

$$V_{MADP} - V_{KCPN} = \frac{1}{2}V - \frac{1}{12}V = \frac{5}{12}V < \frac{1}{2}V.$$

Следовательно, объём большей части равен $\frac{7}{12}V$. ◁

Подготовительные задачи

1. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 1. Найдите:

а) объём пирамиды A_1ABD;

б) объём треугольной пирамиды, отсекаемой от параллелепипеда плоскостью, проходящей через вершины B, D и середину ребра CC_1;

в) объём пирамиды ACB_1D_1;

г) объёмы частей, на которые параллелепипед разбивается плоскостью, проходящей через вершины A, C и середину ребра A_1D_1;

д) объём общей части пирамид ACB_1D_1 и BDA_1C_1.

2. Объём треугольной пирамиды $DABC$ равен 1. Найдите:

а) объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через точки A, D и середину ребра BC;

б) объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через вершину D и середины рёбер AB и BC;

в) объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, BC и BD;

г) объём пирамиды, вершины которой — A, B и середины рёбер AC и BD;

д) объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, BC и CD.

3. Основание четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Объём пирамиды равен 1. Найдите объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через:

а) середины рёбер SA, SB и SC;

б) вершину S и середины рёбер AB и BC;

в) точки A, C и середину ребра SB;

г) точку A и середину ребра SC параллельно прямой BD;

д) точки A, B и середину ребра SD.

4. Объём треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 1. Найдите:

а) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины A, C и B_1;

б) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершину C_1 и середины рёбер AC и BC;

в) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины A, B и середину ребра A_1C_1;

г) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины C, A_1 и середину ребра BB_1;

д) объём общей части пирамид $ABCB_1$ и $A_1B_1C_1B$.

5. Основания $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильные шестиугольники. Объём призмы равен 1. Найдите:

а) объём пятиугольной призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$;

б) объём пирамиды $BCED_1$;

в) объём пирамиды A_1BDF;

г) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины A, C и D_1;

д) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины B, C и A_1.

6. Основание $ABCDEF$ шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильные шестиугольники. Объём пирамиды равен 1. Найдите:

а) объём четырёхугольной пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через точки A, S и середину ребра DE;

б) объём пирамиды, отсекаемой от данной плоскостью, проходящей через середину ребра SA параллельно диагоналям AD и CE основания;

в) объём пирамиды, отсекаемой от данной плоскостью, проходящей через точки B, D и середину ребра SC;

г) объём пирамиды $SBCM$, где M — середина SD;

д) объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через точки B, C и середину ребра SE.

Задачи на доказательство и вычисление

8.1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 13, а диагонали двух соседних граней равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$.

а) Докажите, что треугольник AC_1D_1 прямоугольный.

б) Найдите объём параллелепипеда.

8.2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $4\sqrt{2}$ и образует с боковыми гранями углы 30° и 45°.

а) Докажите, что одна из этих граней — квадрат.

б) Найдите объём параллелепипеда.

8.3. Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна 6, а площадь сечения, проходящего через ребро AB и середину бокового ребра CD, равна $6\sqrt{6}$.

а) Докажите, что плоскость сечения образует с плоскостью основания угол $45°$.

б) Найдите объём пирамиды $ABCD$.

8.4. Сторона основания $ABCDEF$ правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 4, а площадь сечения, проходящего через прямую CF и середину бокового ребра SD, равна $10\sqrt{3}$.

а) Докажите, что плоскость сечения образует с плоскостью основания угол $60°$.

б) Найдите объём пирамиды $SABCDEF$.

8.5. Точки M и N — середины рёбер соответственно CC_1 и B_1C_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$.

а) Докажите, что плоскость BA_1M делит отрезок AN в отношении $4:3$, считая от точки A.

б) В каком отношении плоскость BA_1M делит объём призмы?

8.6. Основания $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильные шестиугольники, M — точка пересечения BD и FC.

а) Докажите, что плоскость BDF_1 делит отрезок FC_1 в отношении $3:4$, считая от точки F.

б) В каком отношении плоскость BDF_1 делит объём призмы?

8.7. Точка P — середина медианы BK основания ABC треугольной пирамиды $ABCD$.

а) Докажите, что плоскость α, проходящая через точку B и середины рёбер AD и CD, делит отрезок DP в отношении $2:1$, считая от вершины D.

б) Найдите расстояние от вершины C до плоскости α, если объём пирамиды $ABCD$ равен 16, а площадь её сечения плоскостью α равна 3.

8.8. Через вершину D треугольной пирамиды $DABC$ и точку M пересечения медиан грани ABC проведена плоскость α, параллельная ребру AC. На медиане DN грани ACD отмечена точка P, причём $DP:PN=2:3$.

а) Докажите, что прямая BP проходит через середину отрезка DM.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если объём пирамиды $ABCD$ равен 18, а площадь её сечения плоскостью α равна 4.

8.9. Точка M — середина ребра BD правильного тетраэдра $ABCD$. Плоскость, проходящая через точку M перпендикулярно ребру AD, пересекает это ребро в точке K, а ребро CD — в точке N.

а) Докажите, что N — середина ребра CD.

б) Найдите объём тетраэдра $ABCD$, если объём пирамиды $DKMN$ равен V.

8.10. Точка P лежит на ребре AD правильного тетраэдра $ABCD$, причём $AP:PD=1:2$. Плоскость, проходящая через точку P перпендикулярно ребру CD, пересекает это ребро в точке M, а ребро BD — в точке Q.

а) Докажите, что плоскость PMQ делит высоту пирамиды пополам.

б) Найдите объём треугольной пирамиды $QABC$, если объём пирамиды $DPMQ$ равен V.

8.11. Плоскость α проходит через середины рёбер AD, CD и BB_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что эта плоскость делит ребро CC_1 в отношении $1:5$, считая от вершины C.

б) Найдите объём меньшего из многогранников, на которые плоскость α разбивает параллелепипед, если объём параллелепипеда равен V.

8.12. Плоскость α проходит через вершину D и центры граней AA_1B_1B и BB_1C_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что эта плоскость делит ребро BB_1 в отношении $2:1$, считая от вершины B.

б) Найдите объёмы многогранников, на которые плоскость α разбивает параллелепипед, если его объём равен V.

8.13. Основание четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Через середины рёбер SC и AB проведена плоскость, параллельная диагонали BD основания.

а) Докажите, что эта плоскость делит ребро SB в отношении $3:1$, считая от вершины пирамиды.

б) В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды?

8.14. Основание четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Через середину ребра SC и точку A проведена плоскость, параллельная диагонали BD основания. Пусть P — точка пересечения этой плоскости с прямой CD.

а) Докажите, что D — середина отрезка CP.

б) Найдите объём большей из частей, на которые эта плоскость разбивает пирамиду, если объём пирамиды равен V.

8.15. Высота SH правильной треугольной пирамиды $SABC$ относится к высоте основания ABC как $4:9$. Плоскость α проходит через ребро AB и делит пополам двугранный угол пирамиды при этом ребре.

а) Докажите, что плоскость α делит высоту пирамиды в отношении $3:5$, считая от точки H.

б) Найдите объём меньшей из частей, на которые пирамида разбивается плоскостью α, если сторона основания пирамиды равна 6.

8.16. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Апофема пирамиды вдвое больше стороны основания. Плоскость α проходит через ребро AB и делит пополам двугранный угол пирамиды при этом ребре.

а) Докажите, что плоскость α делит высоту пирамиды в отношении $4:1$, считая от вершины S.

б) Найдите объём большей из частей, на которые пирамида разбивается плоскостью α, если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{15}$.

8.17. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На лучах AB, AD и AA_1 отмечены точки K, L и M соответственно, причём $AK=\frac{5}{2}AB$, $AL=\frac{5}{2}AD$ и $AN=\frac{5}{2}AA_1$.

а) Докажите, что плоскость KLM делит ребро B_1C_1 пополам.

б) В каком отношении плоскость KLM делит объём параллелепипеда?

8.18. На диагонали BD_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка M, причём $BM:MD_1=1:3$. Через точку M проведена плоскость α, параллельная прямым AB_1 и CB_1.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AB в отношении $1:3$, считая от вершины A.

б) В каком отношении плоскость α делит объём параллелепипеда?

8.19. Точка M — середина ребра B_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$. Прямые BA_1 и CB_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник BMA_1 равнобедренный.

б) Найдите объём призмы, если расстояние между прямыми BA_1 и CB_1 равно 2.

8.20. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грань $ABCD$ — квадрат. Точка M лежит на ребре BC, причём $CM:MB=1:2$. Известно, что диагональ DB_1 параллелепипеда перпендикулярна отрезку C_1M.

а) Докажите, что угол между прямой CB_1 и плоскостью $A_1B_1C_1$ равен 30°.

б) Найдите объём параллелепипеда, если расстояние между прямыми DB_1 и C_1M равно $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

8.21. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и CC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямые A_1C, B_1M и BN попарно перпендикулярны.

а) Докажите, что расстояние между плоскостями BND и B_1MD_1 вдвое меньше диагонали A_1C.

б) Найдите объём параллелепипеда, если известно, что $A_1C = a$, $B_1M = b$, $BN = c$.

8.22. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$, точки M и N — середины рёбер SC и SD соответственно. Прямые SA, BM и CN попарно перпендикулярны.

а) Докажите, что отрезок CN делится плоскостью BMD в отношении $2:1$, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, если $SA = a$, $BM = b$, $CN = c$.

§ 9. Фигуры вращения

Сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной его оси и удалённой от основания на расстояние, меньшее высоты, — круг, равный кругу основания.

Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси и удалённой от неё на расстояние, меньшее радиуса основания, есть прямоугольник.

Сечение конуса плоскостью, перпендикулярной его оси и удалённой от основания на расстояние, меньшее высоты, — круг.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину и хорду основания, — равнобедренный треугольник.

Сечение сферы плоскостью, удалённой от центра на расстояние, меньшее радиуса, есть окружность. Центр этой окружности — основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на плоскость сечения, а радиус равен $\sqrt{R^2 - d^2}$, где R — радиус сферы, d — расстояние от центра сферы до секущей плоскости (расстояние между центрами сферы и окружности сечения).

Касательная плоскость к сфере — это плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку (точка касания).

Радиус сферы, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной плоскости.

Объём цилиндра равен произведению площади основания на образующую (высоту цилиндра): $V_{\text{цилиндра}} = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi r^2 h$, где r — радиус основания цилиндра.

Объём конуса равен трети произведения площади основания на высоту: $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, где r — радиус основания конуса.

Объём шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на образующую (высоту цилиндра): $S_{\text{бок. цил.}} = 2\pi r h$.

Площадь полной поверхности цилиндра равна сумме площадей его боковой поверхности и двух оснований: $S_{\text{полн. цил.}} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$.

Площадь боковой поверхности конуса равна половине произведения длины окружности основания на образующую: $S_{\text{бок. кон.}} = \pi r l$.

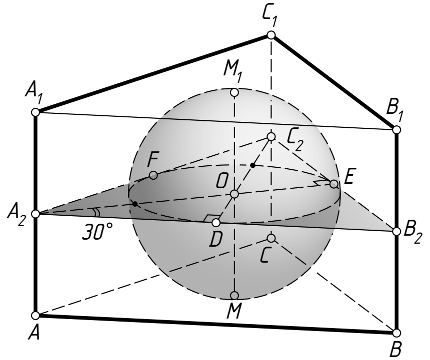
Площадь полной поверхности конуса равна сумме площадей его боковой поверхности и основания: $S_{\text{полн. кон.}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$.

Площадь сферы радиуса R равна учетверённой площади большого круга: $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$.

Пример 1. Шар касается всех граней правильной треугольной призмы. Найдите отношение объёмов шара и призмы.

Ответ: $2\pi : 9\sqrt{3}$.

Р е ш е н и е. Пусть O — центр шара радиуса R, вписанного в правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$, M и M_1 — точки касания шара с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно, а D, E и F — с боковыми гранями. Тогда M и M_1 — центры равносторонних треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, а D, E и F — центры прямоугольников AA_1B_1B, BB_1C_1C и AA_1C_1C соответственно.



В сечении призмы плоскостью, проходящей через центр шара параллельно основаниям, получится равносторонний треугольник $A_2B_2C_2$, равный треугольникам ABC и $A_1B_1C_1$, и вписанный в него круг радиуса R, касающийся сторон A_2B_2, B_2C_2 и A_2C_2 в точках D, E и F соответственно. Центр O шара лежит на отрезке MM_1 и делит его пополам, значит, $AA_1 = MM_1 = 2R$. Точка O лежит на высоте треугольника $A_2B_2C_2$ и делит её в отношении $2:1$, считая от C_2, значит, $C_2D = 3OD = 3R$.

Из прямоугольного треугольника OA_2D находим, что

$$A_2D = OD \operatorname{ctg} 30^\circ = R\sqrt{3}.$$

Значит,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A_2B_2C_2} = \frac{1}{2} A_2B_2 \cdot C_2D = R\sqrt{3} \cdot 3R = 3R^2\sqrt{3}.$$

Пусть V_1 и V_2 — объёмы шара и призмы соответственно. Тогда

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad V_2 = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = 3R^2\sqrt{3} \cdot 2R = 6R^3\sqrt{3}.$$

Следовательно,

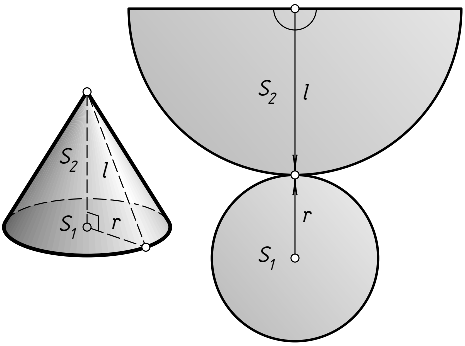
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{6R^3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

◁

Пример 2. Площадь боковой поверхности конуса вдвое больше площади его основания. Найдите угол в развёртке боковой поверхности конуса.

Ответ: 180°.

Р е ш е н и е. Пусть r — радиус основания данного конуса, l — образующая, S_1 — площадь основания конуса, S_2 — площадь боковой поверхности. Тогда S_2 — площадь сектора окружности радиуса l, являющегося развёрткой боковой поверхности конуса. По условию задачи $S_2 = 2S_1$, или $\pi rl = 2\pi r^2$. Отсюда находим, что $r = \frac{l}{2}$. Тогда площадь указанного сектора равна $\frac{\pi l^2}{2}$, т. е. половине площади круга радиуса l. Значит, сектор является полукругом. Следовательно, угол в развёртке боковой поверхности конуса равен 180°. ◁



Пример 3. Площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса под углом 30° к его оси, равна площади осевого сечения. Найдите косинус угла при вершине осевого сечения конуса.

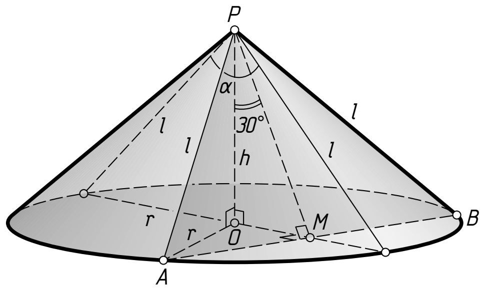
Ответ: $-\frac{1}{7}$.

Р е ш е н и е. Пусть равнобедренный треугольник PAB — указанное сечение конуса с вершиной P, O — центр окружности основания конуса, M — середина хорды AB этой окружности. Тогда угол MPO — это угол между осью конуса и секущей плоскостью, $\angle MPO = 30°$.

Пусть r — радиус основания конуса, h — высота конуса, l — образующая, α — угол в осевом сечении. Тогда

$$OM = PO\operatorname{tg}\angle MPO = h\operatorname{tg}30^\circ = \frac{h}{\sqrt{3}}, \quad PM = 2OM = \frac{2h}{\sqrt{3}},$$

$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{3}}, \quad S_{\Delta APB} = PM \cdot AM = \frac{2h\sqrt{3r^2 - h^2}}{3},$$



а т. к. площадь осевого сечения конуса равна rh, то по условию задачи

$$\frac{2h\sqrt{3r^2-h^2}}{3}=rh, \quad \text{или} \quad \sqrt{3r^2-h^2}=\frac{3}{2}r,$$

откуда находим, что $r^2=\frac{4}{3}h^2$. Следовательно,

$$l=PA=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{\frac{4}{3}h^2+h^2}=h\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

По теореме косинусов

$$\cos\alpha=\frac{l^2+l^2-4r^2}{2l^2}=\frac{\frac{7}{3}h^2+\frac{7}{3}h^2-\frac{16}{3}h^2}{2\cdot\frac{7}{3}h^2}=-\frac{1}{7}. \qquad \triangleleft$$

Подготовительные задачи

1. Радиус основания цилиндра равен 5, высота цилиндра равна 8. Плоскость α, параллельная оси цилиндра, удалена от оси на расстояние, равное 4. Найдите:

а) объём цилиндра;

б) площадь боковой поверхности;

в) площадь сечения цилиндра плоскостью α;

г) расстояние между осью цилиндра и диагональю прямоугольника сечения;

д) угол между осью цилиндра и диагональю прямоугольника сечения.

2. Радиус основания конуса равен $2\sqrt{3}$, угол в осевом сечении равен 60°. Плоскость α проходит через вершину конуса и хорду AB основания, равную $2\sqrt{3}$. Найдите:

а) объём конуса;

б) площадь полной поверхности;

в) площадь сечения конуса плоскостью α;

г) расстояние от центра основания конуса до плоскости α;

д) угол между плоскостями, проходящими через ось конуса и точки A и B соответственно;

е) угол между образующей конуса, проходящей через точку B, и диаметром основания, проходящим через точку A.

3. Площадь сечения шара плоскостью α, удалённой от центра на расстояние, равное 12, равна 81π. Найдите:

а) объём шара;

б) площадь поверхности шара;

в) отношение площади поверхности шара к площади полной поверхности вписанного в шар куба;

г) объём конуса, основание которого — сечение шара плоскостью α, а вершина лежит на поверхности шара;

д) боковую поверхность цилиндра, основания которого — сечения шара плоскостью α и параллельной ей плоскостью.

Задачи на доказательство и вычисление

9.1. Основания одного цилиндра вписаны в основания правильной призмы, а основания другого цилиндра описаны около оснований этой призмы.

а) Докажите, что отношение объёмов цилиндров одно и то же для любой заданной правильной призмы.

б) Найдите это отношение для правильной четырёхугольной призмы.

9.2. Вершины двух конусов совпадают с вершиной правильной пирамиды. Основание одного конуса вписано в основание пирамиды, а другого — описано около основания пирамиды.

а) Докажите, что отношение объёмов цилиндров одно и то же для любой заданной правильной пирамиды.

б) Найдите это отношение для правильной треугольной пирамиды.

9.3. Высота конуса равна 6, а радиус основания равен 8.

а) Докажите, что наибольшая площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину, равна 50.

б) Найдите расстояние от центра основания конуса до этой плоскости.

9.4. Высота конуса равна 4, а радиус основания равен $\sqrt{34}$.

а) Докажите, что наибольшая площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину, равна 25.

б) Найдите расстояние от центра основания конуса до этой плоскости.

9.5. Проведены две параллельные плоскости по одну сторону от центра сферы на расстоянии 3 друг от друга. Эти плоскости дают в сечении две окружности, длины которых равны 18π и 24π.

а) Точка H — ортогональная проекция произвольной точки меньшей окружности на плоскость большей. Докажите, что точка H делит проходящий через неё диаметр большей окружности в отношении $1:7$.

б) Найдите объём шара, ограниченного данной сферой.

9.6. Проведены две параллельные плоскости по разные стороны от центра шара на расстоянии 7 друг от друга. Эти плоскости дают в сечении два круга, площади которых равны 9π и 16π.

а) Точка H — ортогональная проекция произвольной точки окружности меньшего круга на плоскость большего. Докажите, что точка H делит проходящий через неё диаметр большей окружности в отношении $1:7$.

б) Найдите площадь поверхности шара.

9.7. Плоскость α проходит через диаметр AB сферы. Через произвольную точку M, лежащую на сфере, но не лежащую в плоскости α, проведена плоскость β, перпендикулярная прямой AB. Отрезок CD — общая хорда окружностей сечений сферы плоскостями α и β.

а) Докажите, что $\angle CMD = 90^\circ$.

б) Вершина конуса совпадает с точкой A, а окружность основания — с окружностью сечения сферы плоскостью β. Найдите объём конуса, если диаметр сферы равен 15, а $MB = 3\sqrt{5}$.

9.8. Плоскость α проходит через диаметр AB сферы. Через точку B проведена плоскость, касательная к сфере. На этой плоскости взята точка K, причём отрезок KB равен радиусу сферы. Луч AK пересекает сферу в точке M. Через точку M проведена плоскость β, перпендикулярная прямой AB. Отрезок CD — общая хорда окружностей сечений сферы плоскостями α и β.

а) Докажите, что CD — диаметр окружности сечения сферы плоскостью β.

б) Вершина конуса совпадает с точкой B, а окружность основания — с окружностью сечения сферы плоскостью β. Найдите объём конуса, если радиус сферы равен 5.

9.9. Одно основание цилиндра лежит в плоскости основания правильной треугольной пирамиды, а окружность второго вписана в сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину её высоты.

а) Докажите, что радиус основания цилиндра в шесть раз меньше высоты основания пирамиды.

б) Найдите отношение объёмов цилиндра и пирамиды.

9.10. Одно основание цилиндра лежит в плоскости основания правильной четырёхугольной пирамиды, а окружность второго вписана в сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку на её высоте, делящую эту высоту в отношении $1:2$, считая от вершины.

а) Докажите, что радиус основания цилиндра в шесть раз меньше стороны основания пирамиды.

б) Найдите отношение объёмов цилиндра и пирамиды.

9.11. На окружности основания конуса с вершиной P выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как $1:2$.

а) Пусть MN — диаметр окружности основания, перпендикулярный хорде AB. Докажите, что объём одной из пирамид $PABN$ и $PABM$ вдвое больше объёма другой.

б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP, если радиус основания конуса равен 6, а длина его образующей равна 7.

9.12. В окружность основания конуса с вершиной P вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$.

а) Докажите, что объём пирамиды $PABD$ вдвое больше объёма пирамиды $PDEF$.

б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP, если радиус основания конуса равен 6, а длина его образующей равна 9.

9.13. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость α пересекает его основания по хордам длины 12 и 16.

а) Пусть M и N — середины этих хорд, P — точка пересечения прямой MN с осью цилиндра. Докажите, что расстояния от точки P до плоскостей основания цилиндра относятся как $3:4$.

б) Найдите тангенс угла между плоскостью α и плоскостью основания цилиндра.

9.14. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость α пересекает его основания по хордам длины 24 и 10.

а) Пусть M и N — середины этих хорд, P — точка пересечения прямой MN с осью цилиндра. Докажите, что расстояния от точки P до плоскостей основания цилиндра относятся как $5:12$.

б) Найдите тангенс угла между плоскостью α и плоскостью основания цилиндра.

9.15. Через точку P, лежащую на диаметре AB шара, проведена плоскость, перпендикулярная этому диаметру и пересекающая шар по кругу радиуса r.

а) Докажите, что $r^2 = AP \cdot PB$.

б) Найдите высоту конуса наибольшего возможного объёма, вписанного в шар радиуса R.

9.16. Основания цилиндра — сечения шара плоскостями, перпендикулярными его диаметру AB.

а) Докажите, что квадрат образующей цилиндра равен разности квадратов диаметров шара и основания цилиндра.

б) Найдите высоту цилиндра наибольшего возможного объёма, вписанного в шар радиуса R.

9.17. Угол при вершине осевого сечения конуса равен $\arccos\frac{7}{8}$.

а) Докажите, что площадь полной поверхности конуса в пять раз больше площади его основания.

б) Найдите угол в развёртке боковой поверхности.

9.18. Угол при вершине осевого сечения конуса равен $\arccos\frac{7}{9}$.

а) Докажите, что площадь полной поверхности конуса в четыре раза больше площади его основания.

б) Найдите угол в развёртке боковой поверхности.

9.19. Вокруг куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ описана сфера, т. е. все вершины куба лежат на сфере. На ребре CC_1 взята точка M, при этом плоскость ABM образует угол 15° с плоскостью ABC.

а) Докажите, что расстояние от центра сферы до плоскости ABM вдвое меньше радиуса окружности, описанной около грани куба.

б) Найдите длину линии пересечения плоскости ABM и сферы, если ребро куба равно 2.

9.20. Вокруг единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ описана сфера. На ребре B_1C_1 взята точка M, при этом плоскость ABM образует угол 75° с плоскостью ABC.

а) Докажите, что расстояние от центра сферы до плоскости ABM вдвое меньше радиуса окружности, описанной около грани куба.

б) Найдите длину линии пересечения плоскости ABM и сферы.

§ 10. Элементы правильных пирамид

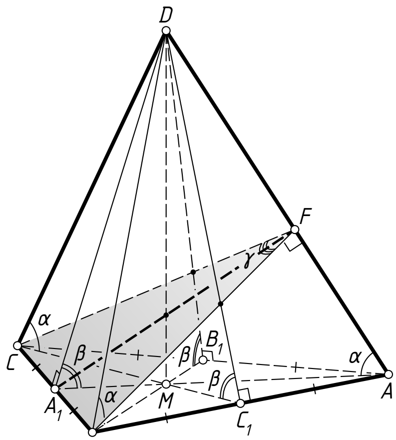
Определение. Пирамида называется правильной, если её основание — правильный многоугольник, а высота пирамиды проходит через центр основания.

Боковые рёбра правильной пирамиды равны, боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Двугранные углы при основании равны, двугранные углы при боковых рёбрах равны.

1. Правильная треугольная пирамида

Основание правильной треугольной пирамиды — равносторонний треугольник, его центр — точка пересечения медиан (высот, биссектрис, серединных перпендикуляров к сторонам).

Пусть $DABC$ — правильная треугольная пирамида с вершиной D, M — центр основания, A_1, B_1 и C_1 — середины сторон соответственно BC, AC и AB основания ABC. Тогда MA, MB и MC — ортогональные проекции боковых рёбер DA, DB и DC на плоскость основания; MA_1, MB_1 и MC_1 — ортогональные проекции апофем DA_1, DB_1 и DC_1 на плоскость основания.



Если сторона основания равна a, то

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad MA = MB = MC = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$MA_1 = MB_1 = MC_1 = \frac{1}{3}AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Из теоремы о трёх перпендикулярах следует, что противоположные рёбра правильной треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, т. е. $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ и $BC \perp AD$.

Угол между боковым ребром и плоскостью основания (будем обозначать его α):

$$\angle DAM = \angle DBM = \angle DCM = \alpha.$$

Угол между боковой гранью и основанием (будем обозначать его β):

$$\angle DA_1M = \angle DB_1M = \angle DC_1M = \beta.$$

Пусть F — основание перпендикуляра, опущенного из точки A_1 на прямую DA. Тогда DA — перпендикуляр к плоскости BFC, т. к. $DA \perp A_1F$ и $DA \perp BC$. Значит, угол между боковыми гранями ABD и ACD — это угол BFC (будем обозначать его γ). Аналогично строятся углы при остальных боковых рёбрах пирамиды. Кроме того, A_1F — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых DA и BC, так что расстояние между этими прямыми равно длине отрезка A_1F.

Пример 1. Все рёбра треугольной пирамиды $DABC$ равны a (правильный тетраэдр). Найдите:

а) высоту тетраэдра;

б) объём;

в) угол между ребром AD и плоскостью ABC;

г) угол между гранями;

д) расстояние между скрещивающимися рёбрами;

е)* радиус описанного шара (все вершины пирамиды лежат на поверхности шара);

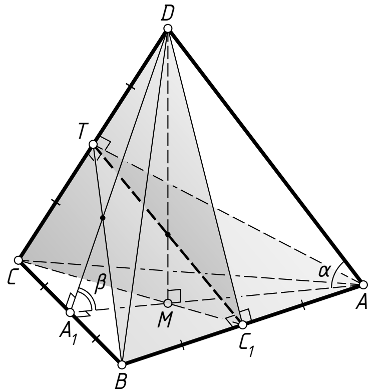
ж)* радиус вписанного шара (все грани пирамиды касаются шара).

Ответ: а) $a\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\arccos\frac{1}{3}$; д) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; е) $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$; ж) $r = \frac{1}{3}R = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Р е ш е н и е. а) Правильный тетраэдр — это частный случай правильной треугольной пирамиды; его высота, проведённая из вершины D, проходит через центр M равностороннего треугольника ABC. Из прямоугольного треугольника AMD находим, что

$$DM = \sqrt{DA^2 - AM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

б) $V_{DABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot DM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.



в) Из прямоугольного треугольника AMD находим, что

$$\cos\alpha = \cos\angle DAM = \frac{AM}{DA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

г) Пусть A_1 — середина ребра BC. Из прямоугольного треугольника A_1MD находим, что

$$\cos\beta = \cos\angle DA_1M = \frac{MA_1}{DA_1} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

д) Пусть C_1 и T — середины противоположных ребер AB и CD соответственно. В равнобедренном треугольнике ATB медиана TC_1 является высотой, значит, $TC_1 \perp AB$. В равнобедренном треугольнике CC_1D медиана TC_1 также является высотой, значит, $TC_1 \perp CD$. Следовательно, TC_1 — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AB и CD. Из прямоугольного треугольника CC_1T находим, что

$$TC_1 = \sqrt{CC_1^2 - CT^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \qquad \triangleleft$$

Пример 2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковая грань образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) угол между боковым ребром и плоскостью основания;

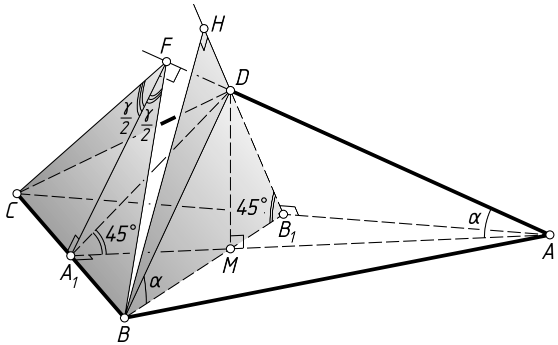
в) расстояние между скрещивающимися рёбрами;

г) угол между боковыми гранями;

д) расстояние от точки B до плоскости ADC;

е)* радиус описанного шара;
ж)* радиус вписанного шара;
з)* угол между апофемой и соседней боковой гранью.

Ответ: а) $\frac{a^3}{24}$; б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; в) $\frac{a\sqrt{15}}{10}$; г) $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}}{3} = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$; д) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; е) $R = a\frac{\sqrt{3}}{4}$; ж) $r = a\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6}$; з) $30°$.



Р е ш е н и е. Используем введённые выше обозначения.

а) Из прямоугольного треугольника DMA_1 находим, что

$$DM = MA_1 \operatorname{tg}\beta = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg} 45° = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Следовательно,

$$V_{DABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot DM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3}{24}.$$

б) Из прямоугольного треугольника DMA находим, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\angle DAM = \frac{DM}{MA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

в) Из прямоугольного треугольника AFA_1 находим, что

$$A_1F = AA_1 \sin\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{15}}{10}.$$

г) Медиана FA_1 треугольника BFC является его высотой, значит, BFC — равнобедренный треугольник, а A_1F — его биссектриса. Тогда $\angle BFA_1 = \frac{\gamma}{2}$ и

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{BA_1}{A_1F} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{15}}{10}} = \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

Следовательно, $\gamma = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}}{3}$. Тогда

$$\cos\gamma = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} = \frac{1-\frac{5}{3}}{1+\frac{5}{3}} = -\frac{1}{4}.$$

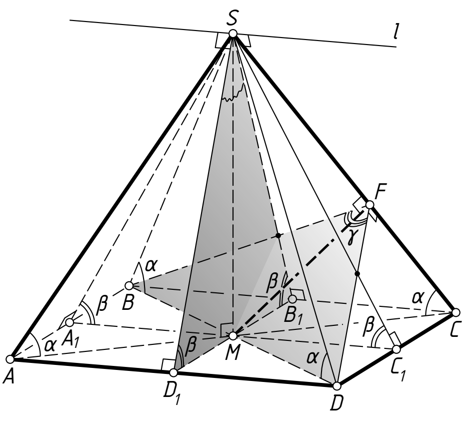
д) Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую DB_1. Тогда $BH \perp DB_1$ и $BH \perp AC$, значит, BH — перпендикуляр к плоскости ADC, а расстояние от точки B до этой плоскости равно длине отрезка BH. Из прямоугольного треугольника BHB_1 находим, что

$$BH = BB_1\sin\beta = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{4}. \qquad \triangleleft$$

2. Правильная четырёхугольная пирамида

Основание правильной четырёхугольной пирамиды — квадрат, его центр — точка пересечения диагоналей.

Пусть $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с вершиной S, M — центр основания, A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD основания $ABCD$. Тогда MA, MB, MC и MD — ортогональные проекции боковых рёбер SA, SB, SC и SD на плоскость основания; MA_1, MB_1, MC_1 и MD_1 — ортогональные проекции апофем SA_1, SB_1, SC_1 и SD_1 на плоскость основания.



Если сторона основания равна a, то

$$AC = BD = a\sqrt{2}, \quad MA = MB = MC = MD = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$MA_1 = MB_1 = MC_1 = MD_1 = \frac{1}{2}B_1D_1 = \frac{a}{2}, \quad S_{ABCD} = a^2.$$

Из теоремы о трёх перпендикулярах следует, что боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с этим ребром диагонали основания, т. е. $SA \perp BD$, $SC \perp BD$, $SB \perp AC$ и $SD \perp AC$.

Угол между боковым ребром и плоскостью основания (будем обозначать его α):

$$\angle SAM = \angle SBM = \angle SCM = \angle SDM = \alpha.$$

Угол между боковой гранью и основанием (будем обозначать его β):

$$\angle SA_1M = \angle SB_1M = \angle SC_1M = \angle SD_1M = \beta.$$

Пусть F — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую SC. Тогда SC — перпендикуляр к плоскости BFD, т. к. $SC \perp MF$ и $SC \perp BD$. Значит, угол между боковыми гранями BSC и DSC — это угол BFD (будем обозначать его γ). Аналогично строятся углы при остальных боковых рёбрах пирамиды. Кроме того, MF — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых SC и BD, так что расстояние между этими прямыми равно длине отрезка MF.

Плоскости ASD и BSC проходят через параллельные прямые AD и BC, значит, прямая l пересечения этих плоскостей проходит через точку S параллельно им. Отсюда следует, что линейный угол двугранного угла между противоположными боковыми гранями ASD и BSC — это угол между апофемами SB_1 и SD_1, т. е. угол B_1SD_1.

Пример 3. Сторона основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна a, боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) угол между боковой гранью и плоскостью основания;

в) расстояние между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром;

г) угол между соседними боковыми гранями;

д) угол между противоположными боковыми гранями;

е) расстояние от точки A до плоскости CSD;

ж)* радиус описанного шара;

з)* радиус вписанного шара;

и)* угол между апофемой и соседней боковой гранью.

Ответ: а) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$; б) $\operatorname{arctg}\sqrt{6} = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{7}}$; в) $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$; г) $2\operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \arccos\left(-\dfrac{1}{7}\right)$; д) $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{6}} = \arccos\dfrac{5}{7}$; е) $a\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$; ж) $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$; з) $r = \dfrac{a(\sqrt{7}-1)}{2\sqrt{6}}$; и) $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{7}$.

Решение. Используем введённые выше обозначения.

а) Из прямоугольного треугольника SAM находим, что

$$SM = MA\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{tg}60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Следовательно,

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABCD}\cdot SM = \frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

б) Из прямоугольного треугольника SMA_1 находим, что

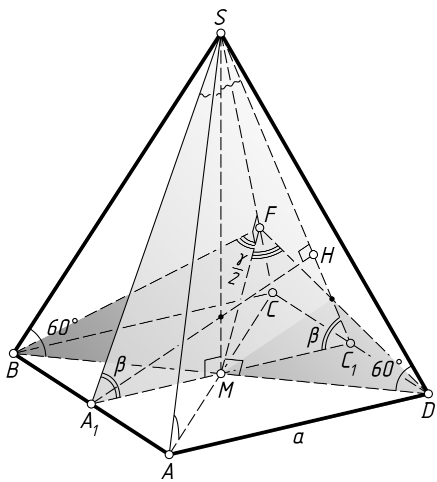
$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\angle SA_1M = \frac{SM}{MA_1} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{6}.$$

Следовательно, $\beta = \operatorname{arctg}\sqrt{6}$. Тогда

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+6}} = \frac{1}{\sqrt{7}}, \quad \sin\beta = \sqrt{\frac{6}{7}}.$$

в) Из прямоугольного треугольника CFM находим, что

$$FM = CM\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$



г) Медиана FM треугольника BFD является его высотой, значит, BFD — равнобедренный треугольник, а FM — его биссектриса. Тогда $\angle BFM = \frac{\gamma}{2}$, и

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{BM}{FM} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно, $\gamma = 2\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$. Тогда

$$\cos\gamma = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} = \frac{1-\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}} = -\frac{1}{7}.$$

д) Линейный угол двугранного угла, образованного противолежащими боковыми гранями ASB и CSD, — это угол A_1SC_1. Из прямоугольного треугольника A_1SM находим, что

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle A_1SC_1\right) = \operatorname{tg}\angle A_1SM = \frac{MA_1}{SM} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Следовательно, $\angle A_1SC_1 = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{6}}$. Тогда

$$\cos\angle A_1SC_1 = \frac{1-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{6}} = \frac{5}{7}.$$

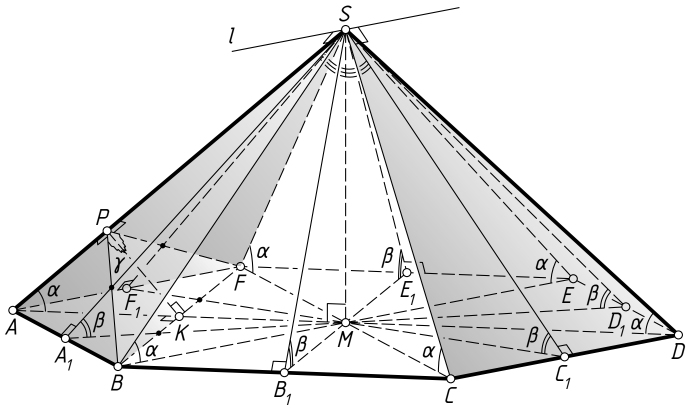
е) Поскольку $AB \parallel CD$, прямая AB параллельна плоскости CSD, значит, все точки прямой AB равноудалены от этой плоскости. Тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки A_1 до плоскости CSD, т. е. высоте A_1H треугольника A_1SC_1. Из прямоугольного треугольника A_1HC_1 находим, что

$$A_1H = A_1C_1\sin\beta = a\cdot\sqrt{\frac{6}{7}} = a\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}. \qquad \lhd$$

3. Правильная шестиугольная пирамида

Основание правильной шестиугольной пирамиды — правильный шестиугольник, его центр — точка пересечения больших диагоналей. Эти диагонали разбивают правильный шестиугольник на шесть равносторонних треугольников со сторонами, равными стороне шестиугольника.

Пусть $SABCDEF$ — правильная шестиугольная пирамида с вершиной S, M — центр основания, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 и F_1 — середины сторон соответственно AB, BC, CD, DE, EF и FA основания $ABCDEF$. Тогда MA, MB, MC, MD, ME и MF — ортогональные проекции боковых рёбер SA, SB, SC, SD, SE и SF на плоскость основания; MA_1, MB_1, MC_1, MD_1, ME_1 и MF_1 — ортогональные проекции апофем SA_1, SB_1, SC_1, SD_1, SE_1 и SF_1 на плоскость основания.



Если сторона основания равна a, то

$$MA = MB = MC = MD = ME = MF = a, \quad AD = BE = CF = 2a,$$

$$AC = BD = CE = DF = EA = FB = a\sqrt{3}, \quad FC \parallel AB, \quad AD \parallel BC, \quad BE \parallel CD,$$

$$MA_1 = MB_1 = MC_1 = MD_1 = ME_1 = MF_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{ABCDEF} = 6S_{\Delta AMB} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Из теоремы о трёх перпендикулярах следует, что $SA \perp BF$. Аналогично для остальных боковых рёбер. Кроме того, отрезки BF и AM делятся их точкой пересечения K пополам, $BD \perp AB$ и т. д.

Угол между боковым ребром и плоскостью основания (будем обозначать его α):

$$\angle SAM = \angle SBM = \angle SCM = \angle SDM = \angle SEM = \angle SFM = \alpha.$$

Угол между боковой гранью и основанием (будем обозначать его β):

$$\angle SA_1M = \angle SB_1M = \angle SC_1M = \angle SD_1M = \angle SE_1M = \angle SF_1M = \beta.$$

Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из точки K на прямую SA. Тогда SA — перпендикуляр к плоскости BPF, т. к. $SA \perp KP$ и $SA \perp BF$. Значит, угол между боковыми гранями ASB и ASF — это угол BPF (будем обозначать его γ). Аналогично строятся углы при остальных боковых рёбрах пирамиды. Кроме того, KP — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых SA и BF, так что расстояние между этими прямыми равно длине отрезка KP.

Плоскости противоположных боковых граней ASF и CSD проходят через параллельные прямые AF и CD, значит, прямая l пересечения этих плоскостей проходит через точку S параллельно этим прямым. Отсюда следует, что линейный угол двугранного угла между противоположными боковыми гранями ASF и CSD — это угол между апофемами SF_1 и SC_1, т. е. угол C_1SF_1.

Пример 4. Сторона основания $ABCDEF$ правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна a, а апофема пирамиды равна $a\sqrt{3}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) угол между боковой гранью и плоскостью основания;

в) угол между боковым ребром и плоскостью основания;

г) расстояние между боковым ребром SA и диагональю BF основания;

д) угол между соседними боковыми гранями;

е) угол между противоположными боковыми гранями;

ж) расстояние от точки A до плоскости DSE;

з)* радиус описанного шара;

и)* радиус вписанного шара;

к)* угол между апофемой и соседней боковой гранью.

Ответ: а) $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$; б) 60°; в) $\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$; г) $\frac{3a}{2\sqrt{13}}$; д) $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{13}{3}}=$ $=\arccos\left(-\frac{5}{8}\right)$; е) 60°; ж) $\frac{3}{2}a$; з) $R=\frac{13}{12}a$; и) $r=\frac{a}{2}$; к) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Р е ш е н и е. Используем введённые выше обозначения.

а) Поскольку $MA_1=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, в прямоугольном треугольнике SA_1M катет MA_1 вдвое меньше гипотенузы. Значит, $\angle A_1SM=30^\circ$. Тогда

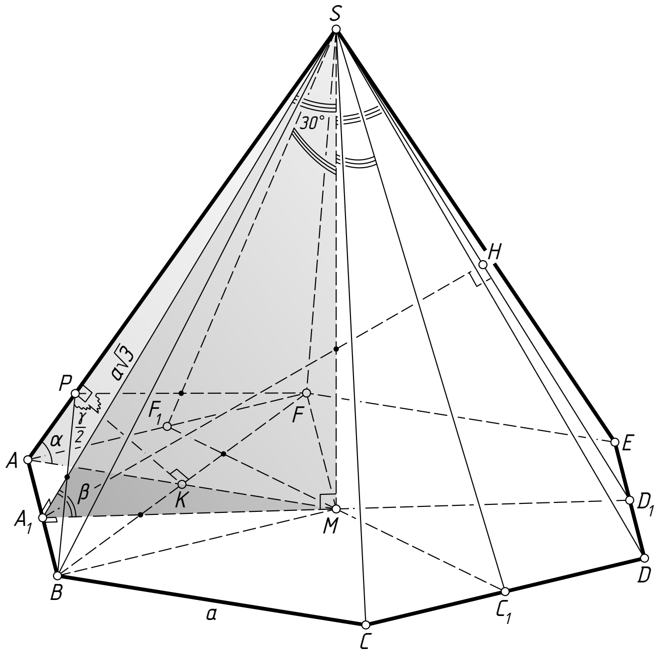
$$SM = MA_1\operatorname{ctg}30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{3}{2}a.$$

Следовательно,

$$V_{SABCDEF} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABCDEF}\cdot SM = \frac{1}{3}\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}a = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}.$$

б) Из прямоугольного треугольника SA_1M находим, что

$$\beta = \angle SA_1M = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$



в) Из прямоугольного треугольника SMA находим, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\angle SAM = \frac{SM}{MA} = \frac{\frac{3}{2}a}{a} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}$. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

г) Из прямоугольного треугольника AKP находим, что

$$PK = AK\sin\alpha = \frac{a}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3a}{2\sqrt{13}}.$$

д) Медиана PK треугольника BPF является его высотой, значит, BPF — равнобедренный треугольник, а PK — его биссектриса. Тогда $\angle BPK = \dfrac{\gamma}{2}$, и

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{BK}{PK} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{2\sqrt{13}}} = \sqrt{\frac{13}{3}}.$$

Следовательно, $\gamma = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{13}{3}}$. Тогда

$$\cos\gamma = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} = \frac{1-\frac{13}{3}}{1+\frac{13}{3}} = -\frac{5}{8}.$$

е) Линейный угол двугранного угла, образованного противолежащими боковыми гранями ASF и CSD, — это угол F_1SC_1. Треугольник F_1SC_1 равносторонний, поэтому $\angle F_1SC_1 = 60^\circ$.

ж) Поскольку $AB \parallel DE$, прямая AB параллельна плоскости DSE, значит, все точки прямой AB равноудалены от этой плоскости. Тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки A_1 до плоскости DSE, т. е. высоте A_1H равностороннего треугольника A_1SD_1. Следовательно, $A_1H = SM = \frac{3}{2}a$. ◁

Тренировочные задачи

1. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) угол между боковой гранью и основанием;

в) расстояние между скрещивающимися рёбрами;

г) угол между боковыми гранями;

д) расстояние от вершины основания до противоположной боковой грани;

е)* радиус описанного шара;

ж)* радиус вписанного шара;

з)* угол между апофемой и соседней боковой гранью.

2. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, боковая грань образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) угол между боковым ребром и основанием;

в) расстояние между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром;

г) угол между противоположными боковыми гранями;

д) угол между соседними боковыми гранями;

е) расстояние от вершины основания до противоположной боковой грани;

ж)* радиус описанного шара;

з)* радиус вписанного шара;

и)* угол между апофемой и соседней боковой гранью.

3. Сторона основания и высота правильной шестиугольной пирамиды равны a. Найдите:

а) угол между боковым ребром и основанием;

б) угол между боковой гранью и основанием;

в) плоский угол при вершине пирамиды;

г) угол между соседними боковыми гранями;

д) расстояние от вершины основания до противоположной боковой грани;

е)* радиус описанного шара;

ж)* радиус вписанного шара;

з)* угол между апофемой и соседней боковой гранью.

4. Сторона основания и апофема правильной треугольной пирамиды равны a. Найдите:

а)* радиус описанного шара;

б)* радиус вписанного шара;

в) угол между боковыми гранями;

г)* угол между апофемой и соседней гранью.

5. Сторона основания и апофема правильной четырёхугольной пирамиды равны a. Найдите:

а)* радиус описанного шара;

б)* радиус вписанного шара;

в) угол между соседними боковыми гранями;

г)* угол между апофемой и соседней боковой гранью.

6. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а расстояние между скрещивающимися рёбрами равно $\frac{3}{8}a$. Найдите:

а) угол между боковым ребром и плоскостью основания;

б) угол между боковой гранью и плоскостью основания;

в) угол между боковыми гранями;

г)* радиус описанного шара;

д)* радиус вписанного шара;

е)* угол между апофемой и соседней боковой гранью.

7. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а расстояние между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром равно $\frac{a}{4}$. Найдите:

а) угол между боковым ребром и плоскостью основания;

б) угол между боковой гранью и плоскостью основания;

в) угол между соседними боковыми гранями;

г)* радиус описанного шара;

д)* радиус вписанного шара;

е)* угол между апофемой и соседней боковой гранью.

8*. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a; угол между апофемой и соседней боковой гранью равен 45°. Найдите:

а) угол между боковым ребром и основанием;

б) угол между боковой гранью и основанием;

в) угол между боковыми гранями;

г) радиус описанного шара;

д) радиус вписанного шара.

Приложение 1. Метод координат

Приведём основные формулы.

1. Расстояния между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ (как и модуль вектора $\overrightarrow{AB}$) в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ находится по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Координаты середины C отрезка AB равны средним арифметическим соответствующих координат его концов: $x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z_C = \frac{z_1 + z_2}{2}$. Координаты точки пересечения медиан треугольника равны средним арифметическим соответствующих координат его вершин.

2. Скалярным произведением векторов $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ называется число

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

3. Если $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ — ненулевые векторы, а φ — угол между ними, то

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

4. Векторы $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ перпендикулярны (ортогональны) тогда и только тогда, когда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, или $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

5. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n}(A; B; C)$ (вектору нормали плоскости), имеет вид

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0, \quad \text{или} \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

6. Любое линейное уравнение с тремя неизвестными

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где числа A, B и C одновременно не равны нулю, есть уравнение некоторой плоскости, причём $\vec{n}(A; B; C)$ — вектор нормали этой плоскости.

7. (Уравнение плоскости в отрезках.) Если плоскость не проходит через начало координат, то её уравнение можно представить в виде

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

где $(p; 0; 0)$, $(0; q; 0)$, $(0; 0; r)$ — точки пересечения плоскости с осями Ox, Oy и Oz соответственно.

Если плоскость не проходит через начало координат и параллельна одной из координатных осей, например Ox, то её уравнение имеет вид

$$\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1,$$

где $(0; q; 0)$, $(0; 0; r)$ — точки пересечения плоскости с осями Oy и Oz соответственно.

8. Косинус угла между плоскостями равен модулю косинуса угла между векторами нормалей этих плоскостей, т. е. если φ — угол между плоскостями, заданными уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

то

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

9. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно ненулевому вектору $\vec{m}(a; b; c)$ (направляющий вектор прямой), имеют вид

$$x-x_0=at,\ y-y_0=bt,\ z-z_0=ct.$$

10. Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

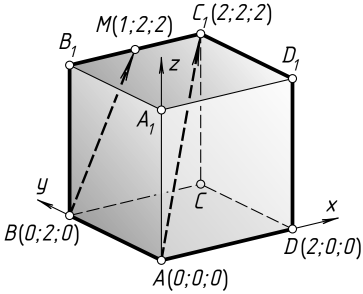
11. Если φ — угол между прямой с направляющим вектором $\vec{m}(a; b; c)$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ с вектором нормали $\vec{n}(A; B; C)$, то $\sin\varphi$ равен модулю косинуса угла между этими векторами, т. е.

$$\sin\varphi=\frac{|aA+bB+cC|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пример 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M — середина ребра B_1C_1. Найдите угол между прямыми AC_1 и BM.

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Р е ш е н и е. Введём прямоугольную систему координат, взяв за её начало вершину A и направив оси Ax, Ay и Az по лучам AD, AB



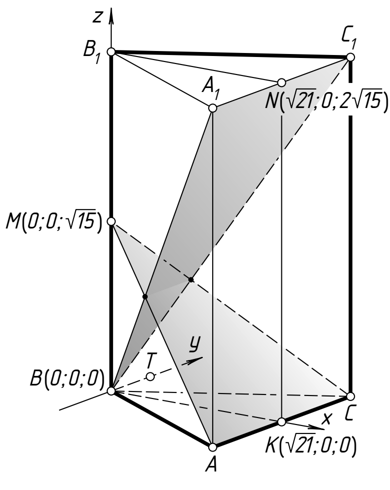
и AA_1 соответственно. Пусть ребро куба равно 2. Найдём координаты нужных точек: $A(0;0;0)$, $C_1(2;2;2)$, $B(0;2;0)$, $M(1;2;2)$. Косинус угла между прямыми AC_1 и BM равен модулю косинуса угла между векторами $\overrightarrow{AC_1}(2;2;2)$ и $\overrightarrow{BM}(1;0;2)$, т. е.

$$\cos\varphi = \frac{|2\cdot 1 + 2\cdot 0 + 2\cdot 2|}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+2^2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}. \qquad \triangleleft$$

Пример 2. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания $2\sqrt{7}$ и боковым ребром $2\sqrt{15}$. Точка M — середина ребра BB_1. Найдите угол между плоскостями AMC и A_1BC_1.

Ответ: $\arccos\frac{1}{6}$.

Р е ш е н и е. Пусть K и N — середины рёбер AC и A_1C_1 соответственно. На прямой, проходящей через вершину B параллельно AC, отметим точку T так, чтобы луч BT был сонаправлен с лучом AC.



Введём прямоугольную систему координат, взяв за её начало вершину B и направив оси Bx, By и Bz по лучам BK, BT и BB_1 соответственно. Найдём координаты точек: $B(0;0;0)$, $K(\sqrt{21};0;0)$, $N(\sqrt{21};0;2\sqrt{15})$, $M(0;0;\sqrt{15})$. Тогда уравнение плоскости A_1BC_1 можно записать в виде $z=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}x$, или $2x\sqrt{5}-z\sqrt{7}=0$, а уравнение плоскости AMC имеет вид $\frac{x}{\sqrt{21}}+\frac{z}{\sqrt{15}}=1$, или $x\sqrt{5}+z\sqrt{7}-\sqrt{105}=0$. Косинус угла между плоскостями A_1BC_1 и AMC равен модулю косинуса угла между векторами нормалей этих плоскостей, т. е. между векторами $\vec{n}_1(2\sqrt{5};0;-\sqrt{7})$ и $\vec{n}_2(\sqrt{5};0;\sqrt{7})$. Следовательно,

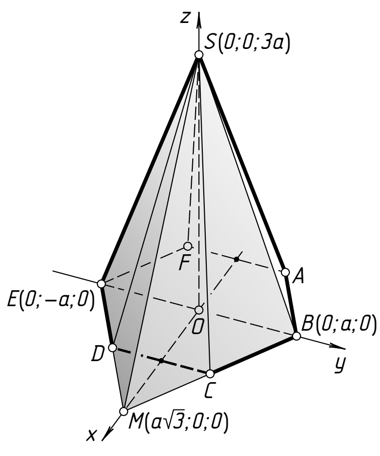
$$\cos\varphi=\frac{|2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}+0\cdot 0-\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}|}{\sqrt{(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{7})^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{7})^2}}=\frac{1}{6}. \qquad \triangleleft$$

Пример 3. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$. Сторона основания $ABCDEF$ втрое меньше высоты SO. Найдите угол между плоскостями BSC и DSE.

Ответ: $\arccos\frac{5}{13}$.

Р е ш е н и е. Положим $AB=a$, тогда $SO=3a$. Пусть M — точка пересечения прямых BC и DE. Введём прямоугольную систему координат, взяв за её начало точку O и направив оси Ox, Oy и Oz по лучам OM, OB и OS соответственно. Выпишем координаты нужных нам точек: $O(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $E(0;-a;0)$, $M(a\sqrt{3};0;0)$ и $S(0;0;3a)$. Тогда уравнения плоскостей BSC и DSE можно записать в виде

$$\frac{x}{a\sqrt{3}}+\frac{y}{a}+\frac{z}{3a}=1, \qquad \frac{x}{a\sqrt{3}}-\frac{y}{a}+\frac{z}{3a}=1,$$



или

$$x\sqrt{3}+3y+z-3a=0, \quad x\sqrt{3}-3y+z-3a=0.$$

Косинус угла φ между плоскостями равен модулю косинуса угла между векторами нормалей этих плоскостей, т. е.

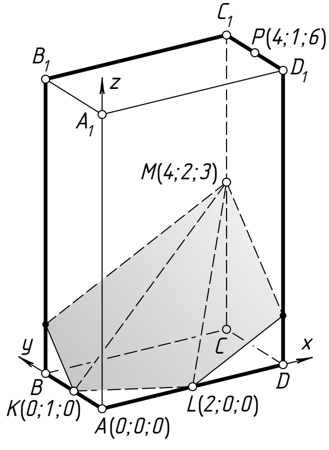
$$\cos\varphi = \frac{|\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+3\cdot(-3)+1\cdot 1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2+1^2}} = \frac{5}{13}. \qquad \triangleleft$$

Пример 4. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами $AB=2$, $AD=4$, $AA_1=6$. Найдите расстояние от середины ребра D_1C_1 до плоскости, проходящей через середины рёбер AB, AD и CC_1.

Ответ: $\frac{8}{3}$.

Р е ш е н и е. Пусть K, L, M и P — середины рёбер AB, AD, CC_1 и C_1D_1 соответственно. Введём прямоугольную систему координат, взяв за её начало вершину A и направив оси Ax, Ay и Az по лучам AD, AB и AA_1 соответственно. Найдём координаты следующих точек: $L(2;0;0)$, $K(0;1;0)$, $M(4;2;3)$, $P(4;1;6)$. Тогда уравнение плоскости KLM в отрезках имеет вид $\frac{x}{2}+y+\frac{z}{c}=1$. Подставив в это уравнение координаты точки M, найдём, что $c=-1$. Таким образом, уравнение плоскости KLM можно записать в виде $\frac{x}{2}+y-z=1$, или $x+2y-2z-2=0$. Пусть расстояние от точки $P(4;1;6)$ до этой плоскости равно d. Тогда

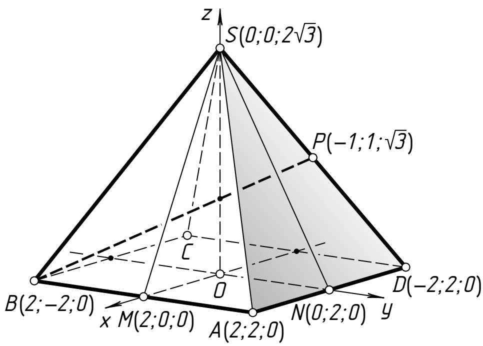
$$d = \frac{|4+2\cdot 1-2\cdot 6-2|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{8}{3}. \qquad \triangleleft$$



Пример 5. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Известно, что её высота относится к стороне основания как $\sqrt{3}:2$. Найдите угол между плоскостью ASD и прямой, проходящей через точку B и середину ребра SD.

Ответ: $\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Р е ш е н и е. Пусть высота SO пирамиды равна $2\sqrt{3}$, сторона основания равна 4, P — середина ребра SD, M и N — середины рёбер AB и AD соответственно. Введём прямоугольную систему координат, взяв за её начало точку O и направив оси Ox, Oy и Oz по лучам OM, ON и OS соответственно. Найдём координаты следующих точек: $N(0;2;0)$, $S(0;0;2\sqrt{3})$, $B(2;-2;0)$, $P(-1;1;\sqrt{3})$. Тогда уравнение плоскости ASD можно записать в виде $\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2\sqrt{3}}=1$, или $y\sqrt{3}+z-2\sqrt{3}=0$, а в качестве направляющего вектора прямой BP можно взять вектор $\overrightarrow{PB}(3;-3;-\sqrt{3})$.



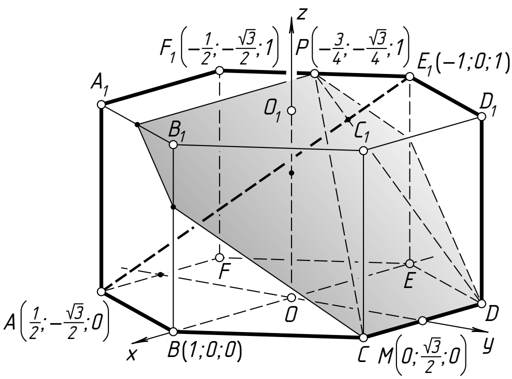
Если φ — искомый угол, то $\sin\varphi$ равен модулю косинуса угла между вектором нормали $\vec{n}(0;\sqrt{3};1)$ плоскости ASD и вектором $\overrightarrow{PB}(3;-3;-\sqrt{3})$, т. е.

$$\sin\varphi=\frac{|0\cdot 3+\sqrt{3}\cdot(-3)+1\cdot(-\sqrt{3})|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{2}{\sqrt{7}}. \qquad \triangleleft$$

Пример 6. Боковое ребро правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равно стороне основания. Точка P — середина ребра E_1F_1. Найдите угол между прямой AE_1 и плоскостью CDP.

Ответ: $\arcsin\dfrac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{43}}$.

Р е ш е н и е. Пусть O и O_1 — центры оснований $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ соответственно, M — середина ребра CD, и пусть сторона основания равна 1. Введём прямоугольную систему координат, взяв за её начало точку O и направив оси Ox, Oy и Oz по лучам OB, OM и OO_1 соответственно. Найдём координаты следующих точек: $M\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $P\left(-\frac{3}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{4}; 1\right)$, $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $E_1(-1; 0; 1)$. Плоскость CDP проходит через прямую CD, параллельную оси Ox, поэтому её уравнение можно записать в виде $\frac{y}{OM} + \frac{z}{c} = 1$, или $\frac{2y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{c} = 1$. Кроме того, координаты точки P удовлетворяют этому уравнению, т. е. $-\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{c} = 1$. Отсюда находим, что $c = \frac{2}{3}$. Таким образом, уравнение плоскости CDP имеет вид $\frac{2y}{\sqrt{3}} + \frac{3z}{2} = 1$, или $4y + 3z\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$.



В качестве направляющего вектора прямой AE_1 можно взять вектор $\overrightarrow{E_1A}\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -1\right)$.

Если φ — искомый угол, то $\sin\varphi$ равен модулю косинуса угла между вектором нормали $\vec{n}(0; 4; 3\sqrt{3})$ плоскости CDP и вектором $\overrightarrow{E_1A}\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -1\right)$, т. е.

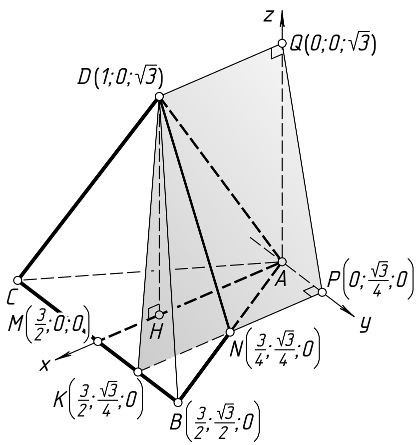
$$\sin\varphi = \frac{\left|0 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\sqrt{3} \cdot (-1)\right|}{\sqrt{4^2 + (3\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{43}}. \qquad \triangleleft$$

Пример 7. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D, стороной основания $AB = \sqrt{3}$ и высотой $DH = \sqrt{3}$. Найдите расстояние между прямыми AM и DN, где M и N — середины рёбер BC и AB соответственно.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{3}{17}}$.

Решение. Пусть P — проекция точки N на прямую, проведённую через точку A параллельно BC, а Q — проекция точки D на прямую, проведённую через точку A параллельно DH. Введём прямоугольную систему координат, взяв за её начало точку A и направив оси Ox, Oy и Oz по лучам AM, AP и AQ соответственно. Найдём координаты следующих точек: $A(0;0;0)$, $M\left(\frac{3}{2};0;0\right)$, $D(1;0;\sqrt{3})$, $N\left(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};0\right)$. Пусть K — точка пересечения прямых NP и BC. Тогда прямая AM параллельна плоскости DNK, т.к. $AM \parallel NK$. Значит, расстояние между прямыми AM и DN равно расстоянию от произвольной точки прямой AM (например, от точки $A(0;0;0)$) до этой плоскости. Уравнение плоскости DNK можно записать в виде $\frac{y}{AP}+\frac{z}{AQ}=1$, или $\frac{4y}{\sqrt{3}}+\frac{z}{\sqrt{3}}=1$. Значит, уравнение плоскости DNK имеет вид $4y+z-\sqrt{3}=0$. По формуле расстояния от точки до плоскости находим, что

$$d=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4^2+1^2}}=\sqrt{\frac{3}{17}}. \qquad \triangleleft$$



Приложение 2. Задачи ЕГЭ 2017

1. Длина диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 3. На луче A_1C отмечена точка P так, что $A_1P = 4$.

а) Докажите, что $PBDC_1$ — правильный тетраэдр.

б) Найдите длину отрезка AP.

Решение. а) *Первый способ.* Поскольку $A_1C = AB\sqrt{3}$, а $BD = BC_1 = DC_1 = AB\sqrt{2}$, то $AB = \sqrt{3}$, а $BD = BC_1 = DC_1 = \sqrt{6}$.

Известно, что диагональ A_1C перпендикулярна плоскости BDC_1, проходит через центр H равностороннего треугольника BDC_1 и делится им в отношении $1:2$, считая от точки C. Значит,

$$CH = \frac{1}{3}AC_1 = 1, \quad PH = PC + CH = 1 + 1 = 2,$$

а PH — высота правильной треугольной пирамиды $PBDC_1$ с вершиной P.

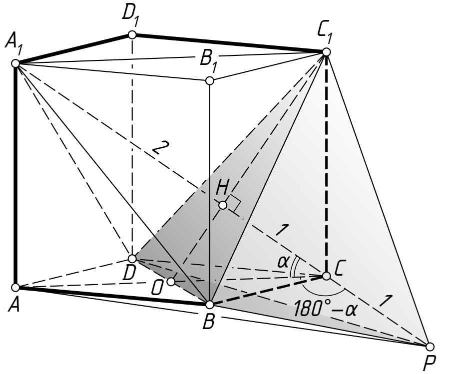
Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Тогда

$$HC_1 = \frac{2}{3}C_1O = \frac{2}{3}\cdot\frac{BD\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}.$$

Из прямоугольного треугольника PHC_1 находим, что

$$PC_1 = \sqrt{HC_1^2 + PH^2} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6} = BD.$$

Аналогично $PB = PD = \sqrt{6}$. Таким образом, все грани пирамиды $PBDC_1$ — правильные треугольники (со стороной $\sqrt{6}$). Следовательно, это правильный тетраэдр.



Второй способ. Известно, что диагональ A_1C перпендикулярна плоскости BDC_1, проходит через центр H равностороннего треугольника BDC_1 и делится им в отношении $1:2$, считая от точки C. Значит,

$$CH = \frac{1}{3}AC_1 = 1, \quad PH = PC + CH = 1 + 1 = 2 = A_1H.$$

Тогда точка P симметрична точке A_1 относительно плоскости BDC_1, а тетраэдр $PBDC_1$ симметричен правильному тетраэдру A_1BDC_1. Следовательно, $PBDC_1$ также правильный тетраэдр.

б) Точка P лежит в плоскости AA_1C, т. к. она лежит на прямой A_1C, лежащей в этой плоскости. Длину отрезка AP найдём из треугольника APC.

Обозначим $\angle ACA_1 = \alpha$. Тогда

$$\angle ACP = 180^\circ - \alpha, \quad \cos\alpha = \frac{AC}{A_1C} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\cos\angle ACP = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Следовательно,

$$AP = \sqrt{AC^2 + CP^2 - 2AC\cdot CP\cos\angle ACP} =$$

$$= \sqrt{6 + 1 + 2\cdot\sqrt{6}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}} = \sqrt{6+1+4} = \sqrt{11}. \quad \triangleleft$$

Ответ: $\sqrt{11}$.

2. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.

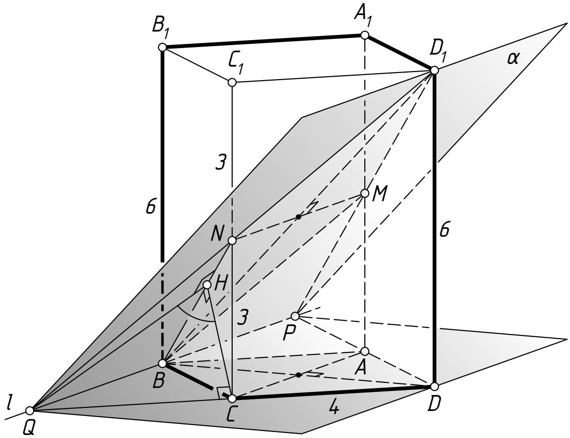
б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

Р е ш е н и е. а) Плоскость $ABCD$ проходит через прямую AC, параллельную плоскости α, и имеет с плоскостью α общую точку B, следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой l, проходящей через точку B параллельно AC.

Пусть прямая l пересекает прямые AD и CD в точках P и Q соответственно, M — точка пересечения D_1P и AA_1, N — точка пересечения D_1Q и CC_1. Тогда сечение параллелепипеда плоскостью α — ромб BMD_1N.

Поскольку $CQ \parallel AB$ и $BQ \parallel AC$, четырёхугольник $ABQC$ — параллелограмм, поэтому $CQ = AB = CD = C_1D_1$. Треугольники CNQ и C_1ND_1 равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, следовательно,

N — середина QD_1. Аналогично докажем, что M — середина PD_1, поэтому MN — средняя линия треугольника PD_1Q, $MN \parallel PQ \parallel AC$, а т. к. $BD_1 \perp MN$ (как диагонали ромба), то $BD_1 \perp AC$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BD \perp AC$, т. е. диагонали прямоугольника $ABCD$ перпендикулярны, следовательно, это квадрат.



б) Плоскости α и BCC_1 пересекаются по прямой BN, а QC — перпендикуляр к плоскости BCC_1. Пусть CH — высота прямоугольного треугольника BCN. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $QH \perp BN$. Значит, CHQ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями α и BCC_1. Тогда

$$CH = \frac{BC \cdot CN}{BN} = \frac{BC \cdot CN}{\sqrt{BC^2 + CN^2}} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{16+9}} = \frac{12}{5},$$

$$\operatorname{tg} \angle CHQ = \frac{CQ}{CH} = \frac{4}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{3}. \qquad \triangleleft$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{5}{3}$.

3. Основание пирамиды $PABCD$ — трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, прямые AB и CD пересекаются в точке K.

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

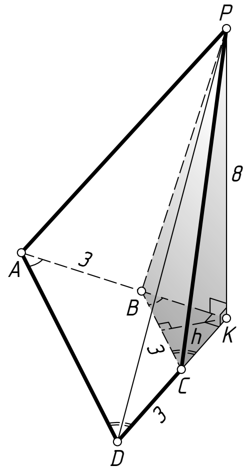
б) Найдите объём пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды равна 8

Р е ш е н и е. а) Плоскости PAB и PCD, перпендикулярные плоскости ABC, пересекаются по прямой, проходящей через точку P перпендикулярно плоскости ABC. Значит, PK — высота данной пирамиды.

Прямые AK и DK перпендикулярны, т. к.

$$\angle AKD = 180^\circ - (\angle BAD + \angle ADC) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

а т. к. AKD — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями PAB и PCD, то эти плоскости перпендикулярны.



б) Треугольник BKC равнобедренный и прямоугольный, поскольку $\angle KBC = \angle KCB = 45^\circ$. Его высота, опущенная на гипотенузу BC, равна половине гипотенузы, т. е. $h = \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2}$. Тогда

$$S_{\Delta BKC} = \frac{1}{2}BC \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}.$$

Следовательно, объём пирамиды $PKBC$ равен

$$\frac{1}{3}S_{\Delta BKC} \cdot PK = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} \cdot 8 = 6. \qquad \triangleleft$$

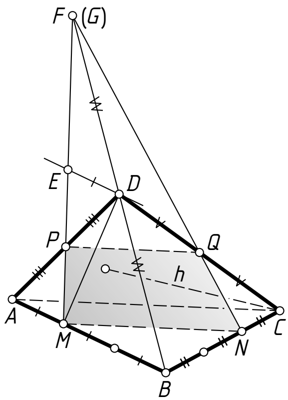
Ответ: 6.

4. На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $DABC$ отмечены точки M и N так, что $AM : MB = CN : NB = 1 : 2$. Точки P и Q — середины рёбер DA и DC соответственно.

а) Докажите, что точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

Р е ш е н и е. а) Пусть F — точка пересечения прямых BD и MP. Через через вершину D проведём прямую, параллельную AB. Пусть она пересекается с отрезком FM в точке E. Из равенства треугольников DPE и APM получаем, что $DE = AM = \frac{1}{2}AB$. Значит, DE — средняя линия треугольника BFM. Следовательно, $BF = 2BD$. Аналогично докажем, что если G — точка пересечения прямых BD и NQ, то $BG = 2BD$. Значит, точки F и G совпадают. Следовательно, точки P, Q, M и N лежат в плоскости пересекающихся прямых MP и NQ.



б) Пусть V, V_1 и V_2 — объёмы треугольных пирамид $DABC$, $NFBM$ и $QFDP$ соответственно, $S_{\triangle ADB} = S$, а высота треугольной пирамиды $DABC$, опущенная из вершины C, равна h. Тогда, поскольку $NB = \frac{2}{3}CB$, расстояние от точки N до плоскости ABD равно $\frac{2}{3}h$. Аналогично расстояние от точки Q до плоскости ABD равно $\frac{1}{2}h$. Кроме того,

$$S_{\triangle FBM} = 2S_{\triangle BDM} = 2 \cdot \frac{2}{3}S_{\triangle ABD} = \frac{4}{3}S,$$
$$S_{\triangle FDP} = \frac{1}{2}S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}S.$$

Значит,

$$V_1 = \frac{1}{3}S_{\triangle FBM} \cdot \frac{2}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}S \cdot \frac{2}{3}h = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{3}Sh = \frac{8}{9}V,$$
$$V_2 = \frac{1}{3}S_{\triangle FDP} \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{4}V.$$

Пусть V_3 — объём той части пирамиды $DABC$, которая содержит точку B. Тогда

$$V_3 = V_1 - V_2 = \frac{8}{9}V - \frac{1}{4}V = \frac{23}{36}V,$$

а объём оставшейся части равен

$$V-\frac{23}{36}V=\frac{13}{36}V.$$

Следовательно, искомое отношение равно $\frac{13}{23}$. ◁

Ответ: 13 : 23.

5. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит прямоугольник $ABCD$. Основанием высоты пирамиды является точка пересечения диагоналей основания. Известно, что $AB=2\sqrt{3}$, $BC=2\sqrt{6}$. Из точек A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB.

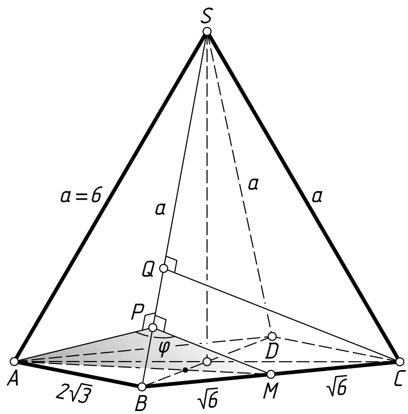
а) Докажите, что P — середина BQ.

б) Найдите угол между гранями SBA и SBC, если $AS=6$.

Р е ш е н и е. а) Высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания, значит, боковые рёбра пирамиды равны. Обозначим $SA=SB=SC=SD=a$. Тогда

$$AB^2-BP^2=AP^2=SA^2-SP^2, \quad \text{или} \quad 12-BP^2=a^2-(a-BP)^2,$$

откуда $BP=\frac{6}{a}$. Из равнобедренного треугольника BSC аналогично находим, что $BQ=\frac{12}{a}$. Следовательно, $BP=\frac{1}{2}BQ$, т. е. P — середина BQ.



б) В равнобедренном треугольнике BSC через точку P, лежащую на боковой стороне SB, проведём прямую, параллельную высоте CQ. Пусть M — точка её пересечения со стороной BC. По теореме Фалеса M — середина BC. Значит,

$$PM=\frac{1}{2}CQ=\frac{1}{2}\sqrt{BC^2-BQ^2}=\frac{1}{2}\sqrt{24-\left(\frac{12}{a}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{24-4}=\sqrt{5}.$$

Из равнобедренного треугольника ASB находим, что

$$AP=\sqrt{AB^2-BP^2}=\sqrt{12-\left(\frac{6}{a}\right)^2}=\sqrt{12-1}=\sqrt{11}.$$

Из прямоугольного треугольника ABM находим, что

$$AM^2=AB^2+BM^2=12+6=18.$$

Так как $AP\perp SB$ и $MP\perp SB$, то $\angle APM=\varphi$ — линейный угол двугранного угла между гранями SBA и SBC. По теореме косинусов

$$\cos\varphi=\frac{AP^2+MP^2-AM^2}{2AP\cdot MP}=\frac{11+5-18}{2\cdot\sqrt{11}\cdot\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{55}}.$$

Следовательно, $\varphi=180^\circ-\arccos\frac{1}{\sqrt{55}}$. ◁

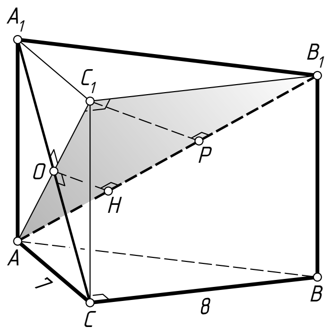
Ответ: $180^\circ-\arccos\frac{1}{\sqrt{55}}$.

6. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что $AA_1=AC$.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $BC=8$ и $AC=7$.

Р е ш е н и е. а) Прямая BC перпендикулярна плоскости ACA_1, т. к. $BC\perp AC$ и $BC\perp AA_1$. Поскольку $B_1C_1\parallel BC$, то B_1C_1 — перпендикуляр к плоскости ACA_1, а AC_1 — ортогональная проекция наклонной AB_1 на эту плоскость. По условию задачи $CA_1\perp AB_1$, значит, по теореме о трёх перпендикулярах $AC_1\perp CA_1$. Диагонали прямоугольника AA_1C_1C перпендикулярны, значит, это квадрат. Следовательно, $AA_1=AC$.



б) Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из центра O квадрата AA_1C_1C на прямую AB_1. Прямая CA_1 перпендикулярна плоскости AC_1B_1, т. к. $CA_1 \perp AC_1$ и $CA_1 \perp B_1C_1$. Значит, $OH \perp AC_1$, и OH — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых CA_1 и AB_1. Тогда расстояние между этими прямыми равно длине отрезка OH, т. е. половине высоты C_1P прямоугольного треугольника AC_1B_1, опущенной из вершины прямого угла. Из прямоугольных треугольников ACC_1 и AC_1B_1 находим, что

$$AC_1 = 7\sqrt{2}, \quad AB_1 = \sqrt{AC_1^2 + B_1C_1^2} = \sqrt{98+64} = 9\sqrt{2},$$

поэтому

$$C_1P = \frac{AC_1 \cdot B_1C_1}{AB_1} = \frac{7\sqrt{2}\cdot 8}{9\sqrt{2}} = \frac{56}{9}.$$

Следовательно, $OH = \frac{28}{9}$. ◁

Ответ: $\frac{28}{9}$.

Диагностическая работа 1

1. Точки M и N — середины рёбер соответственно AB и CD треугольной пирамиды $ABCD$, O — точка пересечения медиан грани ABC.

а) Докажите, что прямая DO проходит через середину отрезка MN.

б) Найдите угол между прямыми MN и BC, если $ABCD$ — правильный тетраэдр.

2. Основание пирамиды $SABCD$ — четырёхугольник $ABCD$. Точки M, N и K — середины рёбер SC, AB и BC соответственно.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью MNK.

б) Найдите угол между плоскостями MNK и $ABCD$, если пирамида правильная, а её высота вдвое больше диагонали основания.

3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона AB основания ABC равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α проходит через прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

4. Цилиндр вписан в прямую четырёхугольную призму (окружности оснований цилиндра вписаны в основания призмы).

а) Докажите, что суммы площадей противоположных боковых граней призмы равны.

б) Найдите отношение площадей боковых поверхностей цилиндра и призмы, если основание призмы — ромб с углом $30°$.

5. Основание $ABCDEF$ пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник, точка M — середина ребра SF.

а) Постройте точку пересечения плоскости BMD с ребром SA.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BMD, если пирамида правильная, $AB=1$, $SA=2$.

6. Основания шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильные шестиугольники. Точки K, L и M — середины рёбер EF, CD и BB_1 соответственно.

а) Докажите, что плоскость KLM делит ребро FF_1 в отношении $1:5$, считая от точки F.

б) Найдите расстояние от центра основания $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ до плоскости KLM, если призма правильная, $AB=1$ и $AA_1=2\sqrt{3}$.

Диагностическая работа 2

1. Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ASB и ESF.

б) Найдите расстояние от центра основания пирамиды до этой прямой, если пирамида правильная, сторона её основания равна $\sqrt{6}$, а высота пирамиды равна $3\sqrt{2}$.

2. Высота конуса вдвое меньше образующей.

а) Докажите, что угол при вершине осевого сечения равен 120°.

б) Плоскость, проходящая через вершину конуса и хорду основания, образует угол 45° с плоскостью основания конуса. Найдите углы треугольника сечения.

3. Точки K и M — середины рёбер соответственно AB и B_1C_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, точка L лежит на ребре CC_1, причём $CL:LC_1=2:1$.

а) Пусть N — точка пересечения плоскости KLM с ребром AC. Докажите, что $AN:NC=2:1$.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью BB_1C_1, если призма правильная и $AA_1:AB=\sqrt{5}:6$.

4. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона AB основания $ABCDEF$ равна $\frac{8}{\sqrt{3}}$, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 60°. Плоскость α проходит через прямую CF и перпендикулярна плоскости боковой грани DSE.

а) Докажите, что плоскость α делит боковое ребро SD в отношении $3:1$, считая от точки S.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка S, а основанием — сечение пирамиды $SABCDEF$ плоскостью α.

5. Точки M и N — середины рёбер соответственно CD и CC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что плоскость AMN проходит через вершину B_1.

б) Найдите угол между плоскостями AMN и $A_1B_1C_1$, если параллелепипед прямоугольный, а его диагональ BD_1 перпендикулярна плоскости AMN.

6. Основание пирамиды $SABCD$ — равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=2BC$, M — середина бокового ребра SA, а высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью BMC — прямоугольник.

б) Найдите расстояние между прямыми AD и CM, если $BC = 6$, высота пирамиды равна 16, а диагонали трапеции $ABCD$ перпендикулярны.

Диагностическая работа 3

1. Точка O — центр грани $ABCD$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что отрезок D_1O делится пополам плоскостью A_1DC_1.

б) Найдите угол между прямой D_1O и плоскостью A_1DC_1, если параллелепипед прямоугольный, $ABCD$ — квадрат, а $AA_1 : AB = \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

2. Сфера вписана в правильную шестиугольную призму. Другая сфера описана около призмы.

а) Докажите, что центры сфер совпадают.

б) Найдите отношение площадей поверхностей этих сфер.

3. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$, точки M и N — середины рёбер AB и SC соответственно.

а) Докажите, что плоскость DSM проходит через середину отрезка AN.

б) Найдите угол между прямыми SM и BN, если пирамида правильная и все её рёбра равны.

4. Точки K, L и M лежат на рёбрах соответственно AD, CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причём $DK : KA = DL : LC = B_1M : MB = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость KLM делит ребро AA_1 куба в отношении $4 : 11$, считая от точки A.

б) Найдите объём большей из частей куба, на которые он разбивается плоскостью KLM, если ребро куба равно 3.

5. Точка M — середина бокового ребра SD шестиугольной пирамиды $SABCDEF$. Основание пирамиды — правильный шестиугольник $ABCDEF$.

а) Постройте точку пересечения прямой AM с плоскостью ESF.

б) Найдите угол между прямой AM с плоскостью ESF, если пирамида правильная и её боковое ребро вдвое больше стороны основания.

6. Основания шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильные шестиугольники. Точка M — середина ребра BB_1.

а) Докажите, что прямые F_1M и CD пересекаются в точке, лежащей на прямой BF.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью DMF_1, если призма правильная, сторона её основания равна 1, а высота равна 3.

Диагностическая работа 4

1. Основание треугольной пирамиды $ABCD$ — равносторонний треугольник ABC. Боковое ребро DA перпендикулярно плоскости основания, M — середина ребра BC.

а) Докажите, что высота AH треугольника ADM перпендикулярна плоскости BDC.

б) Найдите угол между прямой DM и плоскостью ADB, если $AB : AD = 4 : \sqrt{3}$.

2. Точка M — середина ребра BB_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей A_1MC_1 и ABC.

б) В каком отношении плоскость A_1MC_1 делит отрезок, соединяющий точку B_1 с серединой ребра AC?

3. Основание пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения прямых BC и DE.

а) Докажите, что $SC \perp BF$.

б) Найдите угол между прямыми AF и SB, если наибольшее боковое ребро пирамиды втрое больше стороны основания.

4. Точка P лежит на ребре AD правильного тетраэдра $ABCD$, причём $AP : PD = 1 : 2$. Плоскость, проходящая через точку P перпендикулярно ребру CD, пересекает это ребро в точке M, а ребро BD — в точке Q.

а) Докажите, что плоскость PMQ делит высоту пирамиды пополам.

б) Найдите объём треугольной пирамиды $QABC$, если объём пирамиды $DPMQ$ равен V.

5. Шар вписан в прямую четырёхугольную призму.

а) Докажите, что суммы площадей противоположных боковых граней призмы равны.

б) Найдите отношение объёмов шара и призмы, если периметр основания призмы в четыре раза больше диаметра шара.

6. Основания шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильные шестиугольники. Точка K — середина ребра CC_1.

а) Докажите, что плоскость ED_1K делит ребро BC в отношении $2 : 1$, считая от точки B.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью ED_1K, если призма правильная, сторона её основания равна $2\sqrt{21}$, а высота равна 6.

Диагностическая работа 5

1. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ с основаниями $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, P — точка пересечения прямой CB_1 с плоскостью AA_1F_1.

а) Докажите, что B_1 — середина отрезка CP.

б) Найдите угол между прямыми BA_1 и CB_1, если боковое ребро призмы вдвое больше стороны основания.

2. Основание пирамиды $SABCD$ — трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ASB и CSD.

б) Найдите угол между плоскостями ASD и BSC, если высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания, $AD = 3BC$, а двугранный угол при ребре AD пирамиды равен $30°$.

3. Точки M и N лежат на рёбрах соответственно AB и A_1B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причём $AM : MB = B_1N : NA_1 = 2:1$; точка K — середина ребра CC_1.

а) Постройте точку пересечения плоскости KMN с прямой B_1C_1.

б) Найдите угол между прямой BB_1 и плоскостью KMN, если параллелепипед прямоугольный, $AB = 3$, $BC = 2$, $AA_1 = 4$.

4. Точки M и N — середины рёбер AD и CD треугольной пирамиды $DABC$.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей MBN и ABC.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MBN, если ABC — равносторонний треугольник со стороной $4\sqrt{2}$, а высота DH пирамиды равна $3\sqrt{2}$ и проходит через середину ребра BC.

5. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Плоскость α проходит через вершины A_1 и C параллельно прямой BC_1.

а) Постройте точку пересечения плоскости α с прямой B_1C_1.

б) В каком отношении плоскость α делит ребро AB?

6. Точка P лежит на диаметре AB сферы. При этом $AP : PB = 3:1$. Через прямую AB проведена плоскость α, а через точку P — плоскость β, перпендикулярная AB и пересекающая сферу по окружности S. Отрезок CD — общая хорда окружностей сечений сферы эти плоскостями, M — точка на окружности S.

а) Докажите, что $AM = CD$.

б) Найдите объём пирамиды с вершиной M и основанием $ACBD$, если диаметр сферы равен 12, а M — наиболее удалённая от плоскости α точка окружности S.

Диагностическая работа 6

1. Высота конуса равна радиусу его основания.

а) Докажите, что угол при вершине осевого сечения равен 90°.

б) Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, — равносторонний треугольник. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения, если радиус основания равен $\sqrt{3}$.

2. Основания шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильные шестиугольники.

а) Докажите, что диагонали AD_1, BE_1 и CF_1 призмы пересекаются в одной точке.

б) Найдите угол между прямыми DA_1 и BC_1, если призма правильная и $AA_1 = AB\sqrt{2}$.

3. Точка M — середина ребра BC треугольной пирамиды $ABCD$, точка K лежит на прямой BD, причём B — середина отрезка DK. Плоскость α проходит через прямую KM параллельно ребру AB.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро CD в отношении $1:2$, считая от точки C.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC, если $DABC$ — правильная пирамида с вершиной D, а её высота относится к стороне основания как $1:\sqrt{3}$.

4. Основание ABC треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник ABC. Ортогональная проекция вершины C_1 на плоскость ABC совпадает с центром треугольника ABC.

а) Докажите, что грань AA_1B_1B — прямоугольник.

б) Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC, если все рёбра призмы равны 3.

5. Основание $ABCD$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат, боковые грани — ромбы, а ортогональная проекция вершины C_1 на плоскость основания совпадает с точкой пересечения диагоналей основания $ABCD$.

а) Докажите, что $AA_1 \perp AC_1$.

б) Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC, если $AB = \sqrt{6}$.

6. Через сторону AB основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ проведена плоскость перпендикулярно ребру DC. Известно, что эта плоскость разбивает пирамиду на две треугольные пирамиды, объёмы которых относятся как $3:5$, причём точка D содержится в большей из этих частей.

а) Докажите, что эта плоскость делит высоту DH пирамиды в отношении $5:1$, считая от вершины D.

б) Найдите угол между секущей плоскостью и плоскостью ABC.

Ответы

§1. Построения на проекционном чертеже (параллельная проекция)

1.1. $1:2$, считая от точки D. **1.2.** $1:2$, считая от точки B. **1.3.** $1:2$, считая от точки A. **1.4.** $1:2$. **1.5.** $1:1$. **1.6.** $1:3$, считая от точки S. **1.7.** $1:2$, считая от точки C. **1.8.** $1:2$, считая от точки B. **1.9.** $1:3$, считая от точки B. **1.10.** $1:1$. **1.11.** $1:2$, считая от точки C. **1.12.** $1:2$, считая от точки S. **1.13.** $1:5$, считая от точки A. **1.14.** $3:4$, считая от точки B. **1.15.** $1:2$, считая от точки M. **1.16.** $1:1$. **1.17.** $3:1$, считая от точки D. **1.18.** $2:1$, считая от точки S. **1.19.** $2:1$, считая от точки B_1. **1.20.** $2:1$, считая от точки A. **1.21.** $1:2$, считая от точки F. **1.22.** $1:1$. **1.23.** $1:2$, считая от точки S. **1.24.** $6:5$, считая от точки A.

§2. Угол между прямыми

Подготовительные задачи

1. а) $90°$; б) $90°$; в) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$; г) $60°$; д) $90°$. **2.** а) $90°$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$; в) $\arccos\frac{1}{6}$; г) $\arccos\frac{2}{3}$. **3.** а) $90°$; б) $60°$; в) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$; г) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **4.** а) $60°$; б) $45°$; в) $90°$; г) $\arccos\frac{1}{4}$. **5.** а) $90°$; б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; в) $\arccos\frac{3}{4}$; г) $90°$. **6.** а) $60°$; б) $90°$; в) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$; г) $\arccos\frac{1}{4}$.

Задачи на доказательство и вычисление

2.1. $90°$. **2.2.** $90°$. **2.3.** $90°$. **2.4.** $60°$. **2.5.** $\arccos\frac{11}{14}=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$.
2.6. $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$. **2.7.** $\arccos\frac{11}{4\sqrt{10}}$. **2.8.** $90°$. **2.9.** а) Не может; $\arccos\frac{5}{6}$.
2.10. $\arccos\frac{1}{6}$. **2.11.** 3. **2.12.** $\arccos\frac{16}{25}$. **2.13.** $60°$. **2.14.** $30°$. **2.15.** $45°$.
2.16. $\arccos\frac{9}{11}$. **2.17.** $\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$. **2.18.** $\arccos\frac{3\sqrt{2}}{10}$. **2.19.** $\frac{3}{4}$. **2.20.** $\frac{3}{4}$.
2.21. $\arccos\frac{11}{4\sqrt{13}}$. **2.22.** $\arccos\frac{\sqrt{35}}{14}$. **2.23.** $\arccos\frac{2}{3}$. **2.24.** $\arccos\frac{2}{3}$.

§3. Угол между плоскостями

Подготовительные задачи

1. а) $90°$; б) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; в) $\arccos\frac{1}{3}$; г) $60°$. **2.** а) $90°$; б) $\operatorname{arcctg}\sqrt{2}$; в) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}}{5}$.
3. а) $\arccos\frac{1}{3}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $45°$; г) $\arccos\frac{1}{3}$; д) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}$.
4. а) $90°$; б) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$; в) $\arccos\frac{1}{7}$; г) $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **5.** а) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$; б) $60°$; в) $60°$; г) $30°$. **6.** а) $\arccos\frac{3}{5}$; б) $\arccos\frac{1}{5}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$; г) $\operatorname{arctg}2\sqrt{3}$.

Задачи на доказательство и вычисление

3.1. $\arccos\frac{1}{5}$. **3.2.** $2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}=\arccos\frac{5}{13}$. **3.3.** $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$. **3.4.** $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$. **3.5.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$. **3.6.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}}{3}$. **3.7.** 90°, 45°, 60°. **3.8.** 90°, 45°. **3.9.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{8}$. **3.10.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{5}$. **3.11.** 90°. **3.12.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. **3.13.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **3.14.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{41}}{5}=$ $=\arccos\frac{5}{\sqrt{66}}$. **3.15.** $\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{34}}{10}$. **3.16.** 45°. **3.17.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{23}}{5}=\arccos\frac{5\sqrt{3}}{12}$. **3.18.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{10}=\arccos\frac{10}{\sqrt{107}}$. **3.19.** $\operatorname{arctg}\frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$. **3.20.** $\operatorname{arctg}\frac{5}{3}$.

§ 4. Расстояние от точки до прямой. Расстояние от точки до плоскости

Подготовительные задачи

1. а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) 1; в) 1; г) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; ж) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; г) $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

3. а) 1; б) $\frac{\sqrt{11}}{4}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\frac{1}{2}$.

4. а) $\frac{\sqrt{14}}{4}$, б) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{19}}{4}$; г) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; д) $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

5. а) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; г) $\sqrt{2}$; д) $\frac{\sqrt{30}}{5}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) $\frac{2\sqrt{21}}{7}$; з) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; и) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; к) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

6. а) $\frac{\sqrt{13}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{42}}{4}$; г) $\sqrt{3}$; д) $\frac{\sqrt{39}}{4}$; е) $\frac{2\sqrt{15}}{5}$; ж) $\frac{\sqrt{39}}{13}$; з) $\frac{3\sqrt{39}}{13}$.

Задачи на доказательство и вычисление

4.1. $\sqrt{5}$. **4.2.** $\frac{60}{17}$. **4.3.** 14. **4.4.** 3. **4.5.** $2\sqrt{3}$. **4.6.** 2. **4.7.** 4. **4.8.** 4. **4.9.** 3. **4.10.** 3. **4.11.** $\frac{12}{5}$. **4.12.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **4.13.** $\sqrt{3}$. **4.14.** $\frac{8}{5}$. **4.15.** 1,4. **4.16.** 15. **4.17.** 2. **4.18.** 1. **4.19.** 2. **4.20.** 1. **4.21.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **4.22.** $\frac{\sqrt{6}}{9}$. **4.23.** $5\sqrt{3}$. **4.24.** $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

§ 5. Угол между прямой и плоскостью

Подготовительные задачи

1. а) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) 30°.

2. а) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$; в) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$; г) 45°.

3. а) $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$; г) $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

4. а) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$; г) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4}$.

5. а) 60°; б) $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$; в) 60°; г) $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{5}$.

6. а) $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{5}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{5}$; в) $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{10}$; г) $\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Задачи на доказательство и вычисление

5.1. $\operatorname{arctg}\frac{4}{5}$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$. **5.2.** $\operatorname{arctg}\frac{7}{30}$, $\operatorname{arctg}\frac{7}{40}$. **5.3.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. **5.4.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$. **5.5.** $60°$. **5.6.** $45°$. **5.7.** $45°$. **5.8.** $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}}$. **5.9.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$. **5.10.** $\arcsin\sqrt{\frac{3}{7}}$. **5.11.** $30°$. **5.12.** $\operatorname{arcctg} 3$. **5.13.** $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$. **5.14.** $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$. **5.15.** $45°$. **5.16.** $30°$. **5.17.** $45°$. **5.18.** $\operatorname{arcctg} 2$. **5.19.** $\arcsin\frac{3}{4}$. **5.20.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

§6. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Подготовительные задачи

1. а) 1; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; г) $\sqrt{\frac{2}{11}}$; д) $\sqrt{\frac{2}{35}}$; е) $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **3.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; г) $\frac{1}{2}$. **4.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{\frac{3}{7}}$; в) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **5.** а) 1; б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; д) $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **6.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $2\sqrt{\frac{3}{13}}$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; г) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Задачи на доказательство и вычисление

6.1. 7,2. **6.2.** 24. **6.3.** $\sqrt{3}$. **6.4.** 1. **6.5.** 1. **6.6.** 6. **6.7.** 1. **6.8.** $\sqrt{2}$. **6.9.** 3. **6.10.** 7. **6.11.** 1. **6.12.** 6. **6.13.** 2. **6.14.** 4. **6.15.** 6. **6.16.** 3. **6.17.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **6.18.** $\frac{6}{5}$. **6.19.** 3. **6.20.** 2. **6.21.** $\sqrt{3}$. **6.22.** 4,8. **6.23.** $a\sqrt{\frac{2}{15}}$. **6.24.** $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

§7. Площадь сечения

Подготовительные задачи

1. а) $a^2\sqrt{2}$; б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$; в) $\frac{9a^2}{8}$; г) $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$; д) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

2. а) $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$; б) $\frac{a^2\sqrt{11}}{16}$; в) $\frac{a^2}{4}$; г) $\frac{a^2\sqrt{6}}{9}$; д) $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$.

3. а) $\frac{a^2}{4}$; б) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{3a^2\sqrt{11}}{16}$; г) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$; д) $\frac{a^2\sqrt{10}}{6}$.

4. а) $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$; б) $\frac{5a^2\sqrt{39}}{36}$; в) $\frac{a^2\sqrt{39}}{12}$; г) $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$; д) $\frac{3a^2\sqrt{7}}{16}$.

5. а) $\frac{3a^2\sqrt{7}}{4}$; б) $a^2\sqrt{6}$; в) $3a^2$; г) $\frac{3a^2}{2}$; д) $\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$.

6. а) $\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$; б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{3a^2\sqrt{19}}{16}$; г) $\frac{5a^2\sqrt{15}}{16}$; д) $\frac{13a^2\sqrt{39}}{48}$.

Задачи на доказательство и вычисление

7.1. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **7.2.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **7.3.** $\frac{3\sqrt{30}}{4}$. **7.4.** $\frac{3a^2\sqrt{19}}{16}$. **7.5.** $\frac{a^2\sqrt{29}}{8}$. **7.6.** 12. **7.7.** $\frac{3a^2\sqrt{33}}{8}$. **7.8.** 1,5. **7.9.** 276. **7.10.** 44. **7.11.** 90. **7.12.** 97,5. **7.13.** $8\sqrt{10}$. **7.14.** $\frac{39\sqrt{39}}{4}$. **7.15.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **7.16.** $\frac{140}{3}$. **7.17.** $3\sqrt{195}$. **7.18.** 12. **7.19.** $\frac{80}{3}$. **7.20.** $7\sqrt{6}$. **7.21.** 52. **7.22.** 3. **7.23.** 55. **7.24.** 21.

§ 8. Объём многогранника

Подготовительные задачи

1. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{7}{24}$ и $\frac{17}{24}$; д) $\frac{1}{6}$.
2. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{8}$ и $\frac{7}{8}$; г) $\frac{1}{4}$; д) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$.
3. а) $\frac{1}{8}$ и $\frac{7}{8}$; б) $\frac{1}{8}$ и $\frac{7}{8}$; в) $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$; г) $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$; д) $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{8}$.
4. а) $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{12}$ и $\frac{11}{12}$; в) $\frac{7}{12}$ и $\frac{5}{12}$; г) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{12}$.
5. а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{1}{9}$; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$; д) $\frac{2}{9}$ и $\frac{7}{9}$.
6. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{8}$; в) $\frac{1}{12}$; г) $\frac{1}{12}$; д) $\frac{13}{36}$ и $\frac{23}{36}$.

Задачи на доказательство и вычисление

8.1. 144. **8.2.** 32. **8.3.** 36. **8.4.** $48\sqrt{3}$. **8.5.** 1 : 1. **8.6.** 19 : 35. **8.7.** 4. **8.8.** 3. **8.9.** $16V$. **8.10.** $\frac{9}{4}V$. **8.11.** $\frac{25}{144}V$. **8.12.** $\frac{1}{3}V$, $\frac{2}{3}V$. **8.13.** 1 : 1. **8.14.** $\frac{2}{3}V$. **8.15.** $\frac{30}{7}$. **8.16.** $\frac{125}{6}$. **8.17.** 1 : 47. **8.18.** 9 : 119. **8.19.** 36. **8.20.** $\frac{8}{9}$. **8.21.** $\frac{1}{2}abc$. **8.22.** $\frac{4}{9}abc$.

§ 9. Фигуры вращения

Подготовительные задачи

1. а) 200π; б) 80π; в) 48; г) 4; д) $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. **2.** а) 24π; б) 36π; в) $3\sqrt{15}$; г) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$; д) 60°; е) $\arccos\frac{1}{4}$. **3.** а) 4500π; б) 900π; в) $\frac{\pi}{2}$; г) 81π или 729π; д) 432π.

Задачи на доказательство и вычисление

9.1. 1 : 2. **9.2.** 1 : 4. **9.3.** $\frac{6\sqrt{7}}{5}$. **9.4.** $\frac{12}{5}$. **9.5.** 4500π. **9.6.** 100π. **9.7.** 144π. **9.8.** $\frac{32\pi}{3}$. **9.9.** $\pi\sqrt{3} : 24$. **9.10.** $\pi : 18$. **9.11.** $3\sqrt{66}$. **9.12.** $18\sqrt{2}$. **9.13.** 2 или 14. **9.14.** $\frac{21}{17}$ или 3. **9.15.** $\frac{4}{3}R$. **9.16.** $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **9.17.** 90°. **9.18.** 120°. **9.19.** $\pi\sqrt{10}$. **9.20.** $\frac{\pi\sqrt{10}}{2}$.

§ 10. Элементы правильных пирамид

1. а) $\frac{a^3}{12}$; б) $\operatorname{arctg} 2$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; г) $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3} = \arccos\frac{1}{5}$; д) $a\sqrt{\frac{3}{5}}$; е) $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; ж) $r = \frac{a(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{12}$; з) $\arcsin\frac{3}{5}$.
2. а) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$; б) $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}} = \arccos\sqrt{\frac{2}{5}} = \arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}$; г) 60°; д) $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{3}} = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$; е) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; ж) $R = \frac{5a}{4\sqrt{3}}$; з) $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; и) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3. а) 45°; б) $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}=\arccos\sqrt{\frac{3}{7}}=\arcsin\frac{2}{\sqrt{7}}$; в) $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$; г) $2\operatorname{arctg}\sqrt{6}=$ $=\arccos\left(-\frac{5}{7}\right)$; д) $2a\sqrt{\frac{3}{7}}$; е) $R=a$; ж) $r=\frac{a(\sqrt{21}-3)}{4}$; з) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{7}$.

4. а) $R=\frac{5a\sqrt{3}}{4\sqrt{11}}$; б) $r=\frac{a\sqrt{11}}{2(\sqrt{3}+6)}=\frac{a\sqrt{11}(6-\sqrt{3})}{66}$; в) $\arccos\frac{3}{8}$; г) $\arcsin\frac{\sqrt{11}}{8}$.

5. а) $R=\frac{5a}{4\sqrt{3}}$; б) $r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$; в) $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{3}}=\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$; г) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$.

6. а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$; б) $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{13}}$; в) $\arccos\left(-\frac{7}{25}\right)$; г) $R=\frac{8a}{3\sqrt{13}}$; д) $r=\frac{a(5-\sqrt{13})}{12}=$ $=\frac{a}{5+\sqrt{13}}$; е) $\arcsin\frac{3\sqrt{39}}{25}$.

7. а) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$; б) $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{7}}$; в) $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}=\arccos\left(-\frac{7}{9}\right)$; г) $R=\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$; д) $r=$ $=\frac{a(3\sqrt{2}-\sqrt{14})}{4}$; е) $\arcsin\frac{\sqrt{14}}{9}$.

8. а) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$ или $\arcsin\frac{1}{3}$; б) $\operatorname{arctg}2$ или $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$; в) 90° или 120°; г) $R=\frac{a\sqrt{6}}{4}$ или $R=\frac{3a\sqrt{6}}{8}$; д) $r=\frac{a(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{12}$ или $r=\frac{a(3-\sqrt{6})}{6}$.

Диагностическая работа 1

1. 45°. **2.** $\operatorname{arctg}4$. **3.** $\frac{80\sqrt{3}}{3}$. **4.** $\frac{\pi}{8}$. **5.** $\frac{7\sqrt{21}}{20}$. **6.** $\sqrt{3}$.

Диагностическая работа 2

1. 3. **2.** 90°, 45°, 45°. **3.** 30°. **4.** 44. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{2}$. **6.** 7,2.

Диагностическая работа 3

1. 60°. **2.** $3:7$. **3.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$. **4.** $\frac{296}{15}$. **5.** $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{10}$. **6.** $3\sqrt{3}$.

Диагностическая работа 4

1. $\operatorname{arcctg}2$. **2.** $1:2$, считая от точки B_1. **3.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}=\operatorname{arctg}5$. **4.** $\frac{9}{4}V$. **5.** $\frac{\pi}{6}$. **6.** $35\sqrt{6}$.

Диагностическая работа 5

1. $\arccos 0{,}9$. **2.** 90°. **3.** $\operatorname{arcctg}5$. **4.** 6. **5.** $1:1$. **6.** 108.

Диагностическая работа 6

1. 1. **2.** 90°. **3.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{5}$. **4.** $\sqrt{6}$. **5.** 2. **6.** 30°.

Содержание

Учебно-методическое пособие

Рафаил Калманович Гордин

ЕГЭ 2018. Математика. Геометрия. Стереометрия.
Задача 14 (профильный уровень)

Под редакцией И. В. Ященко

Подписано в печать 30.06.2017 г. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 8. Тираж 5000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–08–04

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru