

ЛЮДМИЛА ИВАНОВНА СКРИПКА



Задание №18

Подборка Александра Томина

Рукописный вариант

2020 г

Содержание

Задание №18.1. Аналитические решения.	4
Задание №18.1. Ответы.	5
Решения	24
18.1.1	24
18.1.2	25
18.1.3	26
18.1.4	28
18.1.5	28
Задание №18.2. Аналитические решения(часть2).....	6
Задание №18.2. Ответы.	7
Решения	29
18.2.1	29
18.2.2	31
18.2.3	31
18.2.4	33
18.2.5	35
Задание №18.3. Графические решения. Плоскость ХОА (часть1).	8
Задание №18.3. Ответы.	9
Решения	37
18.3.1	37
18.3.2	39
18.3.3	39
18.3.4	41
18.3.5	41
Задание №18.3(ДЗ). Графические решения. Плоскость ХОА (часть1).....	10
Задание 18.3 (ДЗ). Ответы.	11
Решения	43
18.3.1(ДЗ).....	43
18.3.2(ДЗ).....	43
18.3.3(ДЗ).....	44
18.3.4(ДЗ).....	45
18.3.5(ДЗ).....	47
Задание 18.4. Графические решения. Плоскость ХОА(часть2).....	12
Задание №18.4. Ответы.	13
Решения	47
18.4.1	47
18.4.2	49
18.4.3	49
18.4.4	51
18.4.5	51
Задание №18.4 (ДЗ). Графические решения. Плоскость ХОА(часть 2).....	13
Задание №18.4(ДЗ). Ответы.	15
Решения	53

18.4.1(ДЗ)	53
18.4.2(ДЗ)	55
18.4.3(ДЗ)	55
18.4.4(ДЗ)	56
18.4.5(ДЗ)	57
Задание №18.5. Графические решения. Плоскость XOY (часть1).	16
Задание №18.5. Ответы.	17
Решения	59
18.5.1	59
18.5.2	61
18.5.3	63
18.5.4	65
18.5.5	65
Задание №18.5(ДЗ). Графические решения. Плоскость XOY (часть 1).	18
Задание №18.5(ДЗ).Ответы.	19
Задание №18.6. Графические решения. Плоскость XOY (часть2).	20
Задание №18.6. Ответы.	21
Решения	67
18.6.1	67
18.6.2	67
18.6.3	69
18.6.4	71
18.6.5	72
Задание №18.7. Параметр. Разное.	22
Задание №18.7. Ответы.	23
Решения	73
18.7.1	73
18.7.2	74
18.7.3	75
18.7.4	75
I способ	75
II способ.....	77
18.7.5	78
18.7.6	79
18.7.7	80

Задание №18.1. Аналитические решения.

1) (ЕГЭ-2019)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - a(a+1)x + a^3}{\sqrt{2+x-x^2}} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

2) (ЕГЭ-2018)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре различных решения:

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 12a - 28, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$$

3) (ЕГЭ-2018)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре различных решения:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(a+1)x - 2ay + 5a^2 + 8a + 3 = 0, \\ x^2 = y^2. \end{cases}$$

4) (ЕГЭ-2018)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре различных решения:

$$\begin{cases} y = (a-2)x^2 - 2ax - 2 + a, \\ x^2 = y^2. \end{cases}$$

5) (ЕГЭ-2018)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре различных решения:

$$\begin{cases} ax^2 + ay^2 - (2a-5)x + 2ay + 1 = 0, \\ x^2 + y = xy + x. \end{cases}$$

Задание №18.1. Ответы.

1) $(-1; 0); (0; 1); (1; \sqrt{2})$.

2) $(2; 6 - 2\sqrt{2}); (6 + 2\sqrt{2}; +\infty)$.

3) $\left(\frac{-2 - \sqrt{2}}{3}; -1\right); (-1; -0,6); (-0,6; -2 + \sqrt{2})$.

4) $(1,25; 2); (2; +\infty)$.

5) $(-\infty; -3); (-3; 0); \left(3; \frac{25}{8}\right)$.

Задание №18.2. Аналитические решения (часть 2).

1) (ЕГЭ-2018)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x+2a-1} + \sqrt{x-a} = 1$$

имеет хотя бы один корень.

2) (ЕГЭ-2016)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{15x^2 + 6ax + 9} = x^2 + ax + 3$$

имеет ровно три различных решения.

3) (ЕГЭ-2016)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x-2a}{x+2} + \frac{x-1}{x-a} = 1$$

имеет единственное решение.

4) (ЕГЭ-2014)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 + (a-5)^4} = |x+a-5| + |x-a+5|$$

имеет единственное решение.

5) (ЕГЭ-2014)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(\log_8(x+a) - \log_8(x-a))^2 - 12a(\log_8(x+a) - \log_8(x-a)) + 35a^2 - 6a - 9 = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Задание №18.2. Ответы.

1) $\left[0; \frac{2}{3}\right]$.

2) $[-4; -3); (-3; 3); (3; 4]$.

3) $\frac{-1-\sqrt{10}}{2}; -2; -1; 1; \frac{-1+\sqrt{10}}{2}$.

4) $3; 7$.

5) $(-\infty; -3); \left(-3; -\frac{3}{7}\right); \left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

Задание №18.3. Графические решения. Плоскость XOA (часть 1).

1) (ЕГЭ-2019)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x| - 2x - 2 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

2) (ЕГЭ-2017)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x \cdot \sqrt{x - a} = \sqrt{4x^2 - (4a + 2)x + 2a}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

3) (ЕГЭ-2017)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x - a - 7)(x + a - 2)}{\sqrt{10x - x^2 - a^2}} = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[4; 8]$.

4) (ЕГЭ-2017)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x - a} \cdot \sin x = -\sqrt{x - a} \cdot \cos x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; \pi]$.

5) (ЕГЭ-2017)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x - 1} \cdot \ln(4x - a) = \sqrt{2x - 1} \cdot \ln(5x + a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

Задание №18.3. Ответы.

1) $(-2; -1); (-1; 0); (0; 3); (3; 8); (8; +\infty).$

2) $(-\infty; 0,5); [2 - \sqrt{2}; 1].$

3) $\left(\frac{-3 - \sqrt{41}}{2}; -3\right); -2,5; (-2; 1].$

4) $(-\infty; 0); \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right].$

5) $(-2,5; -0,5); [-0,25; 2].$

Задание №18.3 (ДЗ). Графические решения. Плоскость XOA (часть 1).

- 1) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{|9x| + 7x + 4a - 16}{x^2 + 2x - 3 + a} = 0$$

имеет единственное решение.

- 2) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x \cdot \sqrt{7(x + a - 1)} = \sqrt{7x - 4x(x + a) + 3(a - 1)}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

- 3) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x + a + 2)(x - a - 8)}{\sqrt{x^2 - 14x + a^2 + 24}} = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 8]$.

- 4) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$3 \cos^2 x \cdot \sqrt{a - x} = \sin^2 x \cdot \sqrt{a - x}$$

имеет ровно два различных корня на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- 5) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2 - 5x} \cdot \ln(36x^2 - a^2) = \sqrt{2 - 5x} \cdot \ln(6x + a)$$

имеет ровно один корень.

Задание №18.3 (ДЗ). Ответы.

1) $0; 3; 3,75; 4.$

2) $\left[\frac{3}{4}; \frac{4}{7}\right]; (1; +\infty).$

3) $[-10; -8); -5; [-4; -2].$

4) $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]; \left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right).$

5) $(-2, 4; -0, 5]; [1, 4; 2, 4).$

Задание №18.4. Графические решения. Плоскость XOA (часть 2).

1) (ЕГЭ-2017)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5x-3} \cdot \ln(x^2 - 6x + 10 - a^2) = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 3]$.

2) (ЕГЭ-2017)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x| + |a| \leq 4, \\ x^2 + 8x < 16a + 48 \end{cases}$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1; 0]$.

3) (ЕГЭ-2017)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[3; 4]$.

4) (ЕГЭ-2013)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|\sin^2 x + 2 \cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$$

имеет единственный корень на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

5) (ЕГЭ-2012)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 8x + a + 5| > 10$$

не имеет решений на отрезке $[a - 6; a]$.

Задание №18.4. Ответы.

1) $(-2, 6; -2, 4]; [2, 4; 2, 6)$.

2) $(-8 - 8\sqrt{2}; 4]$.

3) $[0, 5; \sqrt{3})$.

4) $(-\infty; 0]; \frac{1}{4}$.

5) $\left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right]$.

Задание №18.4 (ДЗ). Графические решения. Плоскость XOA (часть 2).

- 1) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4-x} \cdot \ln(a^2 - x^2 + 4x - 3) = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[1; 5]$.

- 2) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x-1| + |a-1| > 3, \\ x^2 + 2 \leq a + 4x \end{cases}$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[1; 4]$.

- 3) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax - 4 \geq 0, \\ a + \sqrt{4x + 17} \geq 0, \\ a - 1 < x \end{cases}$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[-3; -2]$.

- 4) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|\cos^2 x + 9 \sin x - a - 6| = \cos^2 x + a$$

имеет единственный корень на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- 5) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 6x - a + 8| < 1$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[a+1; a+3]$.

Задание №18.4 (ДЗ). Ответы.

1) $(-\infty; -2]; [-\sqrt{3}; -1); 0; (1; \sqrt{3}]; [2; +\infty).$

2) $\left[-2; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right); \left(\frac{7-\sqrt{21}}{2}; +\infty\right).$

3) $\left[-3; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right).$

4) $-0,75; (1,5; +\infty).$

5) $(-1; 1); \left(1; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right).$

Задание №18.5. Графические решения. Плоскость XOY (часть 1).

1) (ЕГЭ-2019)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = x - 2|x| + |x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a|$$

больше -4 ?

2) (ЕГЭ-2018)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ((x+5)^2 + y^2 - a^2) \ln(9 - x^2 - y^2) = 0, \\ ((x+5)^2 + y^2 - a^2)(x + y + 5 - a) = 0 \end{cases}$$

имеет два различных решения.

3) (ЕГЭ-2016)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

4) (ЕГЭ-2016)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-3)(y+3x-9) = |x-3|^3, \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

5) (ЕГЭ-2015)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = |x^2 + y^2 - 1|, \\ y = a(x-1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Задание №18.5. Ответы.

1) $(-1, 25; 2)$.

2) $(1; 2]; [8; 9)$.

3) $\left(0; \frac{1}{3}\right]; \{3\}$.

4) $(-7; -3); (-3; 1)$.

5) $(1; 2)$.

Задание №18.5 (ДЗ). Графические решения. Плоскость XOY (часть 1).

- 1) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наибольшее значение функции

$$f(x) = x(2a - x) + ||2x - 14| - 4| + 4 - a^2$$

не больше 6 ?

- 2) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (4x - 3y - a + 36)(\log_3(10x - x^2 - (y - 5)^2) - 2) = 0, \\ (4x - 3y - a + 36)(x^2 + (y - 5)^2 - a) = 0 \end{cases}$$

имеет два различных решения.

- 3) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy^2 - 2xy - 6y + 12)\sqrt{6 - x} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

- 4) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (y - 1)(x + 3y - 1) = |y - 1|^3, \\ y + 3 = a - x \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

- 5) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + 4y = 4|2x - y|, \\ x + 2y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Задание №18.5 (ДЗ). Ответы.

1) $[4, 5; 5, 5]; [8, 5; 9, 5].$

2) $(1; 16]; [66; 81).$

3) $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]; \left\{\frac{2}{3}\right\}.$

4) $1; 2; 3.$

5) $(-5\sqrt{5} - 5; -10]; [0; 5\sqrt{5} - 5).$

Задание №18.6. Графические решения. Плоскость XOY (часть 2).

1) (ЕГЭ-2015)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy - 4y + 2x + 4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

2) (ЕГЭ-2013)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$8a + \sqrt{7 + 6x - x^2} = ax + 4$$

имеет единственное решение.

3) (ЕГЭ-2012)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x} - 3 \right| = ax - 2$$

на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

4) (ЕГЭ-2012)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$a|x - 2| = \frac{3}{x + 1}$$

на промежутке $[0; +\infty)$ имеет ровно два корня.

5) (ЕГЭ-2012)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1 - 2x} = a - 7|x|$$

имеет более двух корней.

Задание №18.6. Ответы.

1) $(-\infty; -6]; \{2\}; [8; +\infty).$

2) $\{0\}; \left(\frac{4}{9}; 4\right].$

3) $(1, 2; 1, 25).$

4) $\left\{\frac{4}{3}\right\}; (1, 5; +\infty).$

5) $\left[\frac{7}{2}; \frac{25}{7}\right).$

Задание №18.7. Параметр. Разное.

1) (ЕГЭ-2019)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$3 \sin x + \cos x = a$$

имеет ровно один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

2) (ЕГЭ-2018)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(4x - x^2)^2 - 32\sqrt{4x - x^2} = a^2 - 14a$$

имеет хотя бы один корень.

3) (ЕГЭ-2014)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых любое решение уравнения

$$4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 3\log_2(3x - 1) + 2a = 0$$

принадлежит отрезку $[1; 3]$.

4) (ЕГЭ-2014)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$|3 \sin x + a^2 - 22| + |7 \sin x + a + 12| \leq 11 \sin x + |a^2 + a - 20| + 11$$

верно для любого действительного x .

5) (ЕГЭ-2013)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(4 \cos x - 3 - a) \cdot \cos x - 2,5 \cos 2x + 1,5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

6) (ЕГЭ-2012)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трех различных решений.

7) (ЕГЭ-2011)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 7 \cdot 2^{|x|} + 2 \cdot |x| + 6 = 7y + 2x^2 + 5a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задание №18.7. Ответы.

1) $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}); \sqrt{10}$.

2) $[0; 6]; [8; 14]$.

3) $[-8, 5; -3, 5]$.

4) $-5; [5; +\infty)$.

5) $(-\infty; -6]; [0; +\infty)$.

6) $(0; 1)$.

7) $\frac{6}{5}$.

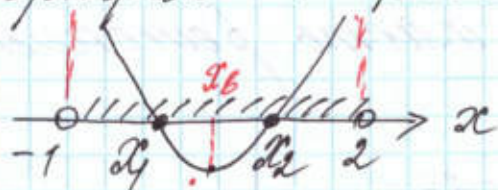
18.1. 1) ЕГЭ-2019.

a -? равно 2 разл. корни

$$\frac{x^2 - a/(a+1)x + a^3}{\sqrt{2+x-x^2}} = 0.$$

$$\begin{cases} x^2 - a/(a+1)x + a^3 = 0 \\ 2+x-x^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - a/(a+1)x + a^3 = 0 \quad (1) \\ (x+1)/(x-2) < 0 \quad (2) \end{cases}$$

Функция $f(x) = x^2 - a/(a+1)x + a^3$ квадратичная, график параболы, ветви вверх.



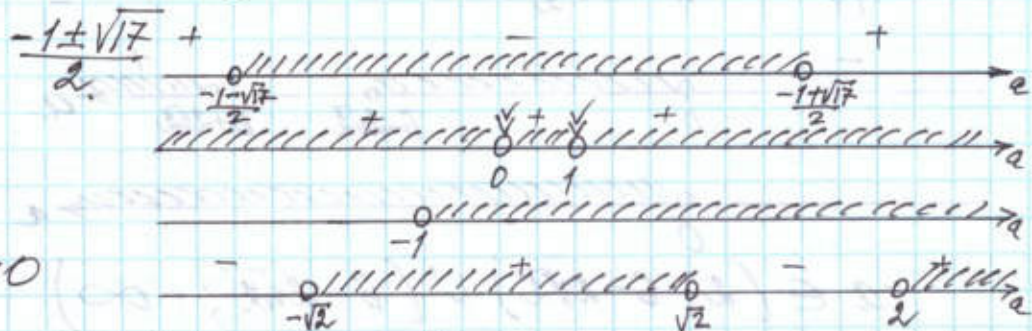
$$x_0 = \frac{a/(a+1)}{2}$$

Нам надо, чтобы оба корня уравнения (1) удовлетворяли условию (2), значит

$$\begin{cases} -1 < x_0 < 2 \\ f(x_0) < 0 \\ f(-1) > 0 \\ f(2) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < \frac{a/(a+1)}{2} < 2 \\ \left(\frac{a/(a+1)}{2}\right)^2 - \frac{a/(a+1)a/(a+1)}{2} + a^3 < 0 \\ (-1)^2 - a/(a+1) \cdot (-1) + a^3 > 0 \\ 2^2 - a/(a+1) \cdot 2 + a^3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < a^2 + a < 4 \\ a^2(a+1)^2 - 2a^2(a+1) + 4a^3 < 0 \\ 1 + a^2 + a + a^3 > 0 \\ 4 - 2a^2 - 2a + a^3 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + a - 4 < 0 \\ a^2 + a + 2 > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ 4a^3 - a^2(a+1)^2 < 0 \\ a^2(a+1) + (a+1) > 0 \quad a^2+1 > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ a^2(a-2) - 2(a-2) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + a - 4 < 0 \\ a^2(a-1)^2 > 0 \\ a+1 > 0 \\ (a-2)(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2}) > 0 \end{cases}$$



$$a \in (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \sqrt{2})$$

Ответ: $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \sqrt{2})$.

$$\begin{aligned} 4 &< \sqrt{7} < 5 \\ 3 &< -1 + \sqrt{7} < 4 \\ 1.5 &< \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} < 2 \\ -3 &< \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} < -2.5 \end{aligned}$$

18.1. 2) ЕГЭ-2018

a - ? ровно 4 разл. решения

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 12a - 28 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = 12a - 28 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2 - y^2) \cdot a = 12a - 28 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

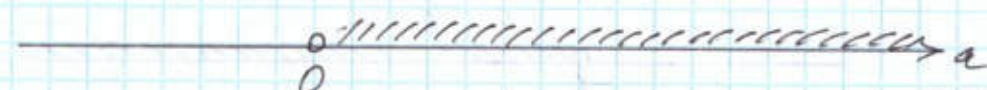
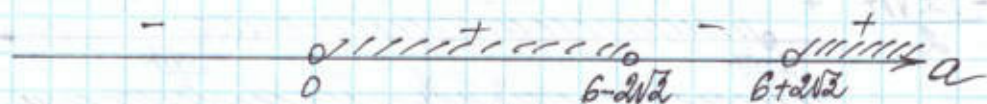
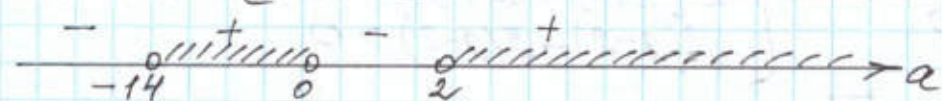
Заметим, что при $a < 0$ второе уравнение не будет иметь решений, а при $a = 0$ первое уравнение не будет иметь решений. Значит $\boxed{a > 0}$

$$\pm \begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{12a - 28}{a} \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 = \frac{12a - 28}{a} + a \\ 2y^2 = a - \frac{12a - 28}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = \frac{a^2 + 12a - 28}{a} \\ 2y^2 = \frac{a^2 - 12a + 28}{a} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = \frac{a^2 + 12a - 28}{2a} \\ y^2 = \frac{a^2 - 12a + 28}{2a} \end{cases}$$

Чтобы данное уравнение имело ровно 4 корня, потребуем, чтобы

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ y^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a^2 + 12a - 28}{2a} > 0 \\ \frac{a^2 - 12a + 28}{2a} > 0 \end{cases}$$



$$a \in (2; 6 - 2\sqrt{2}) \cup (6 + 2\sqrt{2}; +\infty)$$

$$\begin{aligned} a^2 + 12a - 28 \\ a = -6 \pm \sqrt{36 + 28} \\ a = -6 \pm 8 \\ \begin{cases} a = -14 \\ a = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 - 12a + 28 \\ a = 6 \pm \sqrt{36 - 28} \\ a = 6 \pm 2\sqrt{2} \\ 8 < 6 + 2\sqrt{2} < 9 \\ 3 < 6 - 2\sqrt{2} < 4 \end{aligned}$$

Ответ: $(2; 6 - 2\sqrt{2}) \cup (6 + 2\sqrt{2}; +\infty)$

18.7. 3) ЕГЭ-2018

a - ? ровно 4 различных решения:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(a+1)x - 2ay + 5a^2 + 8a + 3 = 0 \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

из второго уравнения получаем $y = \pm x$.

I) Если $y = x$, то

$$x^2 + x^2 - 4(a+1)x - 2ax + 5a^2 + 8a + 3 = 0$$

$$2x^2 - (6a+4)x + 5a^2 + 8a + 3 = 0.$$

В этой серии корней должно быть 2 разл. реш:

$$\begin{cases} \frac{D}{4} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \begin{cases} (3a+2)^2 - 2(5a^2 + 8a + 3) > 0 \\ 5a^2 + 8a + 3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a^2 + 12a + 4 - 10a^2 - 16a - 6 > 0 \\ 5(a+1)(a+\frac{3}{5}) \neq 0 \end{cases} \begin{cases} a^2 + 4a + 2 < 0 \\ a \neq -1 \\ a \neq -0,6 \end{cases}$$

$$\frac{\text{-----}}{-2\sqrt{2} \quad -1 \quad -0,6 \quad -2+\sqrt{2}} \rightarrow a$$

При $a \in (-2-\sqrt{2}; -1) \cup (-1; -0,6) \cup (-0,6; -2+\sqrt{2})$

данная система будет иметь 2 разл.

решения вида: $(x_1; x_1)$ $(x_2; x_2)$, где $x_1 \neq x_2$.

$$\begin{array}{l} -2 \pm \sqrt{2} \\ -1 < -2 + \sqrt{2} < 0 \\ -4 < -2 - \sqrt{2} < -3 \\ -2 + \sqrt{2} \sqrt{-0,6} \\ \sqrt{2} \sqrt{1,4} \\ 2 \sqrt{1,96} \\ -2 + \sqrt{2} > -0,6 \end{array}$$

II) Если $y = -x$, то

$$x^2 + x^2 - 4(a+1)x + 2ax + 5a^2 + 8a + 3 = 0$$

$$2x^2 - (2a+4)x + 5a^2 + 8a + 3 = 0.$$

$$\text{Аналогично: } \begin{cases} (a+2)^2 - 2(5a^2 + 8a + 3) > 0 \\ 5a^2 + 8a + 3 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} a^2 + 4a + 4 - 10a^2 - 16a - 6 > 0 \\ a \neq -1 \\ a \neq -0,6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a^2 + 12a + 2 < 0 \\ a \neq -1 \\ a \neq -0,6 \end{cases} \left| \begin{array}{l} a = \frac{-6 \pm \sqrt{36-18}}{9} = \frac{-6 \pm 3\sqrt{2}}{9} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{3} < \frac{-2+\sqrt{2}}{3} < 0 ; -\frac{4}{3} < \frac{-2-\sqrt{2}}{3} < -1 \end{array} \right.$$

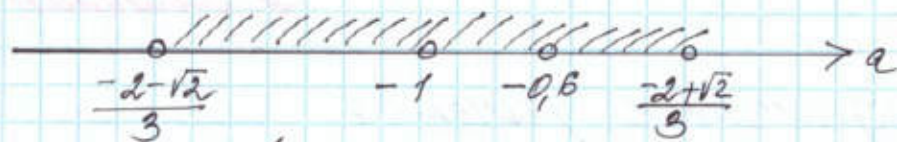
Сравним:

$$\frac{-2+\sqrt{2}}{3} \sqrt{-0,6} ;$$

$$\frac{-2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sqrt{-1,8}$$

$$2 \sqrt{0,2}$$

$$2 \sqrt{0,04} \Rightarrow \frac{-2+\sqrt{2}}{3} > -0,6.$$



При $a \in \left(-\frac{2-\sqrt{2}}{3}; -1\right) \cup (-1; -0.6) \cup (-0.6; \frac{-2+\sqrt{2}}{3})$

данная система будет иметь 2 разл. реш.

вида $(x_3; -x_3); (x_4; -x_4)$.

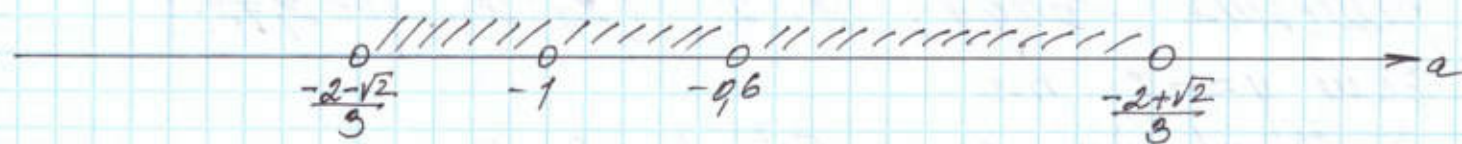
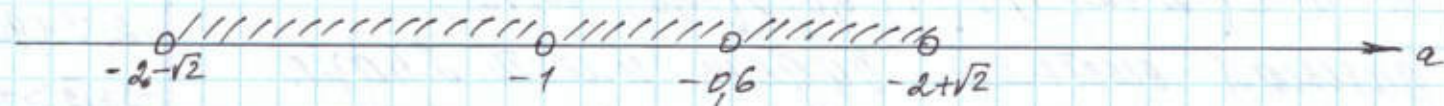
Теперь надо найти пересечение полученных значений a , чтобы система имела ровно 4 различных решения:

Сравним:

$$\begin{array}{rcl} \frac{-2+\sqrt{2}}{3} & \vee & -2+\sqrt{2} \\ -2+\sqrt{2} & \vee & -6+3\sqrt{2} \\ 4 & \vee & 2\sqrt{2} \\ 2 & \vee & \sqrt{2} \\ 4 & \vee & 2 \end{array}$$

$$\frac{-2+\sqrt{2}}{3} > -2+\sqrt{2}$$

$$-2-\sqrt{2} < \frac{-2-\sqrt{2}}{3} < -1 < -0.6 < -2+\sqrt{2} < \frac{-2+\sqrt{2}}{3}$$



$$a \in \left(-\frac{2-\sqrt{2}}{3}; -1\right) \cup (-1; -0.6) \cup (-0.6; -2+\sqrt{2}).$$

Ответ: $\left(-\frac{2-\sqrt{2}}{3}; -1\right) \cup (-1; -0.6) \cup (-0.6; -2+\sqrt{2})$

a - ? ровно 4 различных решения

$$\begin{cases} y = (a-2)x^2 - 2ax - 2 + a \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $y = \pm x$.

(I) Если $y = x$, то

$$x = (a-2)x^2 - 2ax - 2 + a$$

$$(a-2)x^2 - (2a+1)x + (a-2) = 0.$$

Это уравнение должно обязательно иметь 2 различных решения (чтобы всего их было 4), значит $\begin{cases} D > 0 \\ a-2 \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} (2a+1)^2 - 4(a-2)^2 > 0 \\ a \neq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 + 16a - 16 > 0 \\ a \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20a - 15 > 0 \\ a \neq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a > 0,75 \\ a \neq 2 \end{cases}$$

При $a \in (0,75; 2) \cup (2; +\infty)$ данная система будет иметь решения вида: $(x_1; x_1); (x_2; x_2); x_1 \neq x_2$.

(II) Если $y = -x$, то

$$-x = (a-2)x^2 - 2ax - 2 + a$$

$$(a-2)x^2 - (2a-1)x + a-2 = 0$$

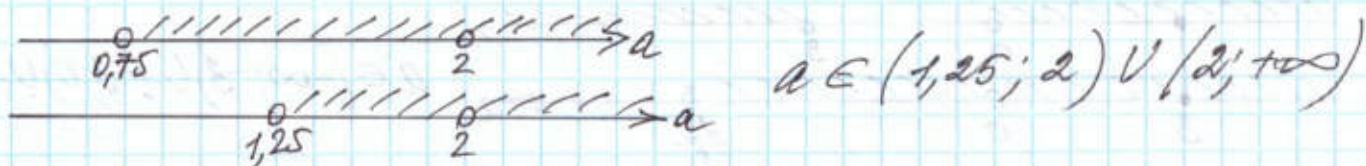
$\begin{cases} D > 0 \\ a-2 \neq 0 \end{cases}$ аналогично.

$$\begin{cases} (2a-1)^2 - 4(a-2)^2 > 0 \\ a \neq 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 4a^2 - 4a + 1 - 4a^2 + 16a - 16 > 0 \\ a \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12a - 15 > 0 \\ a \neq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a > 1,25 \\ a \neq 2 \end{cases}$$

Решение вида $(x_3; -x_3); (x_4; -x_4), x_3 \neq x_4$.

Найдём пересечение полученных значений для a :



Ответ: $(1,25; 2) \cup (2; +\infty)$.

18.1. б) ЕГЭ - 2018

a - ? ровно 4 различных решения

$$\begin{cases} ax^2 + ay^2 - (2a-5)x + 2ay + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = xy + x \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение системы
 $x^2 + y^2 - xy - x = 0$; $x(x-1) - y(y-1) = 0$; $(x-1)(x-y) = 0$.

$$\begin{cases} x=1 \\ x=y \end{cases}$$

I. Если $x=1$, то $a + ay^2 - 2a + 5 + 2ay + 1 = 0$
 $ay^2 + 2ay + 6 - a = 0$.

Это уравнение должно иметь два различных корня, значит $\begin{cases} a \neq 0 \\ D > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a^2 - a(6-a) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 2a^2 - 6a > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ a(a-3) > 0 \end{cases} \Rightarrow a(a-3) > 0 \quad \text{штрихи} \quad \begin{matrix} 0 & 3 \end{matrix} \rightarrow a$$

При $a \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$ у данной системы будут 2 различных решения вида $(1; y_1), (1; y_2), y_1 \neq y_2$

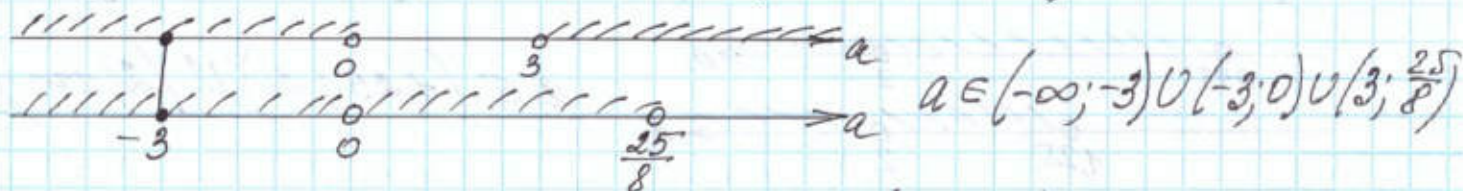
II. Если $x=y$, то $ay^2 + ay^2 - (2a-5)y + 2ay + 1 = 0$
 $2ay^2 - 2ay + 5y + 2ay + 1 = 0$

$$2ay^2 + 5y + 1 = 0, \text{ аналогично требуем } \begin{cases} a \neq 0 \\ D > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ 25 - 8a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a < \frac{25}{8} \end{cases} \quad \text{штрихи} \quad \begin{matrix} 0 & \frac{25}{8} \end{matrix} \rightarrow a$$

При $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{25}{8})$ у данной системы будут два различных решения вида $(y_3; y_3), (y_4; y_4), y_3 \neq y_4$

Проверим совпадение решений; это возможно только в точке $(1; 1)$. Если $y=1$, то $2a+5+1=0, a=-3$
 Найдём пересечение полученных значений a .



Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (3; \frac{25}{8})$

18.2. 1) ЕГЭ-2018

a - ? хотя бы один корень

$$\sqrt{x+2a-1} + \sqrt{x-a} = 1.$$

$$\sqrt{x+2a-1} = 1 - \sqrt{x-a}$$

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{x-a} \geq 0 \\ x-a \geq 0 \\ x+2a-1 = (1 - \sqrt{x-a})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x-a} \leq 1 \\ x-a \geq 0 \\ x+2a-1 = 1 - 2\sqrt{x-a} + x-a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x-a \leq 1 \\ 2\sqrt{x-a} = 2-3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq x \leq a+1 \\ 2-3a \geq 0 \\ 4(x-a) = (2-3a)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq x \leq a+1 \\ a \leq \frac{2}{3} \\ 4x-4a = 4-12a+9a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq x \leq a+1 \\ a \leq \frac{2}{3} \\ x = \frac{9}{4}a^2 - 2a + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{9}{4}a^2 - 2a + 1 \\ \frac{9}{4}a^2 - 2a + 1 \geq a \\ \frac{9}{4}a^2 - 2a + 1 \leq a+1 \\ a \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

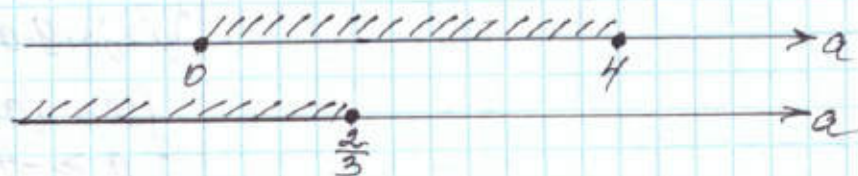
Чтобы существовал хотя бы один корень, надо, чтобы выполнялись все ограничения на a .

$$\begin{cases} 9a^2 - 12a + 4 \geq 0 \\ 9a^2 - 12a \leq 0 \\ a \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3a-2)^2 \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ 3a(a-4) \leq 0 \\ a \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(a-4) \leq 0 \\ a \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$a \in [0; \frac{2}{3}]$$



Ответ: $[0; \frac{2}{3}]$

18.2. 2) ЕГЭ-2016

a - ? ровно 3 различных решения

$$\sqrt{15x^2 + 6ax + 9} = x^2 + ax + 3$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 3 \geq 0 \\ 15x^2 + 6ax + 9 = x^4 + a^2x^2 + 9 + 2ax^3 + 6ax + 6x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 3 \geq 0 \\ x^4 + 2ax^3 - 9x^2 + a^2x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 3 \geq 0 \\ x^2(x^2 + 2ax - 9 + a^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 3 \geq 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + ax + 3 \geq 0 \\ x^2 + 2ax - 9 + a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0^2 + 0 \cdot a + 3 \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Корень $x=0$ существует при любом значении a .

$$\begin{cases} x^2 + ax + 3 \geq 0 \\ x^2 + 2ax + (a-3)(a+3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 3 \geq 0 \\ \begin{cases} x = -(a+3) \\ x = -(a-3) \end{cases} \end{cases}$$

Проверим совпадение корней

$$\begin{array}{c|c|c} -(a+3)=0 & -(a-3)=0 & -(a+3)=-(a-3) \\ a+3=0 & a-3=0 & a+3=a-3 \\ \hline a=-3 & a=3 & \text{ней рас.} \end{array}$$

$$\begin{cases} x = -(a+3) \\ (-a-3)^2 - a(a+3) + 3 \geq 0 \end{cases}$$

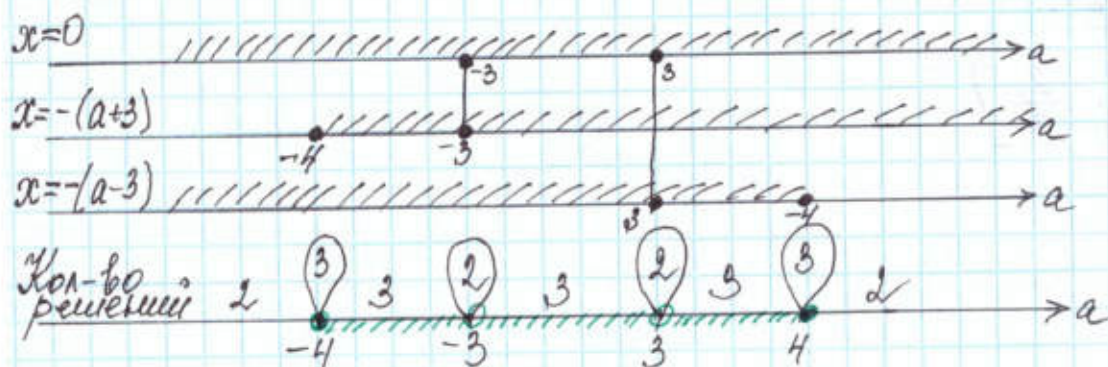
$$\begin{cases} x = -(a+3) \\ a^2 + 6a + 9 - a^2 - 3a + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -(a+3) \\ a \geq -4 \end{cases}$$

$$\text{или} \begin{cases} x = -(a-3) \\ (-a+3)^2 - a(a-3) + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -(a-3) \\ a^2 - 6a + 9 - a^2 + 3a + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -(a-3) \\ a \leq 4 \end{cases}$$



Ответ: $[-4; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; 4]$

18.2. 3) ЕГЭ-2016

a - ? единственное решение

$$\frac{x-2a}{x+2} + \frac{x-1}{x-a} = 1$$

$$\frac{(x-2a)(x-a) + (x+2)(x-1) - (x+2)(x-a)}{(x+2)(x-a)} = 0$$

$$\frac{x^2 - 2ax - ax + 2a^2 + x^2 + x - 2 - x^2 - 2x + ax + 2a}{(x+2)(x-a)} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 2ax - x + 2a^2 + 2a - 2 = 0 \\ (x+2)(x-a) \neq 0 \\ x^2 - (2a+1)x + (2a^2 + 2a - 2) = 0 \quad (1) \\ x \neq -2 \\ x \neq a \end{cases}$$

$$(1) x^2 - (2a+1)x + (2a^2 + 2a - 2) = 0$$

$$x = \frac{2a+1 \pm \sqrt{(2a+1)^2 - 4(2a^2 + 2a - 2)}}{2}$$

$$x = \frac{2a+1 \pm \sqrt{4a^2 + 4a + 1 - 8a^2 - 8a + 8}}{2}$$

$$x = \frac{2a+1 \pm \sqrt{9-4a-4a^2}}{2} \quad \text{Пусть } x_1 = \frac{2a+1 + \sqrt{9-4a-4a^2}}{2}$$

$$x_2 = \frac{2a+1 - \sqrt{9-4a-4a^2}}{2}$$

$$x_0 = \frac{2a+1}{2}$$

Возможные случаи:

$$\begin{cases} D=0 \text{ или } \begin{cases} D>0 \text{ или } \begin{cases} D>0 \end{cases} \\ x_0 \neq -2 \\ x_0 \neq a \end{cases} \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = a \end{cases} \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x_2 = -2 \\ x_1 = a \end{cases} \end{cases}$$

$$I \begin{cases} 9-4a-4a^2=0 \\ \frac{2a+1}{2} \neq -2 \\ \frac{2a+1}{2} \neq a \end{cases} \begin{cases} 4a^2+4a-9=0 \\ 2a+1 \neq -4 \\ 2a+1 \neq 2a \end{cases} \begin{cases} a = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{2} \\ a \neq -2,5 \\ 1 \neq 0 \text{ верно} \end{cases}$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$II. \begin{cases} 9-4a-4a^2 > 0 \\ \begin{cases} \frac{2a+1 + \sqrt{9-4a-4a^2}}{2} = -2 \\ \frac{2a+1 + \sqrt{9-4a-4a^2}}{2} = a \end{cases} \end{cases} \begin{cases} 4a^2+4a-9 < 0 \\ \begin{cases} \sqrt{9-4a-4a^2} = -5-2a \\ \sqrt{9-4a-4a^2} = -1 \end{cases} \end{cases}$$

нет решения

$$\text{III} \begin{cases} 9-4a-4a^2 > 0 \\ \frac{2a+1-\sqrt{9-4a-4a^2}}{2} = -2 \\ \frac{2a+1-\sqrt{9-4a-4a^2}}{2} = a \end{cases}$$

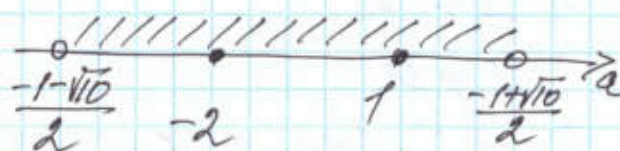
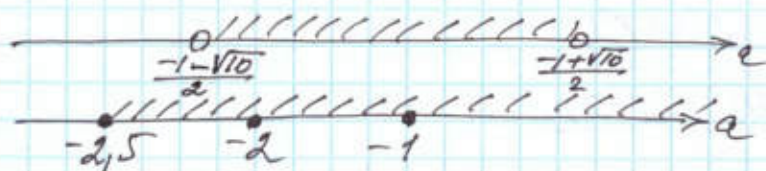
$$\begin{cases} 4a^2+4a-9 < 0 \\ \sqrt{9-4a-4a^2} = 2a+5 \\ \sqrt{9-4a-4a^2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2+4a-9 < 0 \\ 2a+5 \geq 0 \\ 9-4a-4a^2 = 4a^2+20a+25 \end{cases}$$

$$\text{или} \begin{cases} 4a^2+4a-9 < 0 \\ 9-4a-4a^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2+4a-9 < 0 \\ a \geq -2,5 \\ a^2+3a+2=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} -\frac{1 \pm \sqrt{10}}{2} \\ -2,5 \\ -2; -1 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 4a^2+4a-9 < 0 \\ a^2+a-2=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 1; -2 \end{array} \right.$$



$$\begin{cases} a = -2 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Объединим полученные решения

$$\begin{cases} a = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{2} \\ a = -2 \\ a = \pm 1 \end{cases}$$

Ответ: $\frac{-1-\sqrt{10}}{2}; -2; -1; 1; \frac{-1+\sqrt{10}}{2}$

18.2. 4) ЕГЭ-2014

a - ? единственное решение

$$\sqrt{x^4 + (a-5)^4} = |x+a-5| + |x-a+5|$$

Заметим, что уравнение является симметричным относительно x , т.к.

$$\sqrt{x^4 + (a-5)^4} = \sqrt{(-x)^4 + (a-5)^4} \quad \text{и}$$

$$|x+a-5| + |x-a+5| = |-x+a-5| + |-x-a+5| =$$

$$= |x-a+5| + |x+a-5|. \quad (\text{используем: } |m| = |-m|)$$

Поэтому единственное (или нет) решение возможно только при $x=0$.

$$\sqrt{0^4 + (a-5)^4} = |0+a-5| + |0-a+5|$$

$$\sqrt{(a-5)^4} = |a-5| + |5-a|$$

$$(a-5)^2 - 2|a-5| = 0$$

$$\begin{cases} a \geq 5 \\ (a-5)^2 - 2(a-5) = 0 \end{cases} \begin{cases} a \geq 5 \\ (a-5)(a-7) = 0 \end{cases} \begin{cases} a \geq 5 \\ a = 5 \\ a = 7 \end{cases} \begin{cases} a = 5 \\ a = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 5 \\ (a-5)^2 + 2(a-5) = 0 \end{cases} \begin{cases} a < 5 \\ (a-5)(a-3) = 0 \end{cases} \begin{cases} a < 5 \\ a = 3 \end{cases} \begin{cases} a = 3 \end{cases}$$

Проверка

I При $a=3$ получим $\sqrt{x^4 + 2^4} = |x-2| + |x+2|$

		-2		2	$\rightarrow x$
$x-2$	-	-	-	+	
$x+2$	-	+	+	+	

1) $x < -2 \Rightarrow \sqrt{x^4 + 16} = -x+2 - x-2$

$$\sqrt{x^4 + 16} = -2x$$

$$x^4 + 16 = 4x^2$$

$$x^4 - 4x^2 + 16 = 0 \text{ не имеет корней, т.к. } \Delta < 0.$$

2) $-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow \sqrt{x^4 + 16} = -x+2 + x+2$

$$\sqrt{x^4 + 16} = 4$$

$$x^4 + 16 = 16$$

$$x^4 = 0$$

$x=0$ единственный корень.

$$3) x > 2 \Rightarrow \sqrt{x^4 + 16} = x - 2 + x + 2$$

$$\sqrt{x^4 + 16} = 2x$$

$$x^4 + 16 = 4x^2$$

$$x^4 - 4x^2 + 16 = 0 \text{ нет корней, т.к. } D < 0.$$

Получили, что при $a=3$ единственный корень $x=0$.

$$\text{II. При } a=5 \text{ получим } \sqrt{x^4} = |x| + |x|$$

$$x^2 = 2|x|$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2x \end{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ x(x-2) = 0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2 = -2x \end{cases} \begin{cases} x < 0 \\ x(x+2) = 0 \end{cases} \begin{cases} x=-2 \end{cases}$$

Получили, что при $a=5$ три корня $-2; 0; 2$.

$$\text{III. При } a=7 \text{ получим } \sqrt{x^4 + 2^4} = |x+2| + |x-2|$$

Это уравнение мы уже решали в I, оно имеет единственный корень $x=0$.

Ответ: 3; 7

18.2. 5) ЕГЭ - 2014

a - ? ровно два различных решения
 $(\log_8(x+a) - \log_8(x-a))^2 - 12(\log_8(x+a) - \log_8(x-a)) + 35a^2 - 6a - 9 = 0$

Пусть $\log_8(x+a) - \log_8(x-a) = t$, тогда

$$t^2 - 12at + 35a^2 - 6a - 9 = 0$$

$$t = 6a \pm \sqrt{36a^2 - 35a^2 + 6a + 9} = 6a \pm \sqrt{(a+3)^2} = 6a \pm (a+3)$$

$$\begin{cases} t = 7a+3 \\ t = 5a-3 \end{cases} \quad \begin{cases} \log_8(x+a) - \log_8(x-a) = 7a+3 \\ \log_8(x+a) - \log_8(x-a) = 5a-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+a > 0 \\ x-a > 0 \\ \log_8 \frac{x+a}{x-a} = \log_8 8^{7a+3} \\ \log_8 \frac{x+a}{x-a} = \log_8 8^{5a-3} \end{cases} \quad \begin{cases} x > -a \\ x > a \\ \frac{x+a}{x-a} = 8^{7a+3} \\ \frac{x+a}{x-a} = 8^{5a-3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -a \\ x > a \\ x+a = x \cdot 8^{7a+3} - a \cdot 8^{7a+3} \\ x+a = x \cdot 8^{5a-3} - a \cdot 8^{5a-3} \end{cases} \quad \begin{cases} x > -a \\ x > a \\ x \cdot (8^{7a+3} - 1) = a(8^{7a+3} + 1) \\ x \cdot (8^{5a-3} - 1) = a(8^{5a-3} + 1) \end{cases}$$

$$(1) \quad x(8^{7a+3} - 1) = a(8^{7a+3} + 1)$$

Если $7a+3=0$, т.е. $a = -\frac{3}{7}$, то $x \cdot 0 = -\frac{3}{7} \cdot 2$ нет реш.

Если $a \neq -\frac{3}{7}$, то $x_1 = \frac{a(8^{7a+3} + 1)}{8^{7a+3} - 1}$

Проверим, при каких a будут выполняться условия $x_1 > -a$ и $x_1 > a$.

$$\begin{cases} \frac{a \cdot 8^{7a+3} + a}{8^{7a+3} - 1} > -a \\ \frac{a \cdot 8^{7a+3} + a}{8^{7a+3} - 1} > a \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a \cdot 8^{7a+3} + a + a \cdot 8^{7a+3} - a}{8^{7a+3} - 1} > 0 \\ \frac{a \cdot 8^{7a+3} + a - a \cdot 8^{7a+3} + a}{8^{7a+3} - 1} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2 \cdot a \cdot 8^{7a+3}}{8^{7a+3} - 1} > 0 \\ \frac{2a}{8^{7a+3} - 1} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a}{7a+3-0} > 0 & \frac{a}{a+\frac{3}{7}} > 0 \\ \frac{a}{7a+3-0} > 0 & \text{при } a = -\frac{3}{7} \end{cases}$$

$$(2) x \cdot (8^{5a-3} - 1) = a(8^{5a-3} + 1)$$

Если $5a-3=0$, т.е. $a=\frac{3}{5}$, то $x \cdot 0 = \frac{3}{5} \cdot 2$ нет решений

Если $a \neq \frac{3}{5}$, то $x_2 = \frac{a(8^{5a-3} + 1)}{8^{5a-3} - 1}$

Проверим, при каких a будут выполняться условия $x_2 > a$ и $x_2 > -a$.

$$\begin{cases} \frac{a(8^{5a-3} + 1)}{8^{5a-3} - 1} > a \\ \frac{a(8^{5a-3} + 1)}{8^{5a-3} - 1} > -a \end{cases}$$

При $a=0$ система не имеет решений.

При $a > 0$ $\frac{8^{5a-3} + 1}{8^{5a-3} - 1} > 1$; $\frac{2}{8^{5a-3} - 1} > 0$, $8^{5a-3} > 1$, $\boxed{a > \frac{3}{5}}$

При $a < 0$ $\frac{8^{5a-3} + 1}{8^{5a-3} - 1} < -1$; $\frac{2 \cdot 8^{5a-3}}{8^{5a-3} - 1} < 0$, $8^{5a-3} < 1$, $a < \frac{3}{5}$, $\boxed{a < 0}$

Проверим, при каких a корни совпадут: $x_1 = x_2$.

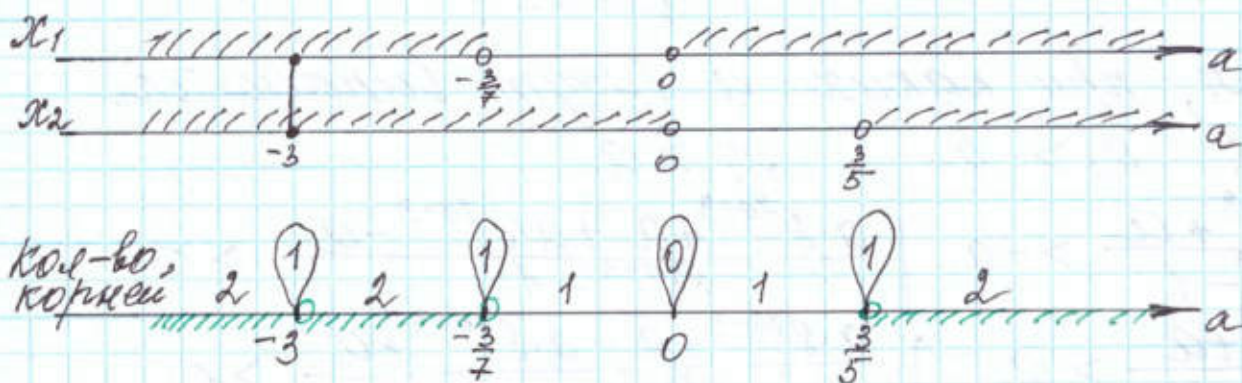
$$\frac{a(8^{5a-3} + 1)}{8^{5a-3} - 1} = \frac{a(8^{7a+3} + 1)}{8^{7a+3} - 1}$$

$$8^{5a-3} \cdot 8^{7a+3} + 8^{7a+3} - 8^{5a-3} - 1 = 8^{5a-3} \cdot 8^{7a+3} - 8^{7a+3} + 8^{5a-3} - 1$$

$$2 \cdot 8^{7a+3} = 2 \cdot 8^{5a-3}$$

$$7a+3 = 5a-3$$

$$\boxed{a = -3}$$



Ровно 2 различных решения будет при $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; -\frac{3}{7}) \cup (\frac{3}{5}; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; -\frac{3}{7}) \cup (\frac{3}{5}; +\infty)$

18.3. 1) ЕГЭ-2019

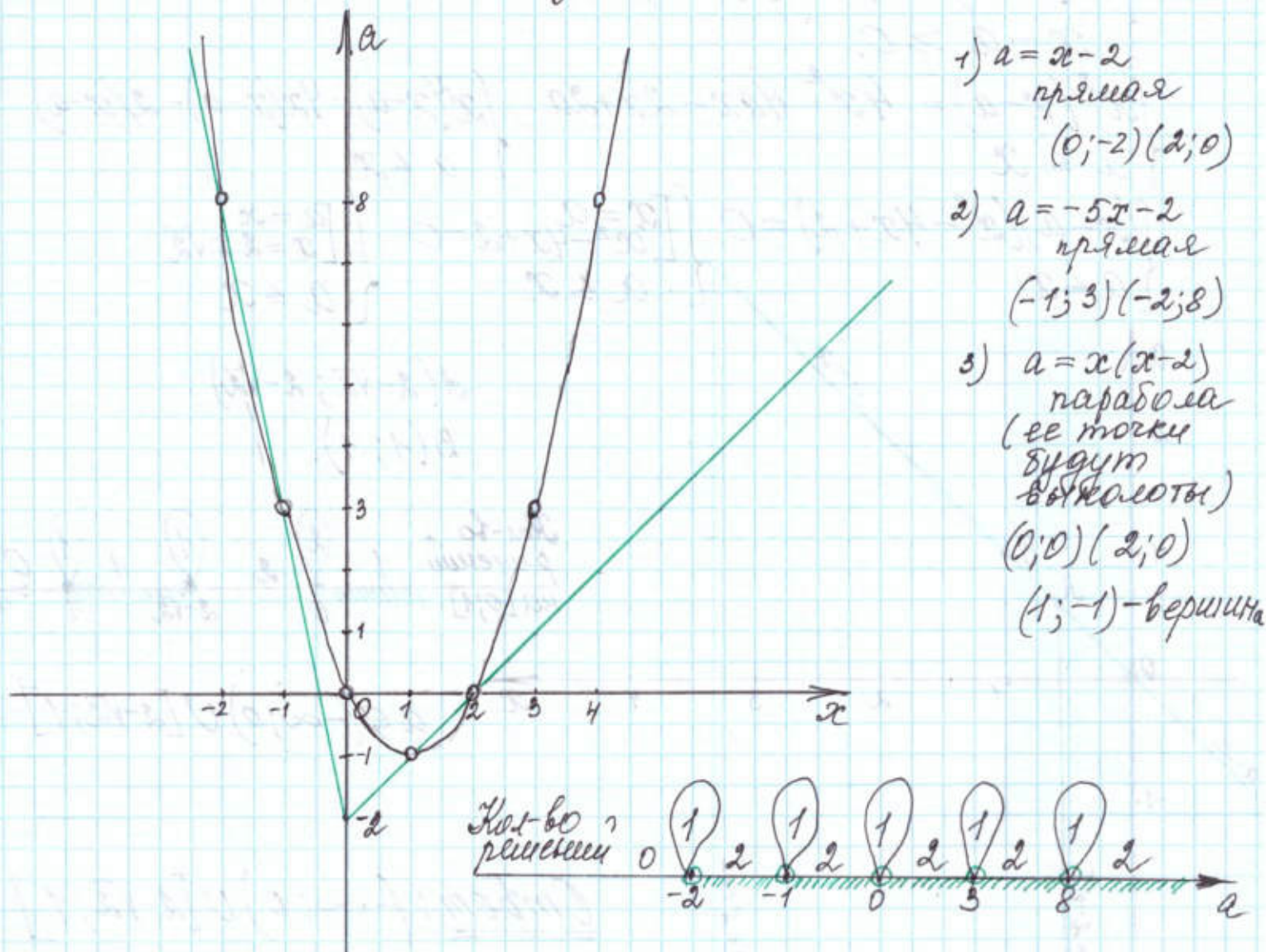
a - ? ровно 2 различных решения

$$\frac{3|x| - 2x - 2 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$$

$$\begin{cases} 3|x| - 2x - 2 - a = 0 \\ x^2 - 2x - a \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 3|x| - 2x - 2 \\ a \neq x(x-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ a = x - 2 \\ a \neq x(x-2) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 0 \\ a = -5x - 2 \\ a \neq x(x-2) \end{cases}$$

Построим множество точек плоскости, удовлетворяющее этой совокупности, в системе координат xa .



Ответ: $(-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 8) \cup (8; +\infty)$.

18.3. 2) ЕГЭ-2017

а-? ровно один корень на $[0; 1]$

$$x \cdot \sqrt{x-a} = \sqrt{4x^2 - (4a+2)x + 2a}$$

При $x < 0$ уравнение не имеет решений.

При $x=0$ $0\sqrt{-a} = \sqrt{2a} \Rightarrow a=0$.

Проверим, сколько корней будет при $a=0$:

$$x \cdot \sqrt{x} = \sqrt{4x^2 - 2x}; \quad x^3 = 4x^2 - 2x; \quad x(x^2 - 4x + 2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \pm \sqrt{2} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} 0 \in [0; 1] \\ 2 - \sqrt{2} \in [0; 1] \\ 2 + \sqrt{2} \notin [0; 1] \end{array} \right\} \text{Получили 2 корня на } [0; 1],$$

значит $a=0$ не подходит.

При $x > 0$ возведем обе части ур-я в квадрат

$$x^2(x-a) = 4x^2 - (4a+2)x + 2a$$

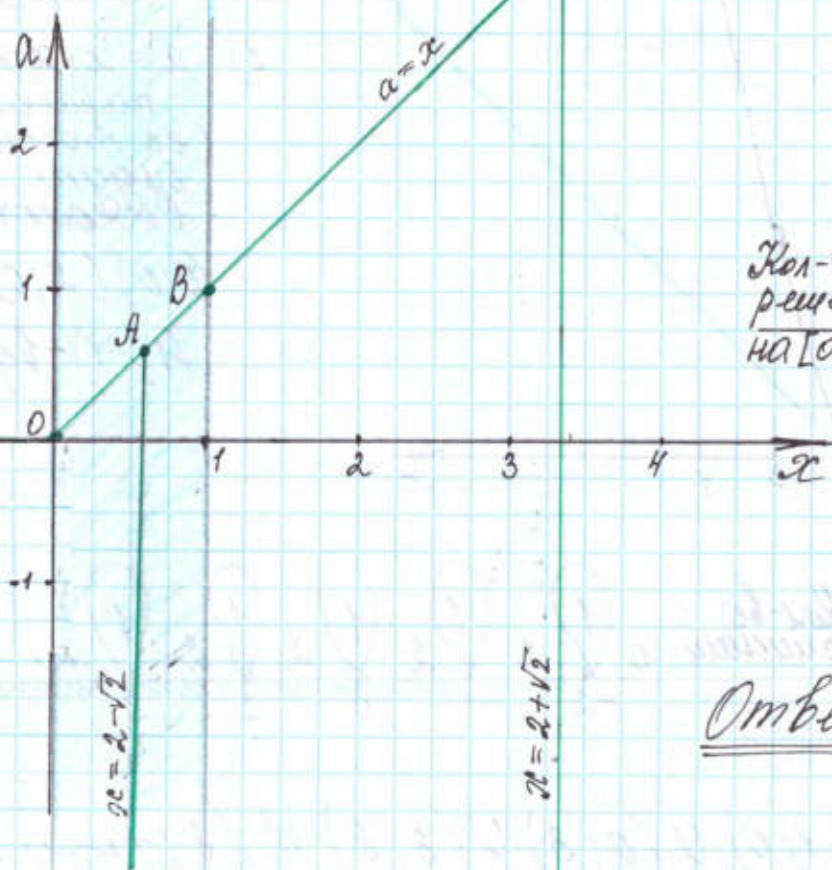
$$\left\{ \begin{array}{l} x-a \geq 0 \end{array} \right.$$

$$x^2(x-a) = 4x^2 - 4ax - 2x + 2a \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2(x-a) = 4x(x-a) - 2(x-a) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leq x \end{array} \right.$$

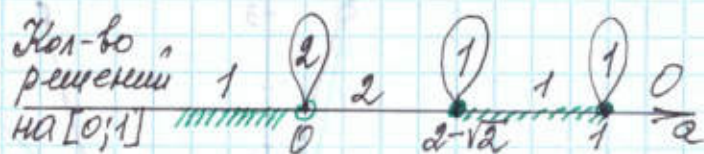
$$\left\{ \begin{array}{l} a \leq x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-a)(x^2 - 4x + 2) = 0 \\ a \leq x \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x=a \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a=x \\ x=2 \pm \sqrt{2} \\ a \leq x \end{array} \right.$$



$$A(2-\sqrt{2}; 2-\sqrt{2})$$

$$B(1; 1).$$



$$a \in (-\infty; 0) \cup [2-\sqrt{2}; 1]$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup [2-\sqrt{2}; 1]$

18.3) 3) ЕГЭ-2017

a - ? ровно 1 корень на $[4; 8]$

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}} = 0$$

$$\begin{cases} (x-a-7)(x+a-2) = 0 \\ 10x-x^2-a^2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x-a-7=0 \\ x+a-2=0 \end{cases} \\ x^2-10x+25+a^2-25 < 0 \end{cases}$$

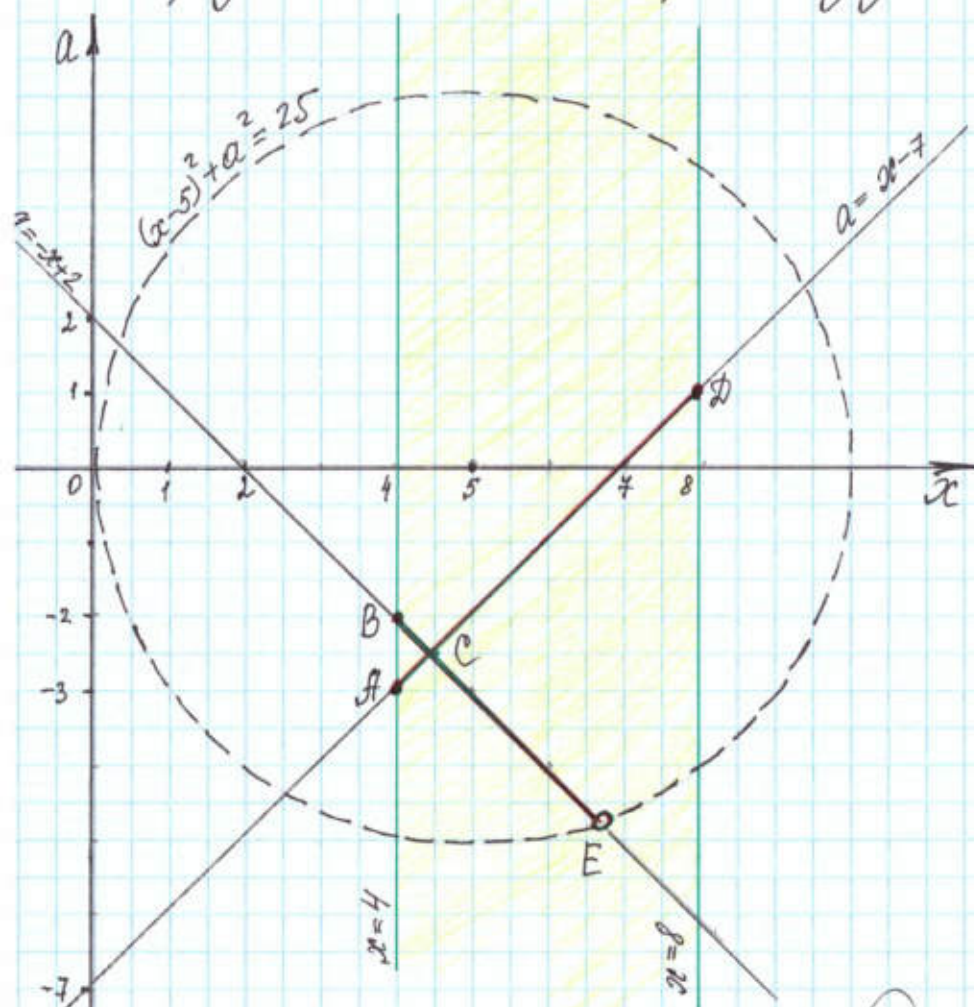
$$\begin{cases} a = x-7 \\ a = -x+2 \\ (x-5)^2 + a^2 < 25 \end{cases}$$

График - прямая: $(0; -7); (7; 0)$

График - прямая: $(0; 2); (2; 0)$

Множество точек круга (без границы); $(5; 0)$ - центр; $R=5$.

Изобразим множество точек плоскости xOa , координаты которых удовлетворяют системе.



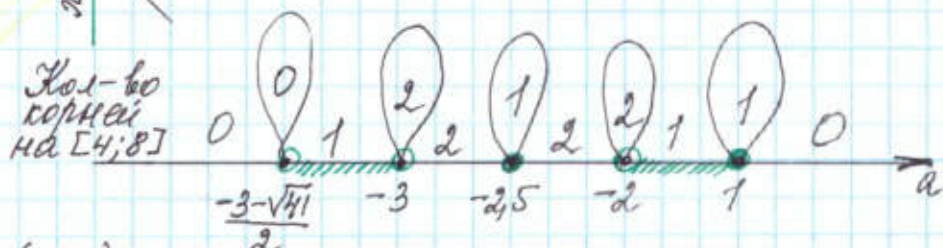
A: $\begin{cases} x=4 \\ a=x-7 \end{cases} \Rightarrow a=-3$

B: $\begin{cases} x=4 \\ a=-x+2 \end{cases} \Rightarrow a=-2$

C: $\begin{cases} a=-x+2 \\ a=x-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+2=x-7 \\ 2x=9 \\ x=4.5 \end{cases} \Rightarrow a=-2.5$

D: $\begin{cases} x=8 \\ a=x-7 \end{cases} \Rightarrow a=1$

E: $\begin{cases} a=2-x \\ (x-5)^2 + a^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-a \\ (-3-a)^2 + a^2 = 25 \\ 9+6a+a^2+a^2-25=0 \\ 2a^2+6a-16=0 \\ a^2+3a-8=0 \\ a = \frac{-3 \pm \sqrt{9+32}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2} \\ a < 0 \Rightarrow a = \frac{-3 - \sqrt{41}}{2} \end{cases}$



Ответ: $\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2}; -3\right) \cup \{-2.5\} \cup (-2; 1]$

18.3. 4) ЕГЭ-2017

a - ? равно 1 корень на $[0; \pi]$

$$\sqrt{x-a} \cdot \sin x = -\sqrt{x-a} \cdot \cos x$$

$$\sqrt{x-a} \cdot \sin x + \sqrt{x-a} \cdot \cos x = 0$$

$$\sqrt{x-a} \cdot (\sin x + \cos x) = 0$$

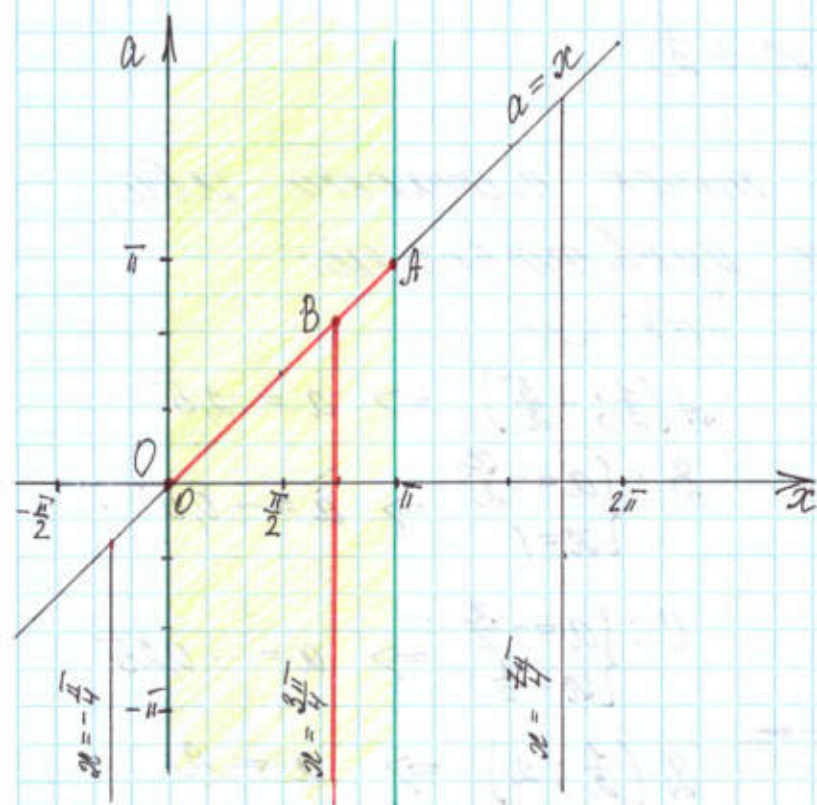
$$\begin{cases} x-a=0 \\ \sin x + \cos x = 0 \\ x-a \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=x \\ \sqrt{2} \sin(x+\frac{\pi}{4}) = 0 \\ a \leq x \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=x \\ x+\frac{\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ a \leq x \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} a=x \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \\ a \leq x \end{cases}$$

Изобразим множество точек плоскости xa , координаты которых удовлетворяют условию (*).

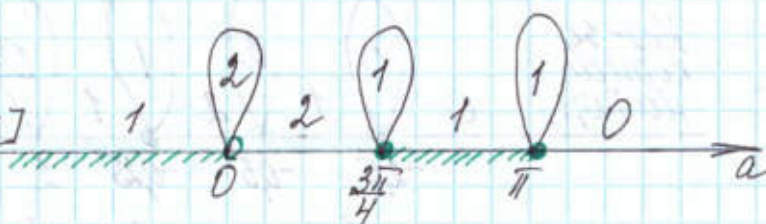


$$A: \begin{cases} a=x \\ x=\pi \end{cases} \Rightarrow a=\pi$$

$$B: \begin{cases} x=\frac{3\pi}{4} \\ a=x \end{cases} \Rightarrow a=\frac{3\pi}{4}$$

$$O(0;0) \Rightarrow a=0$$

Кол-во корней на $[0; \pi]$



$$a \in (-\infty; 0) \cup [\frac{3\pi}{4}; \pi]$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup [\frac{3\pi}{4}; \pi]$

18.3. 5) ЕГЭ-2017

a - ? ровно 1 корень на $[0; 1]$

$$\sqrt{2x-1} \cdot \ln(4x-a) = \sqrt{2x-1} \cdot \ln(5x+a).$$

$$\sqrt{2x-1} \cdot \ln(4x-a) - \sqrt{2x-1} \cdot \ln(5x+a) = 0.$$

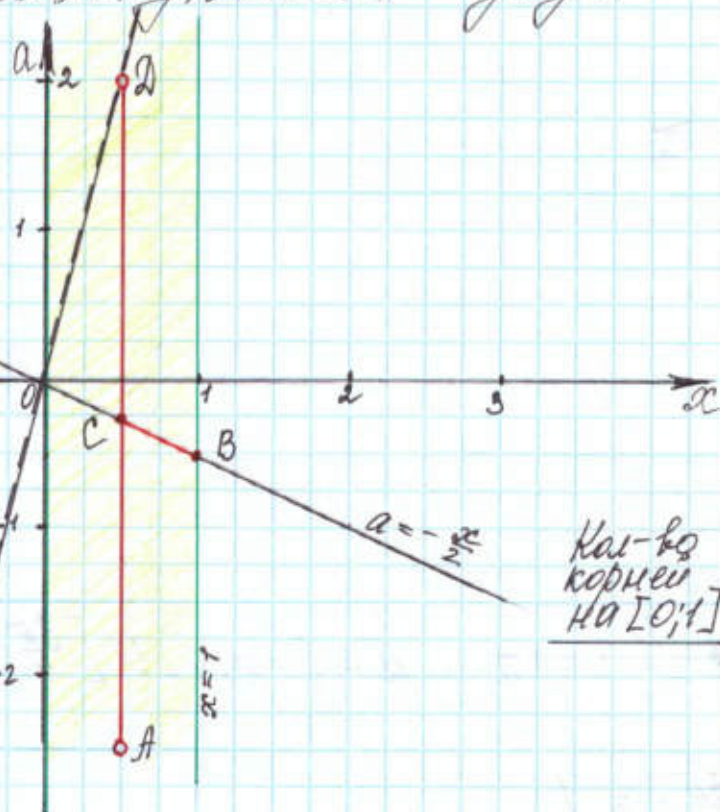
$$\sqrt{2x-1} \cdot (\ln(4x-a) - \ln(5x+a)) = 0$$

$$\begin{cases} 2x-1=0 \\ 4x-a > 0 \\ 5x+a > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ln(4x-a) = \ln(5x+a) \\ 2x-1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ 2-a > 0 \\ \frac{5}{2}+a > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x-a = 5x+a \\ 4x-a > 0 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} < a < 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{x}{2} \\ a < 4x \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Изобразим множество точек плоскости xa , координаты которых удовлетворяют совокупности двух систем.



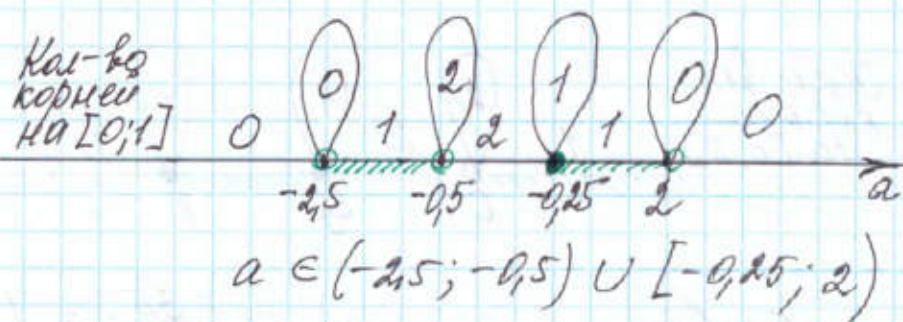
$$A\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow a = -2.5$$

$$B: \begin{cases} a = -\frac{x}{2} \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -0.5$$

$$C: \begin{cases} a = -\frac{x}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a = -0.25$$

$$D\left(\frac{1}{2}; 2\right) \Rightarrow a = 2.$$

Кол-во
корней
на $[0; 1]$



Ответ: $(-2.5; -0.5) \cup [-0.25; 2)$.

18.3. (23) 1)

a - ? единственное решение

$$\frac{9|x| + 7x + 4a - 16}{x^2 + 2x - 3 + a} = 0$$

$$\begin{cases} 9|x| + 7x + 4a - 16 = 0 \\ x^2 + 2x - 3 + a \neq 0 \end{cases} \begin{cases} a = \frac{1}{4}(-9|x| - 7x + 16) \\ a \neq -x^2 - 2x + 3 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

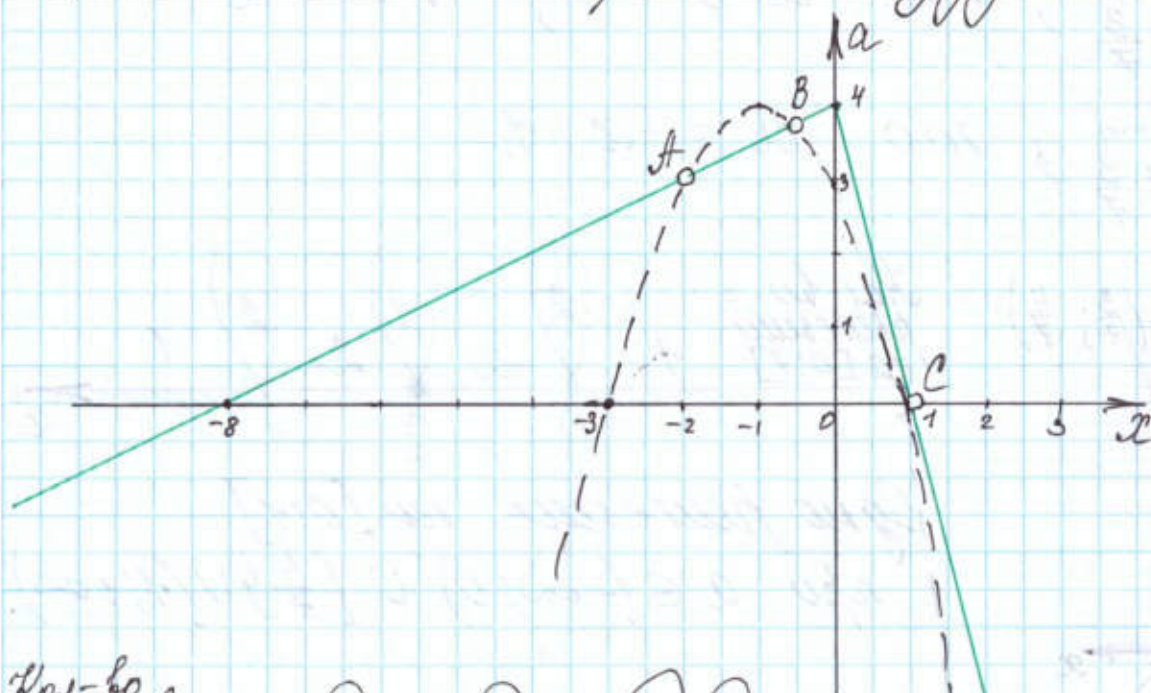
(1) Если $x \geq 0$, то $a = \frac{1}{4}(-9x - 7x + 16)$, $a = -4x + 4$
 Если $x < 0$, то $a = \frac{1}{4}(9x - 7x + 16)$, $a = \frac{1}{2}x + 4$

График - совокупность двух лучей.

(2) $a = -x^2 - 2x + 3$

График - парабола, ветви вниз, $x_0 = \frac{-2}{2} = -1$
 $(-1; 4)$ - вершина; $(-1; 0)$; $(-3; 0)$.

Точки этой параболы будут выколоты.



A(-2; 3)

B: $\frac{1}{2}x + 4 = -x^2 - 2x + 3$

$x^2 + 2.5x + 1 = 0$

$2x^2 + 5x + 2 = 0$

$x = -2$

$x = -\frac{1}{2}$

B(-1/2; 3 3/4)

C: $-4x + 4 = -x^2 - 2x + 3$

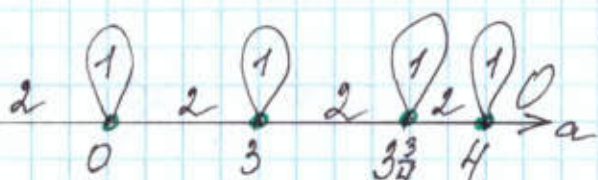
$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)^2 = 0$

$x = 1$

C(1; 0).

Кол-во
решений



Единственное решение будет при $a \in \{0; 3; 3\frac{3}{4}; 4\}$

Ответ: 0; 3; 3 3/4; 4.

18.3. (A3) 2)

a - ? ровно 1 корень на $[0; 1]$

$$x \cdot \sqrt{7(x+a-1)} = \sqrt{7x - 4x(x+a) + 3(a-1)}$$

Возведем обе части уравнения в квадрат,
т. к. $x \in [0; 1]$.

$$\begin{cases} x^2(7(x+a-1)) = 7x - 4x(x+a) + 3(a-1) \\ x+a-1 \geq 0 \end{cases}$$

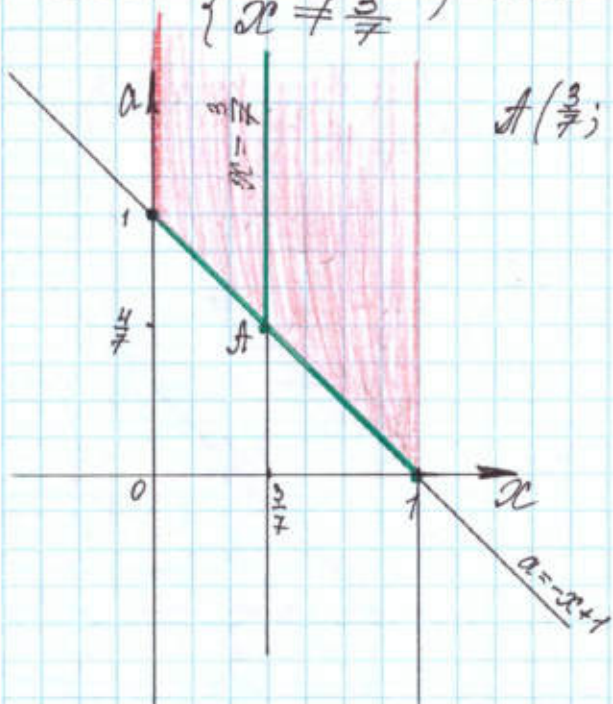
$$\begin{cases} 7x^3 + 7ax^2 - 7x^2 - 7x + 4x^2 + 4ax - 3a + 3 = 0 \\ a \geq -x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x+1)(x-\frac{3}{7}) = -(x-1)(x+1)(x-\frac{3}{7}) \\ a \geq -x+1 \end{cases}$$

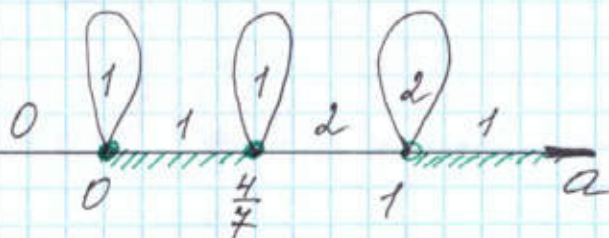
Если $\begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{7} \end{cases}$, то $\begin{cases} a \cdot 0 = 0 \\ a \geq -x+1 \end{cases} \quad a \geq -x+1.$

Если $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq \frac{3}{7} \end{cases}$, то $\begin{cases} a = -x+1 \\ a \geq -x+1 \end{cases} \quad a = -x+1.$

$$A(\frac{3}{7}; \frac{4}{7})$$



Кол-во
решений
на $[0; 1]$



Ровно один корень на $[0; 1]$
при $a \in [0; \frac{4}{7}] \cup (1; +\infty).$

Ответ: $[0; \frac{4}{7}] \cup (1; +\infty).$

18.3. D3 3)

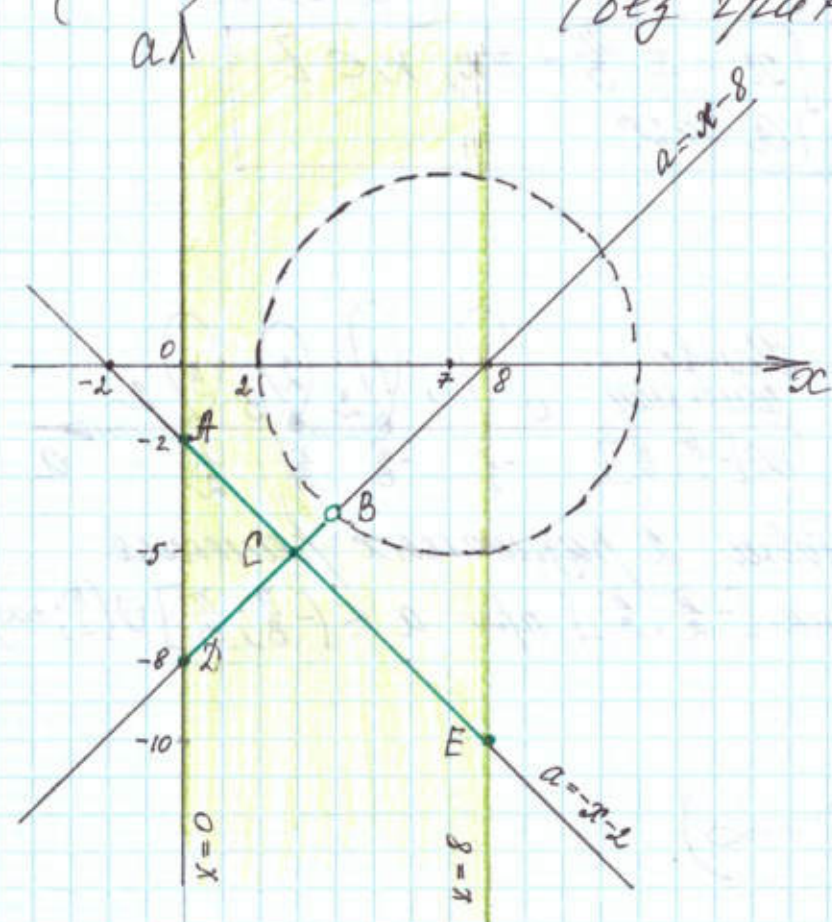
a - ? ровно 1 корень на $[0; 8]$

$$\frac{(x+a+2)(x-a-8)}{\sqrt{x^2-14x+a^2+24}} = 0.$$

$$\begin{cases} (x+a+2)(x-a-8) = 0 \\ x^2 - 14x + a^2 + 24 > 0 \end{cases} \begin{cases} a = -x-2 \\ a = x-8 \end{cases} \begin{cases} (x-7)^2 + a^2 > 25 \end{cases}$$

$\begin{cases} a = -x-2 \\ a = x-8 \end{cases}$ Совокупность двух прямых

$(x-7)^2 + a^2 > 25$ Внешняя часть круга (без границы); $(7; 0)$ - центр, $R = 5$.



A(0; -2)

$$\begin{aligned} C: x-8 &= -x-2 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \Rightarrow a = -5 \end{aligned}$$

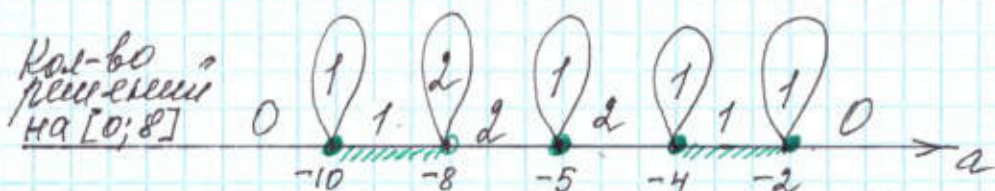
C(3; -5)

$$\begin{aligned} B: (x-7)^2 + (x-8)^2 &= 25 \\ x^2 - 14x + 49 + x^2 - 16x + 64 &= 25 \\ 2x^2 - 30x + 88 &= 0 \\ x^2 - 15x + 44 &= 0 \\ x &= \frac{15 \pm \sqrt{225 - 176}}{2} = \frac{15 \pm 7}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 11 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow a = -4$$

B(4; -4)

D(0; -8)
E(8; -10)



$$a \in [-10; -8) \cup \{-5\} \cup [-4; -2]$$

Ответ: $[-10; -8) \cup \{-5\} \cup [-4; -2]$

18.3 (23) 4)

a - ? ровно 2 различных корня на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$3 \cos^2 x \cdot \sqrt{a-x} = \sin^2 x \sqrt{a-x}$$

$$3 \cos^2 x \cdot \sqrt{a-x} - \sin^2 x \cdot \sqrt{a-x} = 0$$

$$\sqrt{a-x} \cdot (3 \cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$a-x=0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3 \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \\ a-x > 0 \end{cases}$$

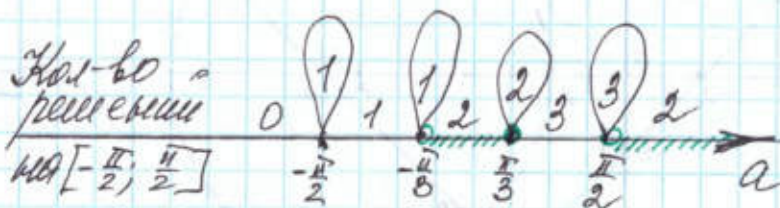
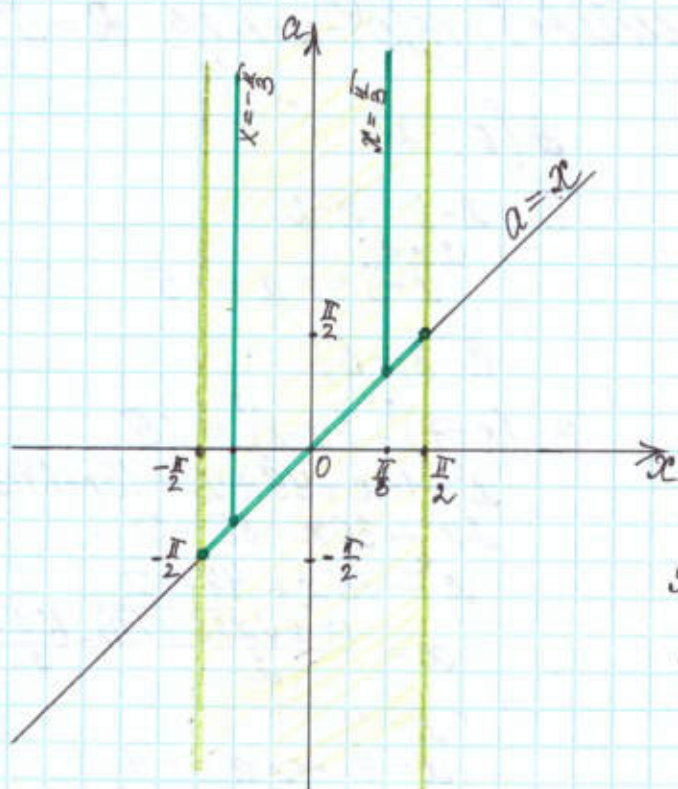
$$\boxed{a=x}$$

$$\begin{cases} 3 \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \\ a-x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan^2 x = 3 \\ a > x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan x = \pm \sqrt{3} \\ a > x \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ a > x \end{cases}}$$



Ровно 2 различных решения на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ при $a \in (-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{2}; +\infty)$

Ответ: $(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{2}; +\infty)$.

18.3 (23) 5)

a - ? ровно 1 корень

$$\sqrt{2-5x} \cdot \ln(36x^2 - a^2) = \sqrt{2-5x} \cdot \ln(6x+a)$$

$$\sqrt{2-5x} \cdot (\ln(6x-a)(6x+a) - \ln(6x+a)) = 0$$

$$\begin{cases} 2-5x=0 \text{ или } \ln(6x-a)(6x+a) = \ln(6x+a) \\ 6x+a > 0 \\ 6x-a > 0 \end{cases} \begin{cases} 2-5x > 0 \\ (6x-a)(6x+a) = 6x+a \\ 6x+a > 0 \\ x \neq \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ a > -\frac{12}{5} \\ a < \frac{12}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ -\frac{12}{5} < a < \frac{12}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > -6x \\ x < \frac{2}{5} \\ 6x-a=1 \end{cases} \begin{cases} a > -6x \\ x < \frac{2}{5} \\ a = 6x-1 \end{cases}$$

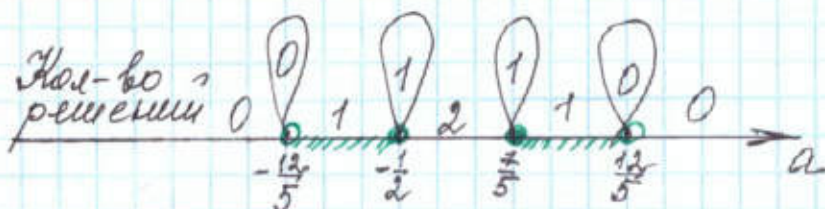
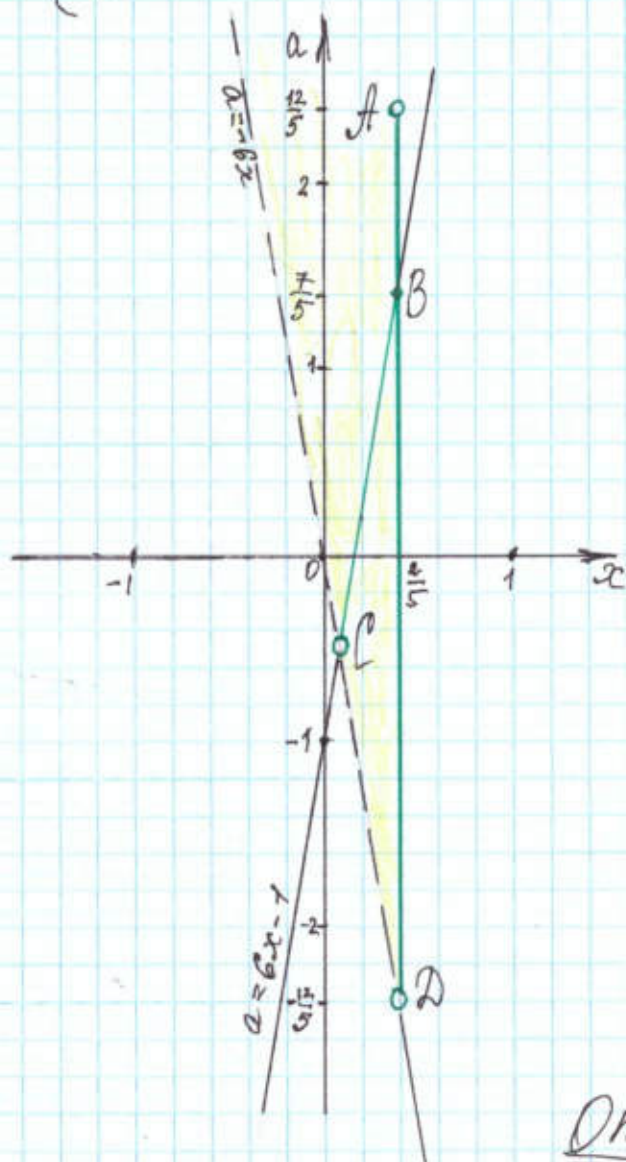
$$A\left(\frac{2}{5}; \frac{12}{5}\right) \quad a = \frac{12}{5}$$

$$B\left(\frac{2}{5}; \frac{7}{5}\right) \quad a = \frac{7}{5}$$

$$C: -6x = 6x-1 \\ 12x = 1 \\ x = \frac{1}{12} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$C\left(\frac{1}{12}; -\frac{1}{2}\right)$$

$$D\left(\frac{2}{5}; -\frac{12}{5}\right)$$



$$a \in \left(-\frac{12}{5}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{5}; \frac{12}{5}\right)$$

Ответ: $\left(-\frac{12}{5}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{5}; \frac{12}{5}\right)$

18.4. 1) ЕГЭ-2017

a - ? ровно 1 корень на $[0; 3]$

$$\sqrt{5x-3} \cdot \ln(x^2-6x+10-a^2)=0$$

$$\begin{cases} 5x-3=0 \\ x^2-6x+10-a^2>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ (x-3)^2+1-a^2>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{144+25}{25}-a^2>0 \\ x=\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ (a-\frac{13}{5})/(a+\frac{13}{5})<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ -\frac{13}{5}<a<\frac{13}{5} \end{cases}$$

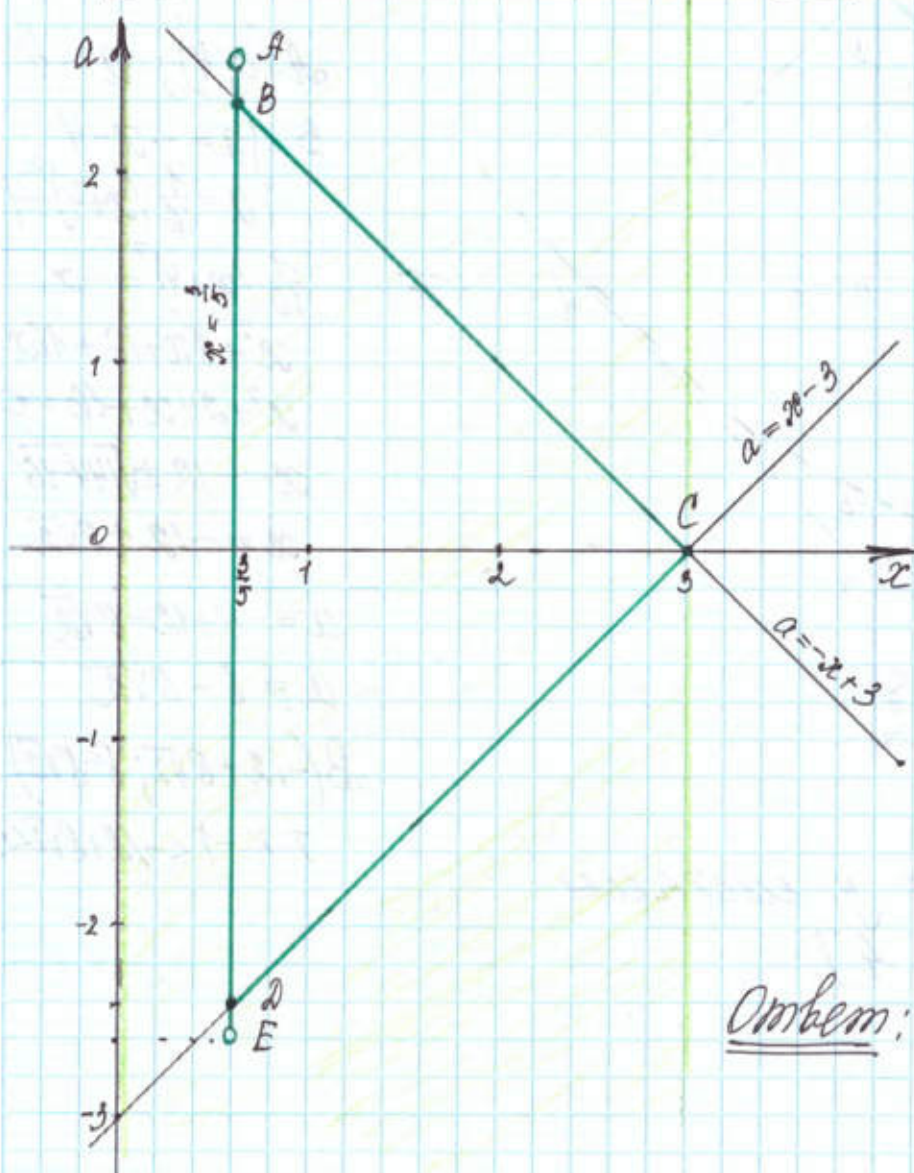
$$\text{или } \begin{cases} \ln(x^2-6x+10-a^2)=0 \\ 5x-3\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-6x+10-a^2=1 \\ x\geq\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq\frac{3}{5} \\ (x-3)^2-a^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq\frac{3}{5} \\ (x-3-a)/(x-3+a)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq\frac{3}{5} \\ \begin{cases} a=x-3 \\ a=-x+3 \end{cases} \end{cases}$$



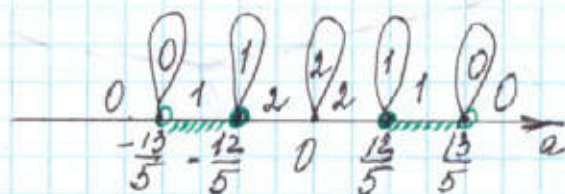
$$A(\frac{3}{5}; \frac{13}{5}) \quad a = \frac{13}{5}$$

$$B(\frac{3}{5}; \frac{12}{5}) \quad a = \frac{12}{5}$$

$$C(3; 0) \quad a = 0$$

$$D(\frac{3}{5}; -\frac{12}{5}) \quad a = -\frac{12}{5}$$

$$E(\frac{3}{5}; -\frac{13}{5}) \quad a = -\frac{13}{5}$$



$$a \in (-\frac{13}{5}; -\frac{12}{5}] \cup [\frac{12}{5}; \frac{13}{5})$$

Ответ: $(-\frac{13}{5}; -\frac{12}{5}] \cup [\frac{12}{5}; \frac{13}{5})$

18.4. 2) ЕГЭ-2017

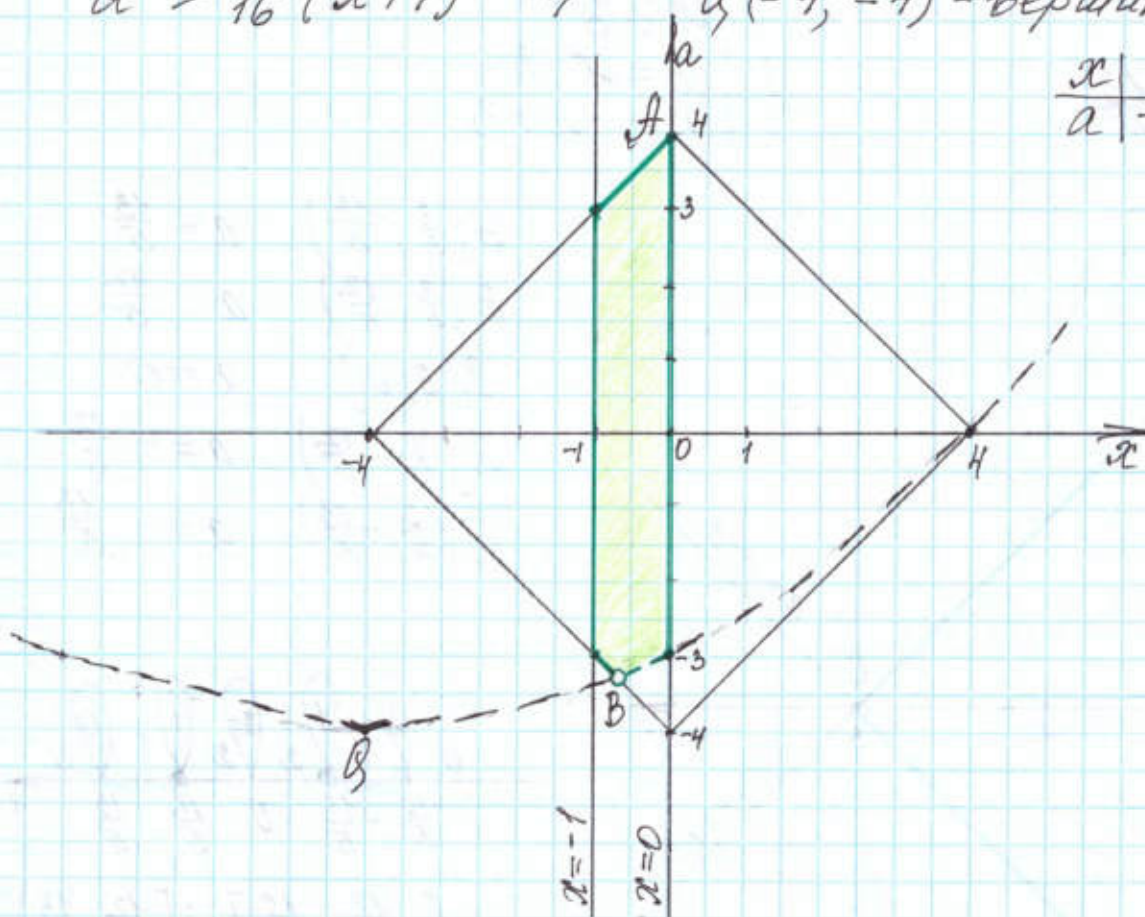
a - ? хотя бы один корень на $[-1; 0]$

$$\begin{cases} |x| + |a| \leq 4 \\ x^2 + 8x < 16a + 48 \end{cases}$$

(1) $|x| + |a| \leq 4$.

Неравенство симметрично относительно x и относительно a , поэтому можно построить часть графика при $x \geq 0, a \geq 0$, а потом отобразить от оси Ox и от оси Oa .
 $x + a \leq 4$; $a \leq -x + 4$.

(2) $x^2 + 8x < 16a + 48$; $16a > x^2 + 8x - 48$; $16a > (x+4)^2 - 64$
 $a > \frac{1}{16}(x+4)^2 - 4$ $Q(-4; -4)$ - вершина параболы.



x	0	4
a	-3	0

$A(0; 4)$; $a = 4$.

$B: \begin{cases} a = -x - 4 \\ a = \frac{1}{16}(x+4)^2 - 4 \end{cases}$

$\frac{1}{16}(x+4)^2 = -x$
 $x^2 + 8x + 16 + 16x = 0$

$x^2 + 24x + 16 = 0$

$x = -12 \pm \sqrt{144 - 16}$

$x = -12 \pm 8\sqrt{2}$

$a = -4 + 12 - 8\sqrt{2}$

$a = 8 - 8\sqrt{2}$

$B(-12 + 8\sqrt{2}; 8 - 8\sqrt{2})$

т.к. $-1 < -12 + 8\sqrt{2} < 0$

Хотя бы одно решение у системы будет при $a \in (8 - 8\sqrt{2}; 4]$

Ответ: $(8 - 8\sqrt{2}; 4]$

18.4. 3) ЕГЭ-2014

a - ? хотя бы один корень на $[3; 4]$

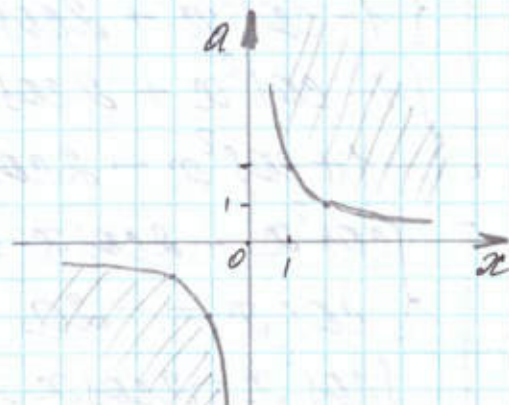
$$\begin{cases} ax \geq 2 \\ \sqrt{x-1} > a \\ 3x \leq 2a+11 \end{cases}$$

(1) $ax \geq 2$

При $x=0$ получаем $0 \geq 2$ неверно.

При $x > 0$ $a \geq \frac{2}{x}$

При $x < 0$ $a \leq \frac{2}{x}$

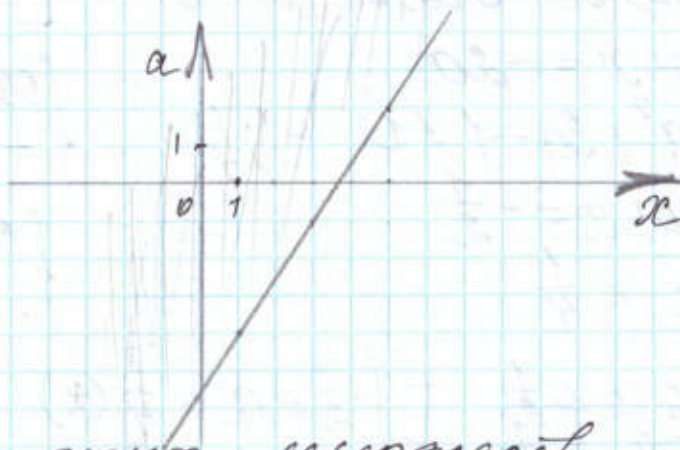


(2) $a < \sqrt{x-1}$

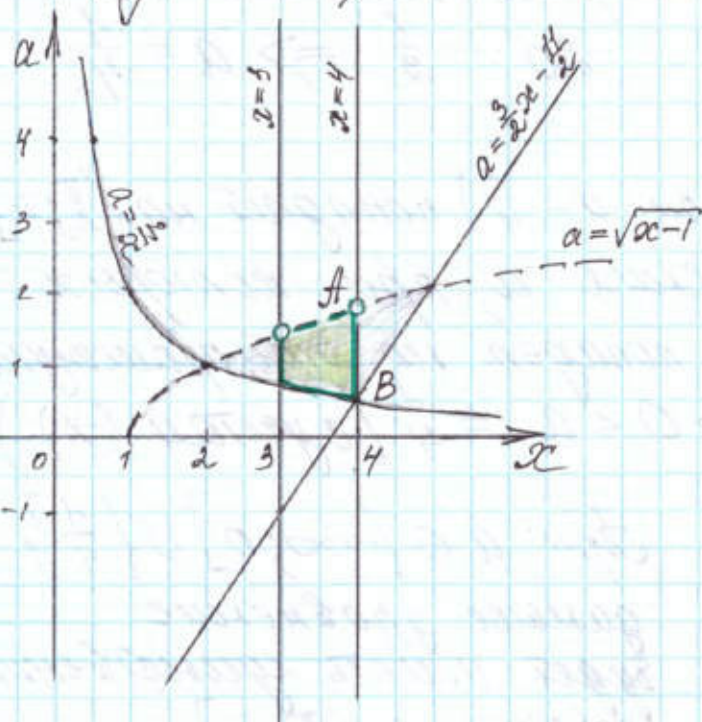


(3) $2a \geq 3x-11$

$a \geq \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$



Найдём пересечение этих множеств



A: $\begin{cases} x=4 \\ a=\sqrt{x-1} \end{cases} \Rightarrow a=\sqrt{3}$

B: $\begin{cases} x=4 \\ a=\frac{3}{2}x - \frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

хотя бы одно решение будет при $a \in [\frac{1}{2}; \sqrt{3})$.

Ответ: $[\frac{1}{2}; \sqrt{3})$

18.4. 4) ЕГЭ - 2013

a - ? единственный корень на $(\frac{\pi}{2}; \pi]$
 $|\sin^2 x + 2\cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$

$$\begin{cases} 1 - \cos^2 x + 2\cos x + a \geq 0 \\ 1 - \cos^2 x + 2\cos x + a = 1 - \cos^2 x + \cos x - a \\ 1 - \cos^2 x + 2\cos x + a < 0 \\ -1 + \cos^2 x - 2\cos x - a = 1 - \cos^2 x + \cos x - a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 x - 2\cos x \leq a + 1 \\ \cos x = -2a \\ \cos^2 x - 2\cos x > a + 1 \\ 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2 + 4a - a - 1 \leq 0 \\ \cos x = -2a \\ \cos^2 x - 2\cos x > a + 1 \\ \begin{cases} \cos x = 2 \text{ нет реш.} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = -2a \\ 4a^2 + 3a - 1 \leq 0 \quad -1; \frac{1}{4} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \\ a < \frac{1}{4} \end{cases}$$

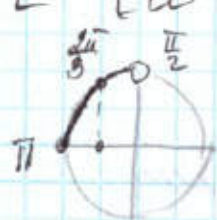
$$\begin{cases} \cos x = -2a \\ -1 \leq a \leq \frac{1}{4} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \\ a < \frac{1}{4} \end{cases} \begin{cases} -1 \leq -2a \leq 1 \\ -1 \leq a \leq \frac{1}{4} \\ \cos x = -2a \\ \cos x = -\frac{1}{2} \\ a < \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{4} \\ -1 \leq a \leq \frac{1}{4} \\ \cos x = -2a \\ \cos x = -\frac{1}{2} \\ a < \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{4} (*) \\ \cos x = -2a \\ \cos x = -\frac{1}{2} \\ a < \frac{1}{4} \end{cases}$$

Проверим совпадение решений:

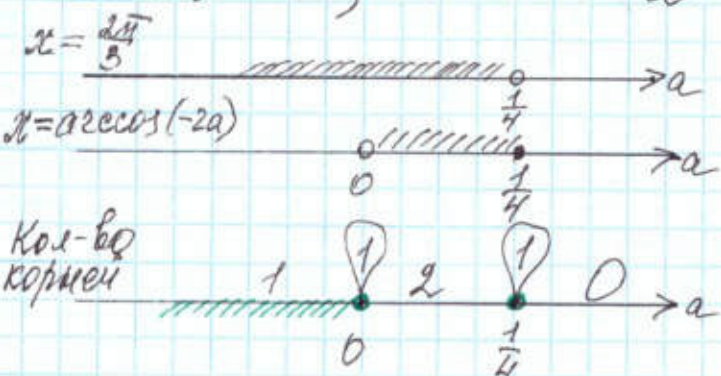
$$-2a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$



Корень $x = \frac{2\pi}{3}$ (при $a < \frac{1}{4}$) попадает на $(\frac{\pi}{2}; \pi]$

Найдем те значения a , при которых и второй корень попадет на этот промежуток.

$$-1 \leq -2a < 0; \quad 0 < a \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < a \leq \frac{1}{4} \text{ (с учетом (*))}$$



При $a \in (-\infty; 0] \cup \{\frac{1}{4}\}$ данное уравнение будет иметь единственный корень на $(\frac{\pi}{2}; \pi]$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \{\frac{1}{4}\}$

18.4. 5) ЕГЭ - 2012

a - ? не имеет решений на $[a-6; a]$

$$|x^2 - 8x + a + 5| > 10.$$

$$\begin{cases} x^2 - 8x + a + 5 > 10 \\ x^2 - 8x + a + 5 < -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 8x - 5 + a > 0 \\ x^2 - 8x + 15 + a < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > -(x^2 - 8x - 5) \\ a < -(x^2 - 8x + 15) \end{cases}$$

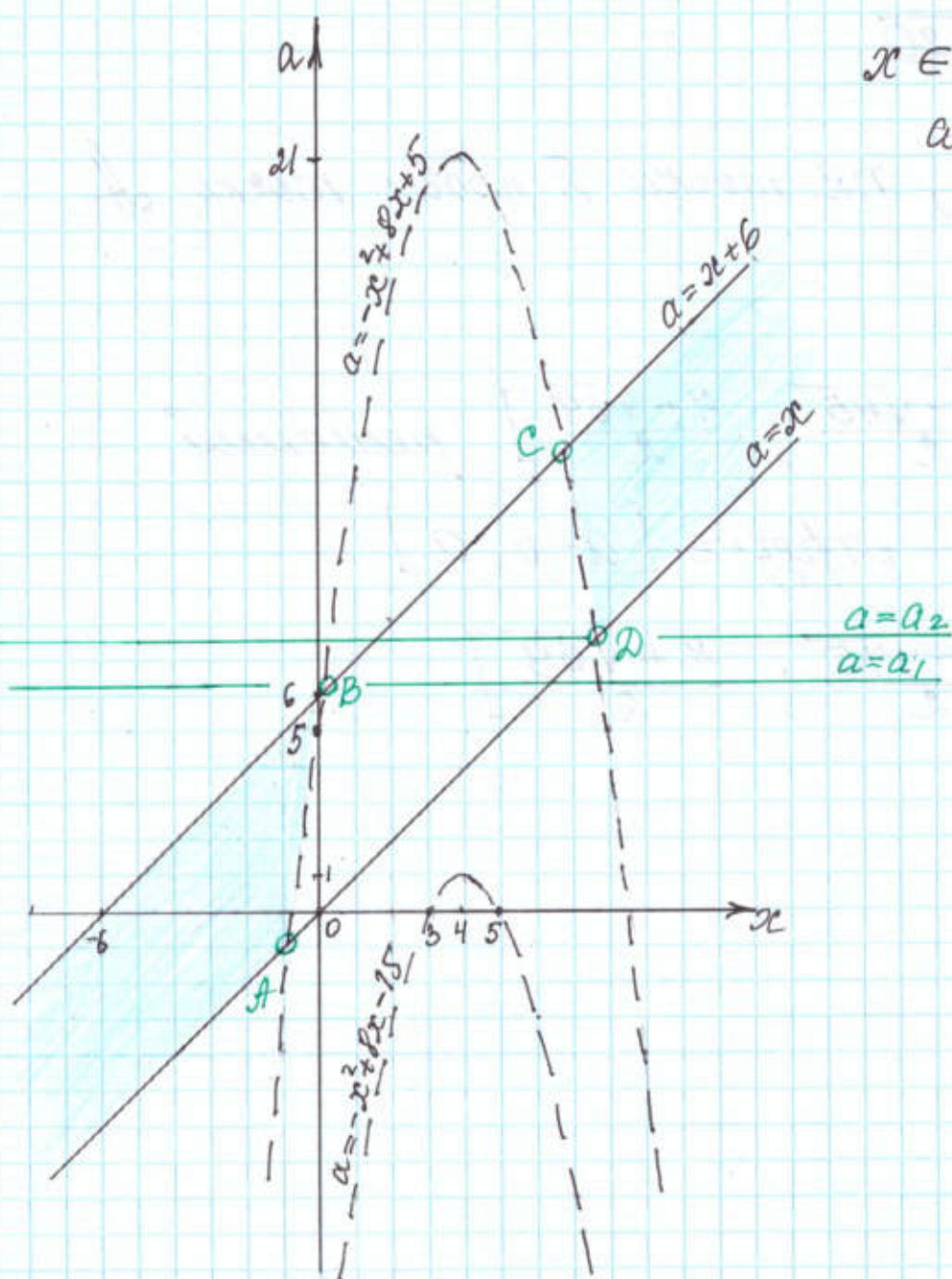
$$\begin{cases} a > -(x-4)^2 + 21 \\ a < -(x-4)^2 + 1 \end{cases}$$

$$a(x) = -(x-4)^2 + 21$$

парабола, ветви вниз
(4; 21) вершина; (0; 5)

$$a(x) = -(x-4)^2 + 1$$

парабола, ветви вниз
(4; 1) вершина; (0; -15).



$$x \in [a-6; a]$$

$$a-6 \leq x \leq a$$

$$\begin{cases} a \leq x+6 \\ a \geq x \end{cases}$$

На рисунке
выделено мн-во
точек плоскости,
при которых
решения есть.
Для $a_1 \leq a \leq a_2$
решений нет.
Найдем a_1 и a_2 .

$$B: -x^2 + 8x + 5 = x + 6$$

$$x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{45}}{2}$$

$$x = \frac{7 - \sqrt{45}}{2}, \text{ т.к. точка } B \text{ левее точки } C$$

$$a_1 = \frac{7 - \sqrt{45}}{2} + 6 = \frac{7 - \sqrt{45} + 12}{2} = \frac{19 - \sqrt{45}}{2}$$

$$D: -x^2 + 8x + 5 = x$$

$$x^2 - 7x - 5 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 20}}{2}$$

$$x = \frac{7 + \sqrt{69}}{2}, \text{ т.к. точка } D \text{ правее точки } A.$$

$$a_2 = \frac{7 + \sqrt{69}}{2}$$

При $a \in \left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right]$ решений
не будет на отрезке $[a - 6; a]$.

Ответ: $\left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right]$

18.4. 23 1)

a - ? ровно 1 корень на $[1; 5]$

$$\sqrt{4-x} \cdot \ln(a^2 - x^2 + 4x - 3) = 0.$$

$$\begin{cases} 4-x=0 \\ a^2 - x^2 + 4x - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4 \\ a^2 - 16 + 16 - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4 \\ (a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3}) > 0 \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} \ln(a^2 - x^2 + 4x - 3) = 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - x^2 + 4x - 3 = 1 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - (x-2)^2 = 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{или } a \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$$

$$x=4$$

$$\begin{cases} a = x-2 \\ a = -x+2 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$A(4; 2) \quad a=2$$

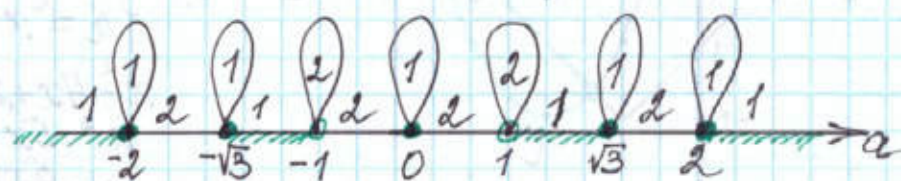
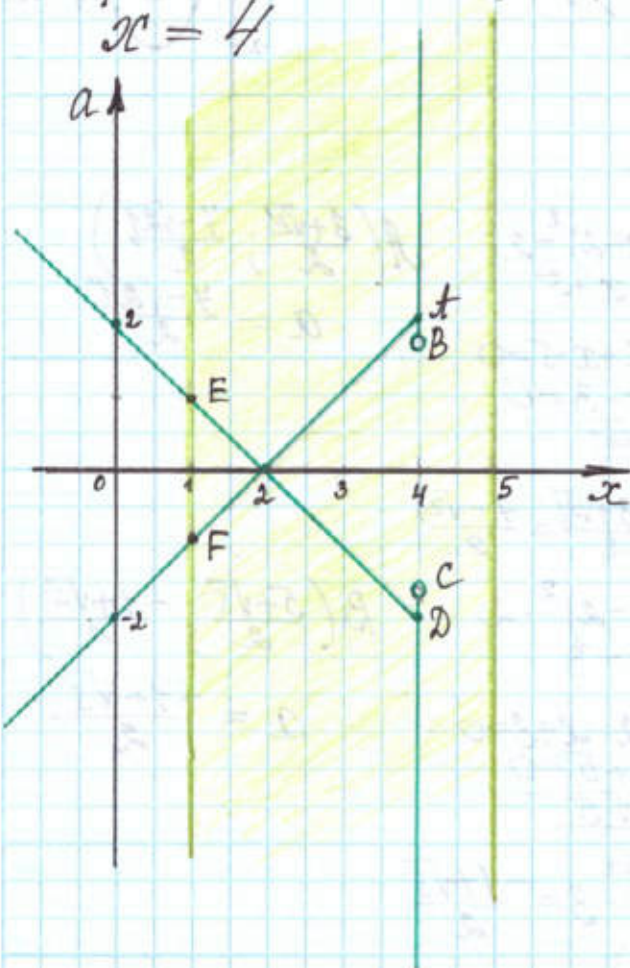
$$B(4; \sqrt{3}) \quad a=\sqrt{3}$$

$$C(4; -\sqrt{3}) \quad a=-\sqrt{3}$$

$$D(4; -2) \quad a=-2$$

$$E(1; 1) \quad a=1$$

$$F(1; -1) \quad a=-1$$



$$a \in (-\infty; -2] \cup [-\sqrt{3}; -1) \cup \{0\} \cup (1; \sqrt{3}] \cup [2; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [-\sqrt{3}; -1) \cup \{0\} \cup (1; \sqrt{3}] \cup [2; +\infty)$

18.4. ДЗ 2)

a - ? хотя бы 1 корень на $[1; 4]$

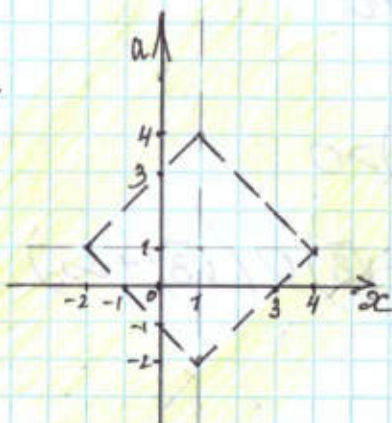
$$\begin{cases} |x-1| + |a-1| > 3 \\ x^2 + 2 \leq a + 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a-1| > 3 - |x-1| \\ a \geq x^2 - 4x + 2 \end{cases}$$

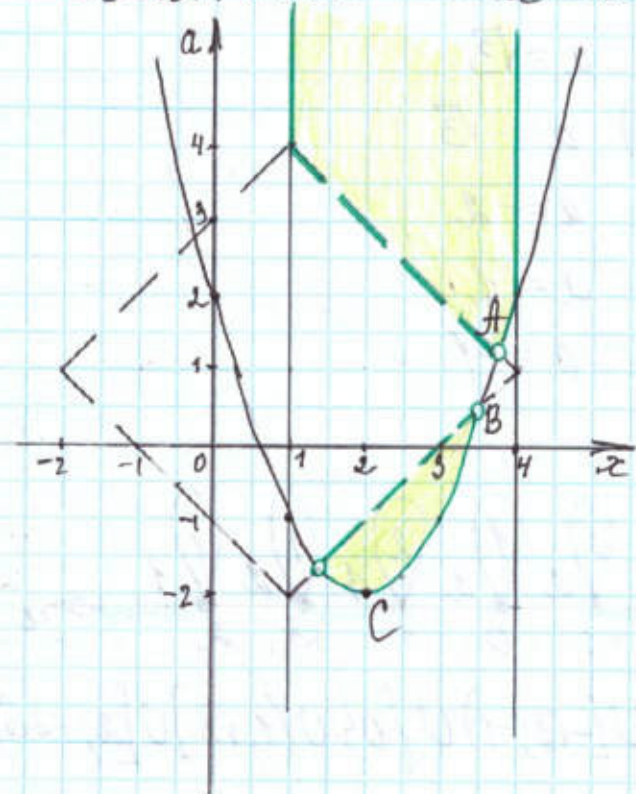
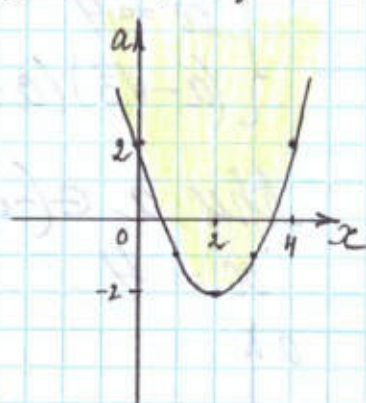
$$\begin{cases} |a-1| > 4-x, \text{ если } x \geq 1 & (1) \\ |a-1| > 2+x, \text{ если } x < 1 & (2) \\ a \geq (x-2)^2 - 2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} a-1 \geq 0 \\ x \geq 1 \\ a-1 > 4-x \\ a-1 < 0 \\ x \geq 1 \\ -a+1 > 4-x \\ a-1 \geq 0 \\ x < 1 \\ a-1 > 2+x \\ a-1 < 0 \\ x < 1 \\ -a+1 > 2+x \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 1 \\ x \geq 1 \\ a > -x+5 \\ a < 1 \\ x \geq 1 \\ a < x-3 \\ a \geq 1 \\ x < 1 \\ a > x+3 \\ a < 1 \\ x < 1 \\ a < -x-1 \end{cases}$$



$$(2) a \geq (x-2)^2 - 2$$



$$A: \begin{cases} a = (x-2)^2 - 2 \\ a = -x+5 \end{cases}$$

$$A\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}; \frac{7-\sqrt{21}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 2 + x - 5 &= 0 \\ x^2 - 3x - 3 &= 0 \\ x &= \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

$$a = 5 - \frac{3+\sqrt{21}}{2} = \frac{7-\sqrt{21}}{2}$$

$$B: \begin{cases} a = (x-2)^2 - 2 \\ a = x-3 \end{cases}$$

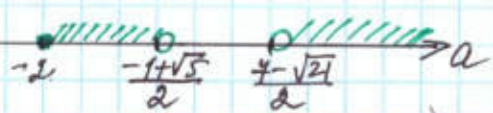
$$B\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 2 - x + 3 &= 0 \\ x^2 - 5x + 5 &= 0 \\ x &= \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$a = \frac{5+\sqrt{5}}{2} - 3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$C(2; -2)$$

хотя бы
один
корень



$$a \in \left[-2; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{7-\sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$$

Ответ: $\left[-2; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{7-\sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$

18.4. ДЗ 3)

a - ? хотя бы один корень на $[-3; -2]$

$$\begin{cases} ax - 4 \geq 0 \\ a + \sqrt{4x+17} \geq 0 \\ a - 1 < x \end{cases}$$

(1) $ax - 4 \geq 0$

$$ax \geq 4$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ a \geq \frac{4}{x} \end{cases}$$

(2) $a + \sqrt{4x+17} \geq 0$

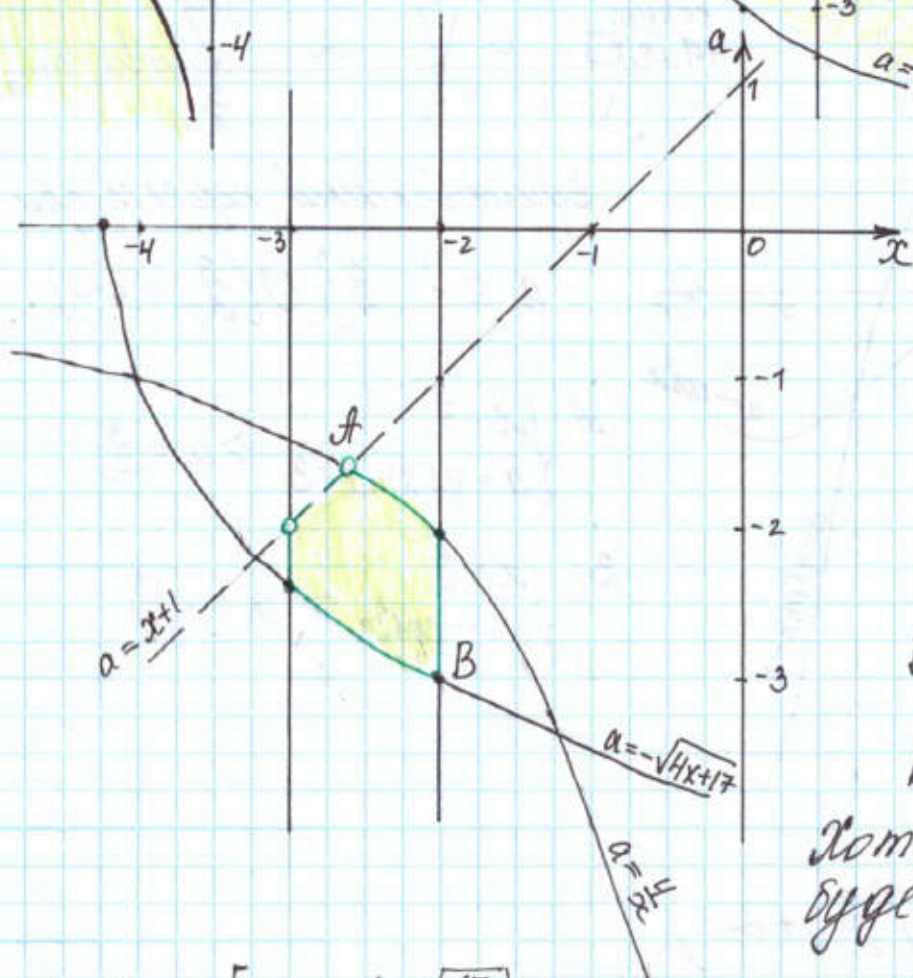
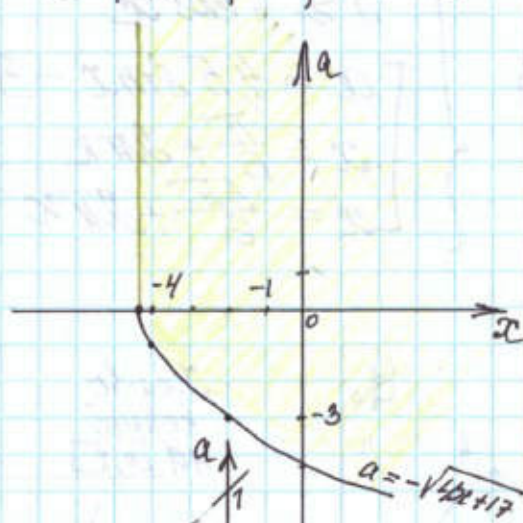
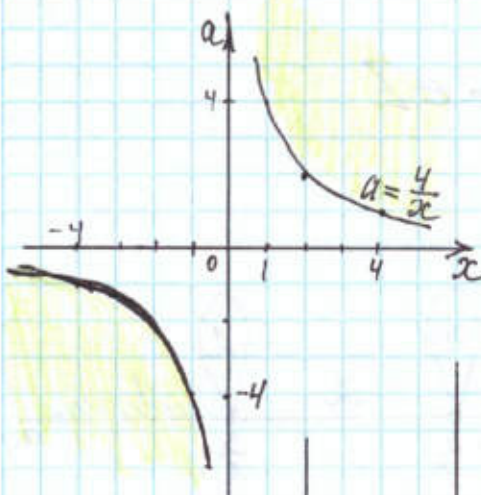
$$a \geq -\sqrt{4x+17}$$

$$x \geq -4\frac{1}{4}$$

x	$-4\frac{1}{4}$	-4	-3	-2	0
a	0	-1	$-\sqrt{5}$	-3	$-\sqrt{17}$

(3) $a - 1 < x$

$$a < x + 1$$



A: $\begin{cases} a = \frac{4}{x} \\ a = x + 1 \end{cases}$

$$4 = x^2 + x$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}, \quad x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$a = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} + 1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$$

A: $(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2})$; $a = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$

B: $\begin{cases} x = -2 \\ a = -\sqrt{4x+17} \end{cases}$

B: $(-2, -3)$ $a = -3$

хотя бы одно решение будет при $a \in [-3; \frac{1 - \sqrt{17}}{2}]$

Ответ: $[-3; \frac{1 - \sqrt{17}}{2}]$

18.4. З3 4)

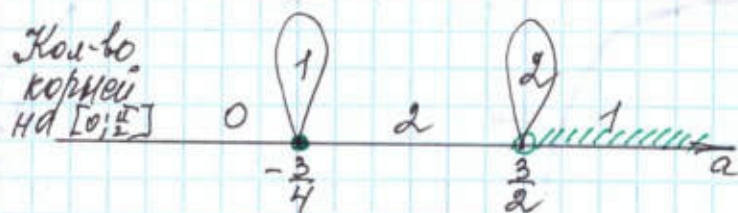
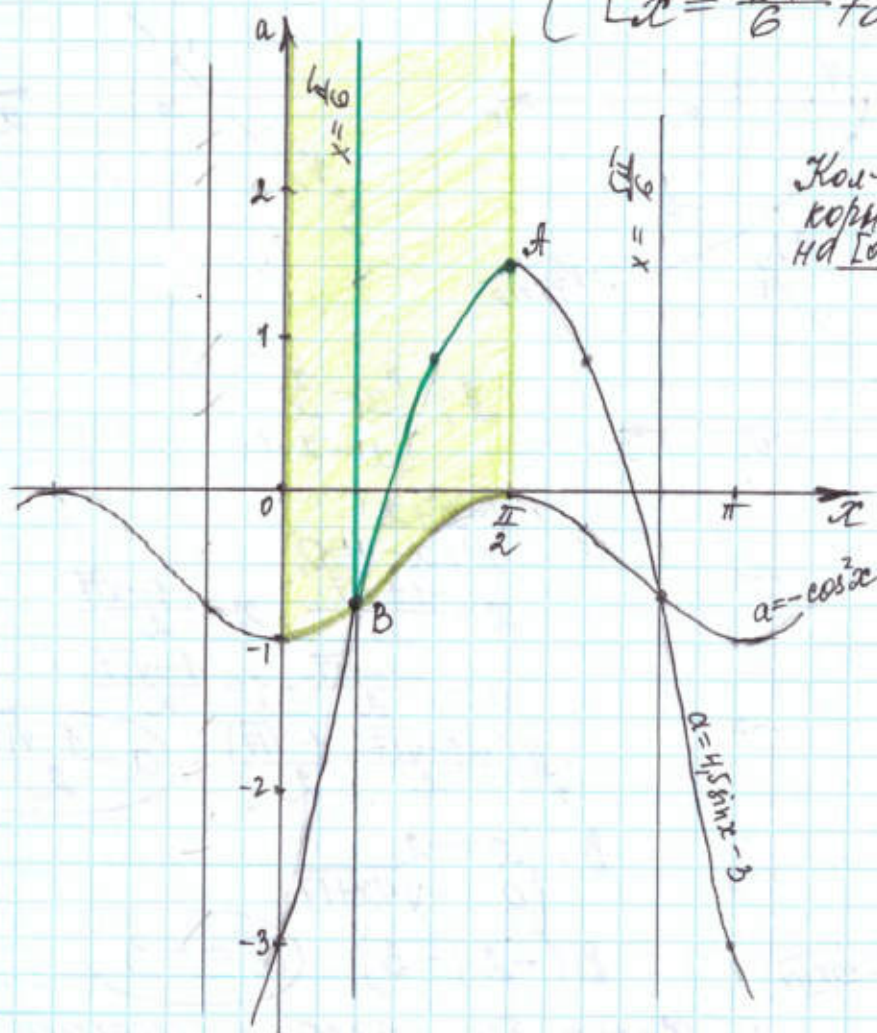
a - ? единств. корень на $[0; \frac{\pi}{2}]$

$$|\cos^2 x + 9\sin x - a - 6| = \cos^2 x + a$$

$$\begin{cases} \cos^2 x + a \geq 0 \\ \cos^2 x + 9\sin x - a - 6 = \cos^2 x + a \\ \cos^2 x + 9\sin x - a - 6 = -\cos^2 x - a \end{cases} \begin{cases} a \geq -\cos^2 x \\ a = 4,5\sin x - 3 \\ 2\cos^2 x + 9\sin x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq -\cos^2 x \\ a = 4,5\sin x - 3 \\ 2\sin^2 x - 9\sin x + 4 = 0 \end{cases} \sin x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4} \quad \begin{cases} \sin x = 4 \quad \emptyset \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq -\cos^2 x \\ a = 4,5\sin x - 3 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} a \geq -\cos^2 x \\ a = 4,5\sin x - 3 \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Единственный корень при
 $a \in \{-\frac{3}{4}\} \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$.

$$A: \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ a = 4,5\sin x - 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} \\ a = -\cos^2 x \Rightarrow a = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

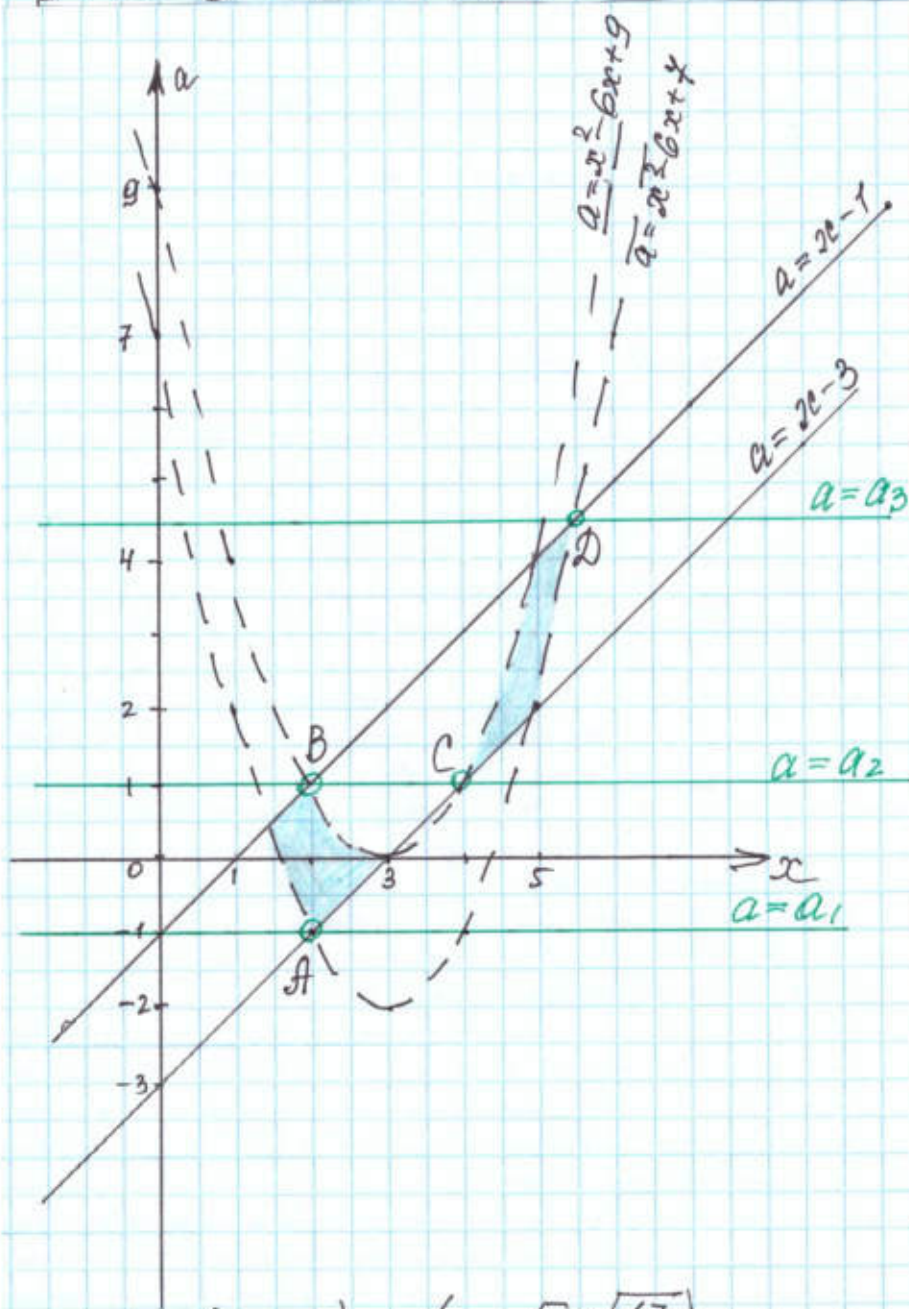
Ответ: $\{-\frac{3}{4}\} \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$.

18.4. (23)

5) а-? хотя бы одно решение на $[a+1; a+3]$
 $|x^2 - 6x - a + 8| < 1$.

$$\begin{cases} -1 < x^2 - 6x - a + 8 < 1 \\ a+1 \leq x \leq a+3 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 7 < a < x^2 - 6x + 9 \\ x-3 \leq a \leq x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)^2 - 2 < a < (x-3)^2 \\ x-3 \leq a \leq x-1 \end{cases}$$



$$a \in (-1; 1) \cup \left(1; \frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right)$$

Хотя бы одно
 решение будет,
 если $a \in (a_1; a_2) \cup (a_2; a_3)$

1) A: $x^2 - 6x + 7 = x - 3$
 $x^2 - 7x + 10 = 0$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=5 \end{cases} \quad \underline{x=2}$$

$$a_1 = 2 - 3 = -1, \quad \boxed{a_1 = -1}$$

A(2; -1)

2) B: $x^2 - 6x + 9 = x - 1$
 $x^2 - 7x + 10 = 0$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=5 \end{cases}$$

B(2; 1), C(4; 1)

$$\boxed{a_2 = 1}$$

3) D: $x^2 - 6x + 7 = x - 1$
 $x^2 - 7x + 8 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 32}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$a_3 = \frac{7 + \sqrt{17}}{2} - 1 = \boxed{\frac{5 + \sqrt{17}}{2}}$$

Ответ: $(-1; 1) \cup \left(1; \frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right)$

18.5. 1) ЕГЭ-2019

a - ? наименьшее значение функции
 $f(x) = x - 2|x| + |x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a|$
 больше - 4.

Если наименьшее значение функции больше -4,
 то $f(x) > -4$ должно выполняться $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) > -4$$

$$x - 2|x| + |x^2 - 2(a+1)x + a(a+2)| > -4$$

$$|x^2 - 2(a+1)x + a(a+2)| > 2|x| - x - 4.$$

Пусть $x^2 - 2(a+1)x + a(a+2) = g(x)$, тогда

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ |g(x)| > x - 4 \\ x < 0 \\ |g(x)| > -3x - 4. \end{cases}$$

$$y = x - 4$$

График - прямая

$$y = -3x - 4$$

График - прямая

$$y = g(x)$$

График - парабола
ветви вверх

$$\begin{cases} x = a \\ x = a + 2 \end{cases}$$

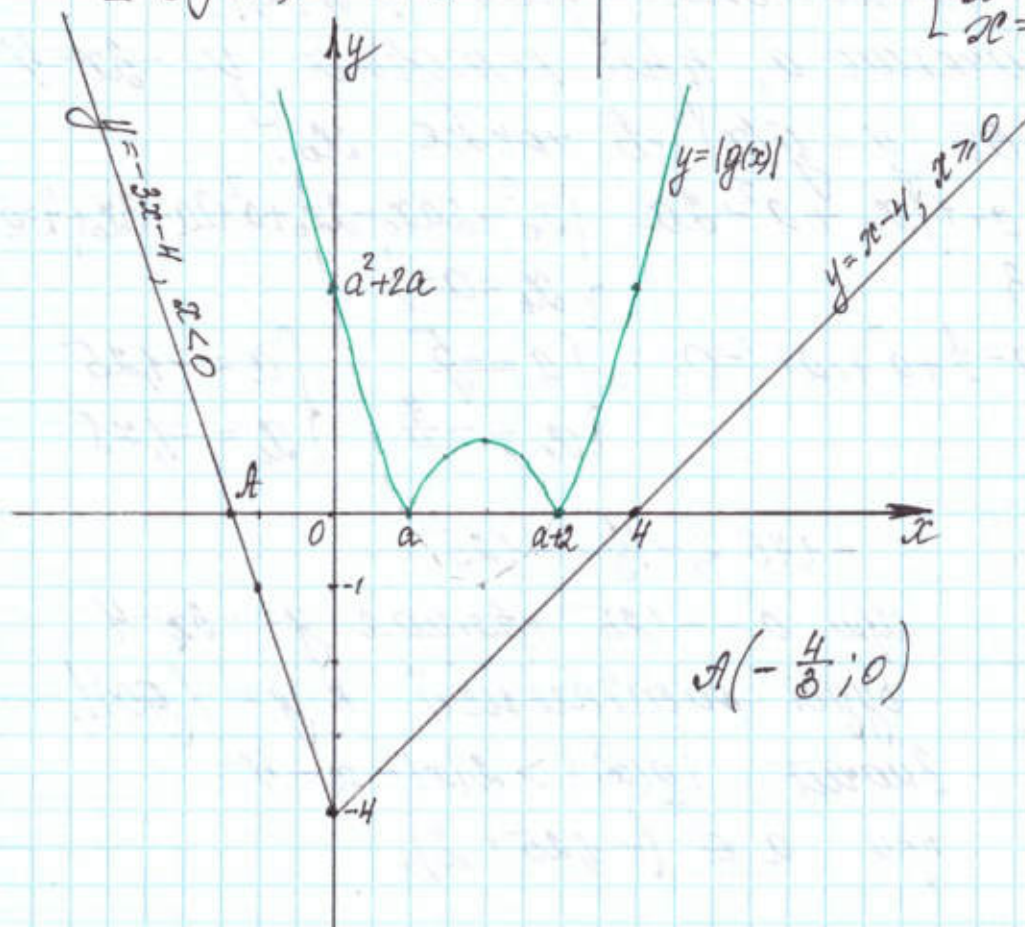


График $y = |g(x)|$
 подвижен, он
 будет сдвигаться
 вдоль оси Ox
 в зависимости
 от значений a .

$$A(-\frac{4}{3}; 0)$$

Найдем то значение a , при котором прямая $y = x - 4$ будет касаться $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0 .

$$\begin{cases} y(x_0) = g(x_0) \\ g'(x_0) = 1 \end{cases} \begin{cases} x_0 - 4 = x_0^2 - 2(a+1)x_0 + a^2 + 2a \\ 2x_0 - 2(a+1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0^2 - 2ax_0 - 2x_0 - x_0 + a^2 + 2a + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = a + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 3a + \frac{9}{4} - 2a(a + \frac{3}{2}) - 3(a + \frac{3}{2}) + a^2 + 2a + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = a + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 + 5a + \frac{9}{4} + 4 - 2a^2 - 3a - 3a - \frac{9}{2} = 0 \\ x_0 = a + \frac{3}{2} \end{cases} \begin{cases} a = \frac{7}{4} \\ x_0 = \frac{13}{4} \end{cases} \begin{cases} a = 1,75 \\ x_0 = 3,25 \end{cases}$$

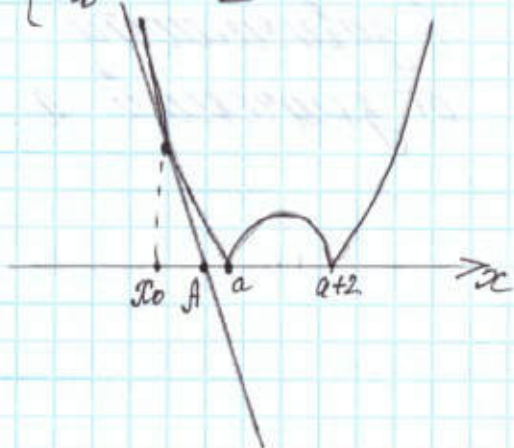
$$a + 2 = 3,75; a < x_0 < a + 2 \Rightarrow a + 2 < 4, \quad a < 2$$

Прямая $y = x - 4$ будет касательной для $g(x)$, но не будет касательной для $|g(x)|$.

Найдем то значение a , при котором $y = -3x - 4$ будет касаться $y = g(x)$ в точке x_0 .

$$\begin{cases} -3x_0 - 4 = x_0^2 - 2(a+1)x_0 + a^2 + 2a \\ 2x_0 - 2(a+1) = -3 \end{cases} \begin{cases} x_0^2 - 2ax_0 - 2x_0 + a^2 + 2a + 3x_0 + 4 = 0 \\ x_0 = a - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - a + \frac{1}{4} - 2a^2 + a + a - \frac{1}{2} + a^2 + 2a + 4 = 0 \\ x_0 = a - \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} a = -\frac{5}{4} \\ x_0 = -\frac{7}{4} \end{cases} \begin{cases} a = -1,25 \\ x_0 = -1,75 \end{cases}$$



$$-1,75 < -1\frac{1}{3} < -1,25$$

При $a = -1,25$ прямая $y = -3x - 4$

будет касательной к $y = |g(x)|$.

Значит $|g(x)| > 2|x| - x - 4$

при $a \in (-1,25; 2)$.

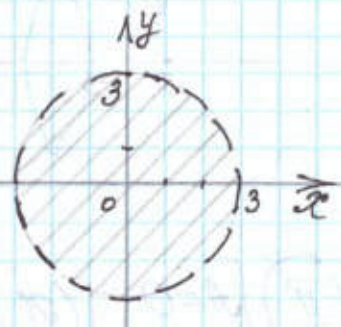
Ответ: $(-1,25; 2)$

18.5. 2) ЕГЭ-2018

a - ? 2 различных решения

$$\begin{cases} ((x+5)^2 + y^2 - a^2) \cdot \ln(9 - x^2 - y^2) = 0 \\ ((x+5)^2 + y^2 - a^2) \cdot (x+y+5-a) = 0 \end{cases}$$

ОДЗ: $9 - x^2 - y^2 > 0$ Внутренняя часть круга / без границы
 $x^2 + y^2 < 9$
 $(0;0)$ -центр, $R=3$



Пусть $A = (x+5)^2 + y^2 - a^2$

$B = \ln(9 - x^2 - y^2)$

$C = x + y + 5 - a$

1. $A=0$; $(x+5)^2 + y^2 = a^2$. Окружность; $(-5;0)$ -центр
 $R=|a|$

2. $B=0$; $\ln(9 - x^2 - y^2) = 0$

$9 - x^2 - y^2 = 1$

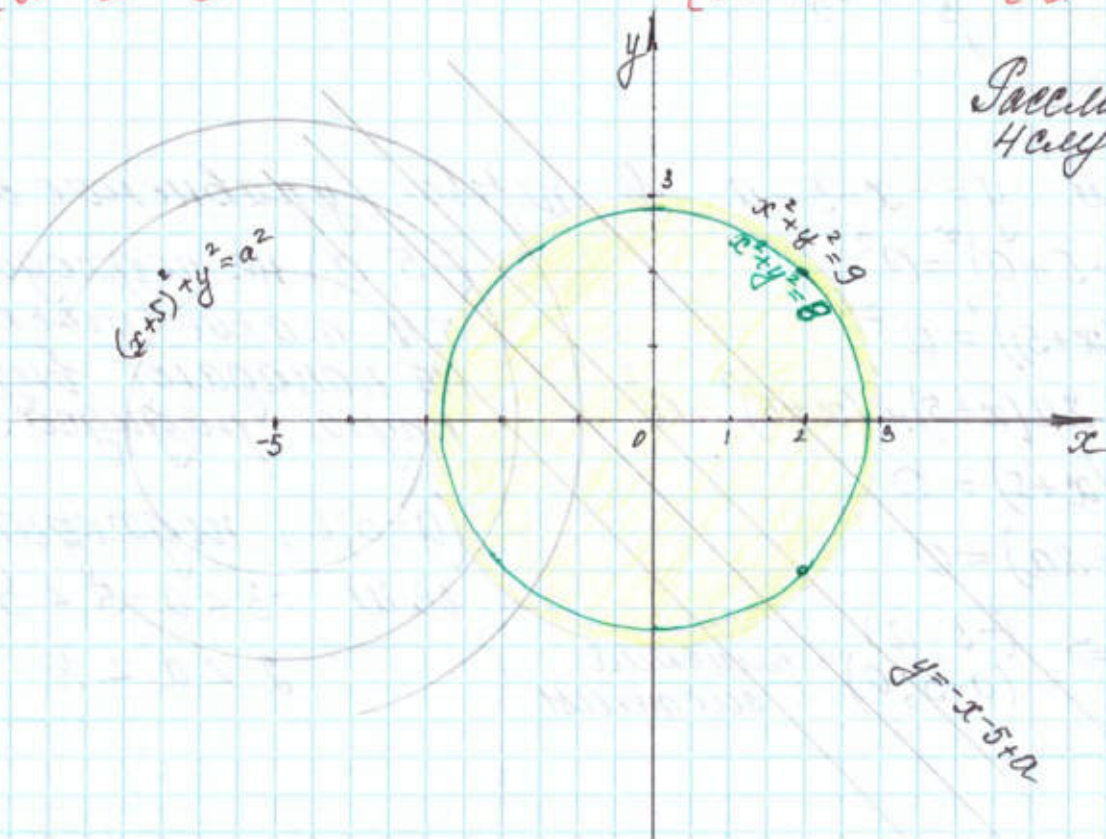
$x^2 + y^2 = 8$. Окружность; $(0;0)$ -центр
 $R=2\sqrt{2}$

3. $C=0$; $x + y + 5 - a = 0$

$y = -x - 5 + a$. Прямая; $k=-1$; $(0; a-5)$.

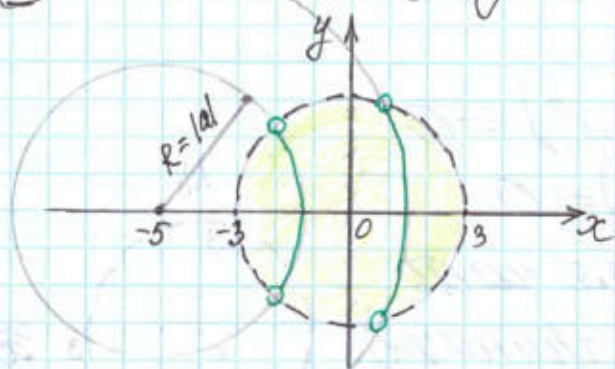
$\begin{cases} A \cdot B = 0 \\ A \cdot C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A=0 \text{ или } \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A=0 \\ C=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} B=0 \\ C=0 \end{cases}$

$\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A=0 \\ C=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} B=0 \\ C=0 \end{cases}$



Рассмотрим эти фигуры отдельно.

① $A=0$; $(x+5)^2 + y^2 = a^2$

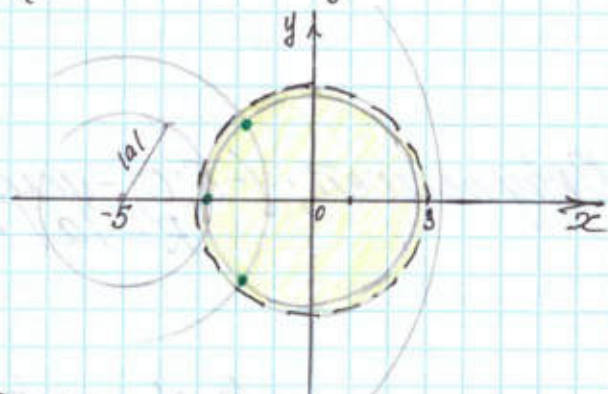


В этом случае:

а) нет решений при $\begin{cases} |a| \leq 2 \\ |a| \geq 8 \end{cases}$

б) бесконечно много решений при $2 < |a| < 8$.

② $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \begin{cases} (x+5)^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$



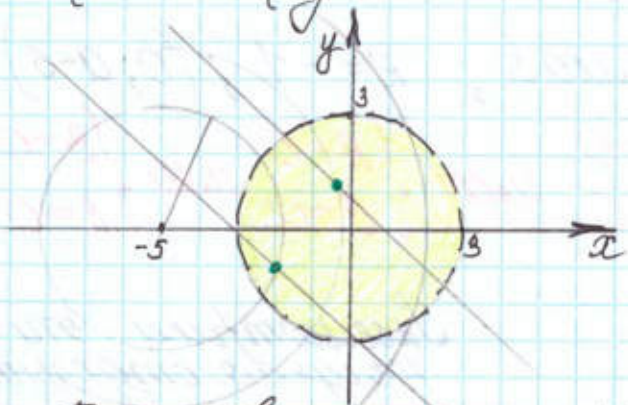
В этом случае:

а) нет решений при $\begin{cases} |a| < 5 - 2\sqrt{2} \\ |a| > 5 + 2\sqrt{2} \end{cases}$

б) одно решение при $|a| = 5 \pm 2\sqrt{2}$

в) два различных решения при $5 - 2\sqrt{2} < |a| < 5 + 2\sqrt{2}$.

③ $\begin{cases} A=0 \\ C=0 \end{cases} \begin{cases} (x+5)^2 + y^2 = a^2 \\ y = -x - 5 + a \end{cases}$



В этом случае:

а) нет решений при $\begin{cases} a \leq 2 \\ a \geq 8 \end{cases}$

б) одно решение при $2 < a < 8$

Подставим $y = -x - 5 + a$ в первое уравнение системы:

$$(x+5)^2 + (-x-5+a)^2 = a^2$$

$$(x+5)^2 + (a-(x+5))^2 = a^2$$

$$(x+5)^2 + a^2 - 2a(x+5) + (x+5)^2 = a^2$$

$$2(x+5)^2 - 2a(x+5) = 0$$

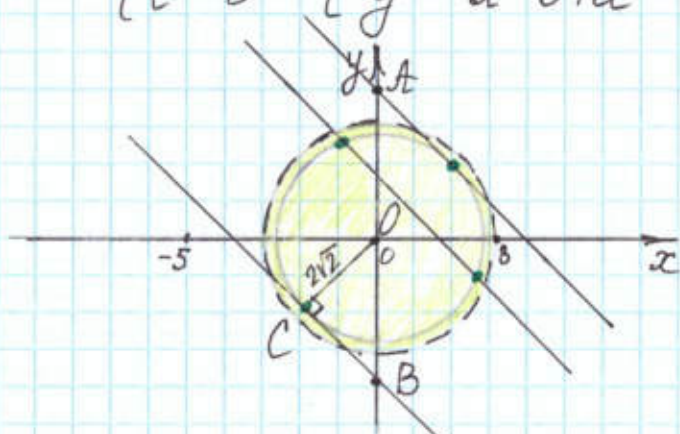
$$(x+5)(x+5-a) = 0$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ x = a - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (-5; a) \\ (a-5; 0) \end{matrix} - \text{решения системы}$$

$(-5; a)$ не подходит, т.к. такие точки не попадают внутрь круга радиуса 3.

$(a-5; 0)$ подходит, если $-3 < a-5 < 3$
 $2 < a < 8$

IV $\begin{cases} B=0 \\ C=0 \end{cases} \begin{cases} x^2+y^2=8 \\ y=-x-5+a \end{cases}$



В этом случае:

а) нет решений при $\begin{cases} a < 1 \\ a > 9 \end{cases}$

б) одно решение при $\begin{cases} a = 1 \\ a = 9 \end{cases}$

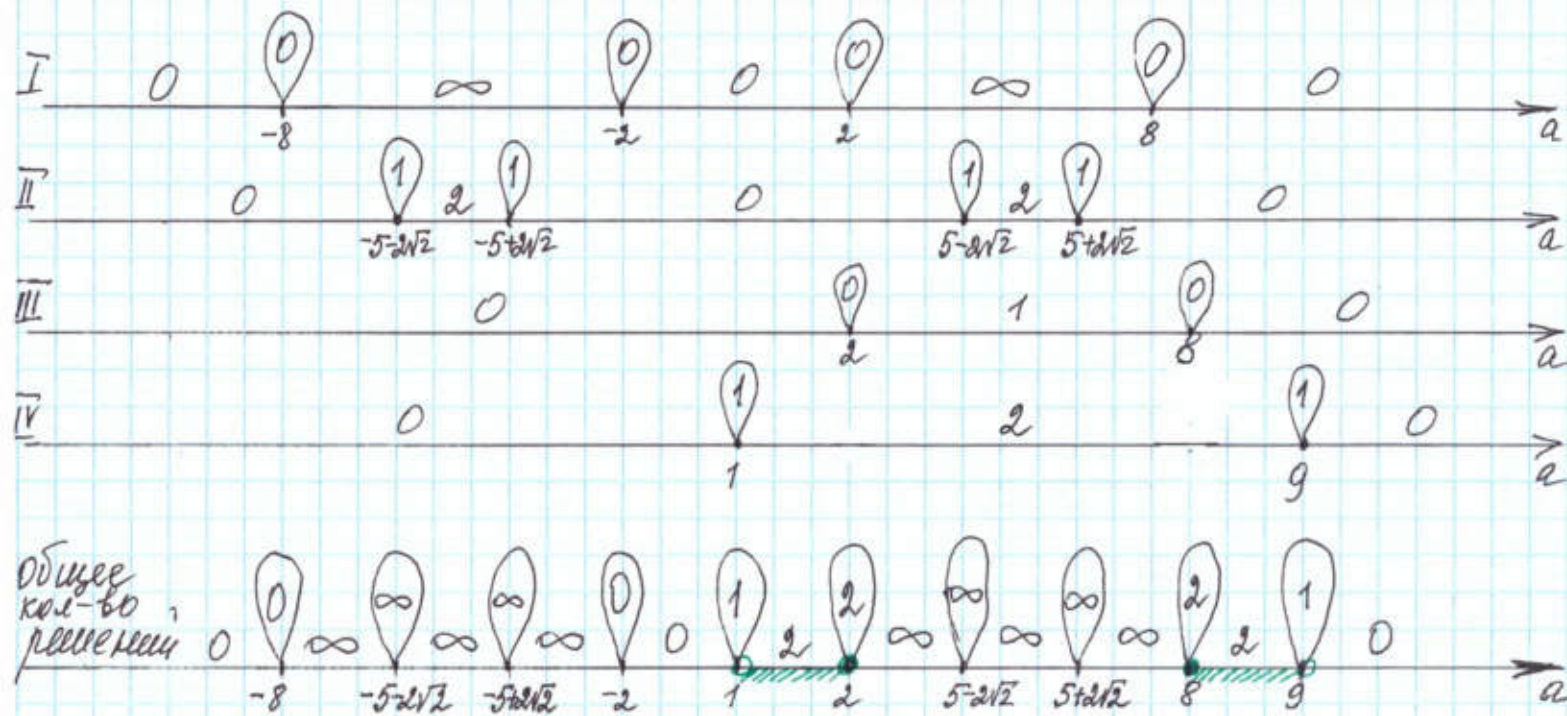
в) два решения при $1 < a < 9$

$\triangle OBC: \angle C = 90^\circ, OC = 2\sqrt{2}; \angle COB = 45^\circ \Rightarrow OB = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4.$

$B(0; -4); y = -x - 5 + a; -4 = 0 - 5 + a, a = 1$

$A(0; 4); y = -x - 5 + a; 4 = 0 - 5 + a, a = 9.$

Объединяем все случаи вместе.



$a \in (1; 2] \cup [8; 9).$

Ответ: $(1; 2] \cup [8; 9).$

18.5. 3) ЕГЭ - 2016

a - ? ровно 2 различных решения

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ax \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy(y-3) - 3(y-3) = 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

$$x+3 > 0$$

$$\begin{cases} y = ax \end{cases}$$

$$\begin{cases} (xy-3)(y-3) = 0 \\ x > -3 \\ y = ax \end{cases}$$

$$x > -3$$

$$\begin{cases} y = ax \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy-3=0 \\ y-3=0 \\ x > -3 \\ y = ax \end{cases}$$

$$x > -3$$

$$\begin{cases} y = ax \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ y = 3 \\ x > 3 \\ y = ax \end{cases}$$

$$A(-3; -1)$$

$$y = ax$$

$$-1 = a \cdot (-3)$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$B(1; 3)$$

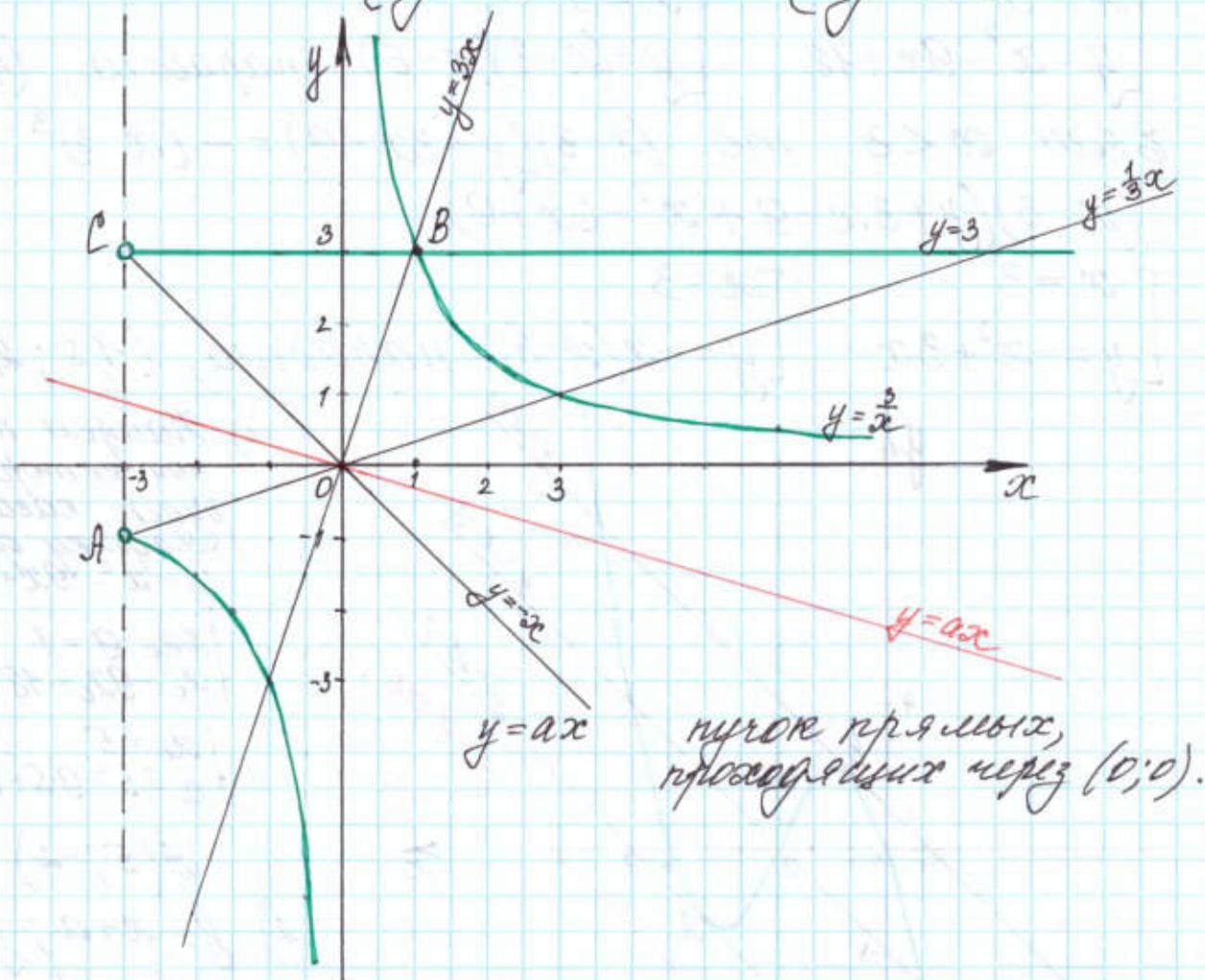
$$3 = 1 \cdot a$$

$$a = 3$$

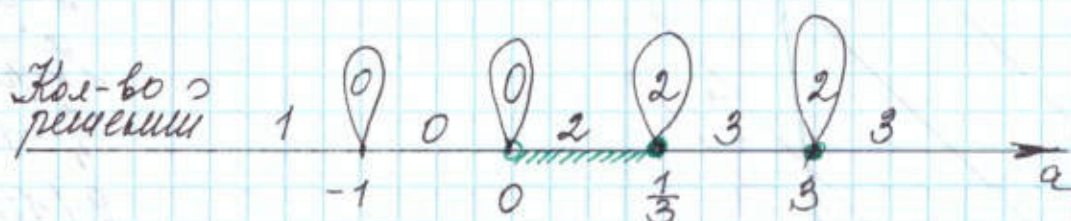
$$C(-3; 3)$$

$$3 = a \cdot (-3)$$

$$a = -1$$



пучок прямых, проходящих через (0;0).



Ровно 2 решения при $a \in [0; \frac{1}{3}] \cup \{3\}$

Ответ: $[0; \frac{1}{3}] \cup \{3\}$

18.5. 4) ЕГЭ - 2016

a - ? ровно 4 различных решения

$$(x-3)(y+3x-9) = |x-3|^3$$

$$\begin{cases} y = x + a \end{cases}$$

Если $x \geq 3$, то $(x-3)(y+3x-9) = (x-3)^3$,

$$(x-3)(y+3x-9-(x-3)^2) = 0$$

$$(x-3)(y+3x-9-x^2+6x-9) = 0.$$

$$\begin{cases} x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 9x + 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \end{cases}$$

$y = (x-3)(x-6)$ - парабола, $(4,5; -2,25)$ верш.

Если $x < 3$, то $(x-3)(y+3x-9) = -(x-3)^3$

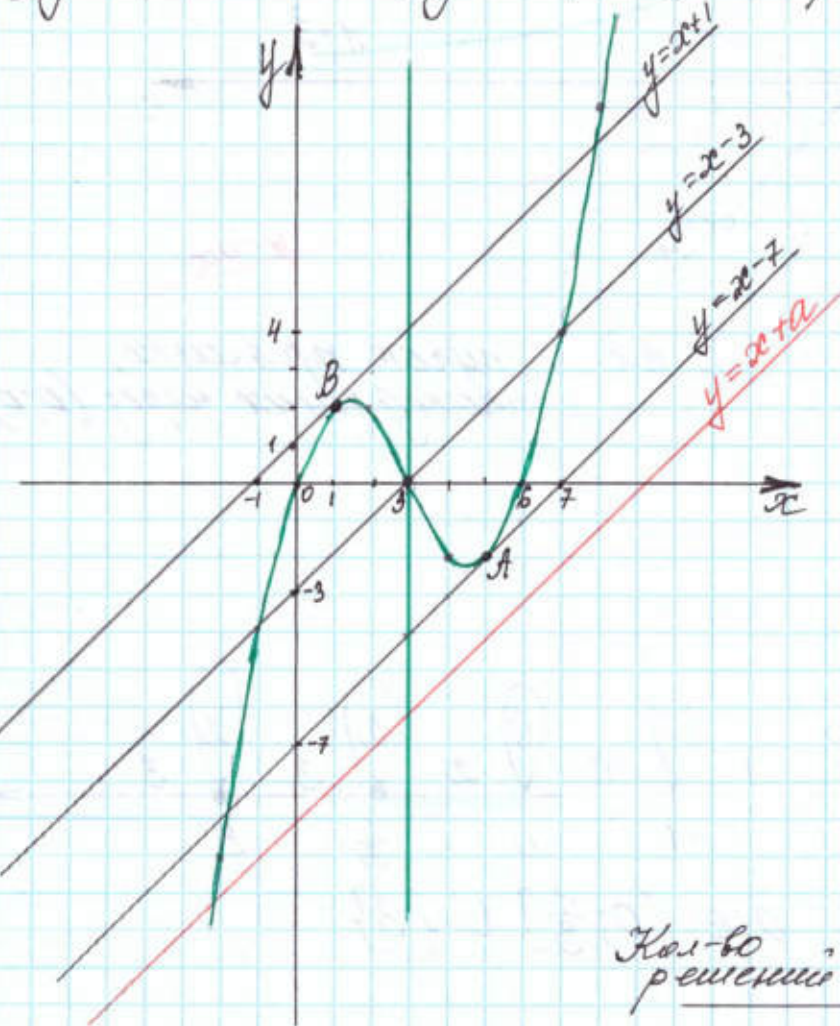
$$(x-3)(y+3x-9+x^2-6x+9) = 0$$

$$\begin{cases} x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \end{cases}$$

$y = -x(x-3)$ - парабола, $(1,5; 2,25)$ верш.



1) Найдем то значение a , при котором $y = x + a$ будет касательной к графику функции $y = x^2 - 9x + 18$ в точке x_0 .

$$\begin{cases} 2x_0 - 9 = 1 \\ x_0^2 - 9x_0 + 18 = x_0 + a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 5 \\ a = 5^2 - 9 \cdot 5 + 18 - 5; \quad \boxed{a = -7} \end{cases}$$

$$A(5; -2)$$

2) $y = x + a; y = -x^2 + 3x$.

$$x + a = -x^2 + 3x$$

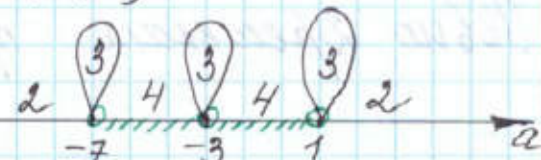
$$x^2 - 2x + a = 0$$

1 корень, если $D = 0$.

$$\frac{D}{4} = 1 - a; 1 - a = 0, \quad \boxed{a = 1}$$

$$B(1; 2)$$

Кол-во решений



$$a \in (-7; -3) \cup (-3; 1)$$

Ответ: $(-7; -3) \cup (-3; 1)$

18.5. 5) ЕГЭ - 2015

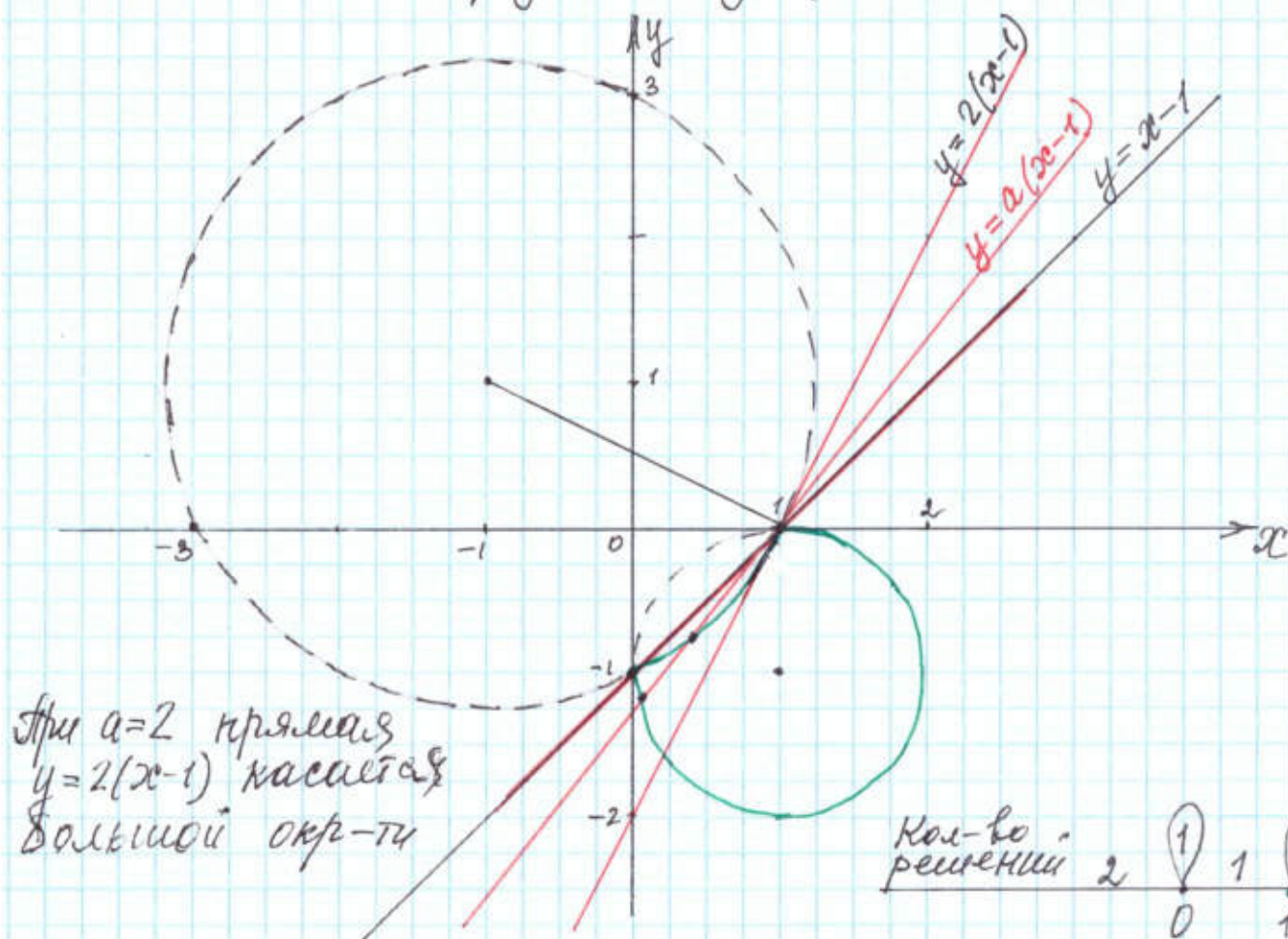
a - ? более двух решений

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = |x^2 + y^2 - 1| \\ y = a(x - 1) \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} 2x - 2y - 2 \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 2x - 2y - 2 \\ x^2 + y^2 - 1 = -2x + 2y + 2 \end{cases} \end{cases} \begin{cases} y \leq x - 1 \\ \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + 2y = -1 \\ x^2 + 2x + y^2 - 2y = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x - 1 \\ \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 & \text{окружность, } (1; -1) \text{ - центр, } r = 1 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 5 & \text{окружность, } (-1; 1) \text{ - центр, } R = \sqrt{5} \end{cases} \end{cases}$$

(2) $y = a(x - 1)$ пучок прямых, проходящих через точку $(1; 0)$.



Кол-во решений	2	1	2	3	2	2
	0	1	2	3	2	2
						a

Более двух решений при $a \in (1; 2)$.

Ответ: $(1; 2)$.

18.6. 1) ЕГЭ-2015

a - ? единственное решение

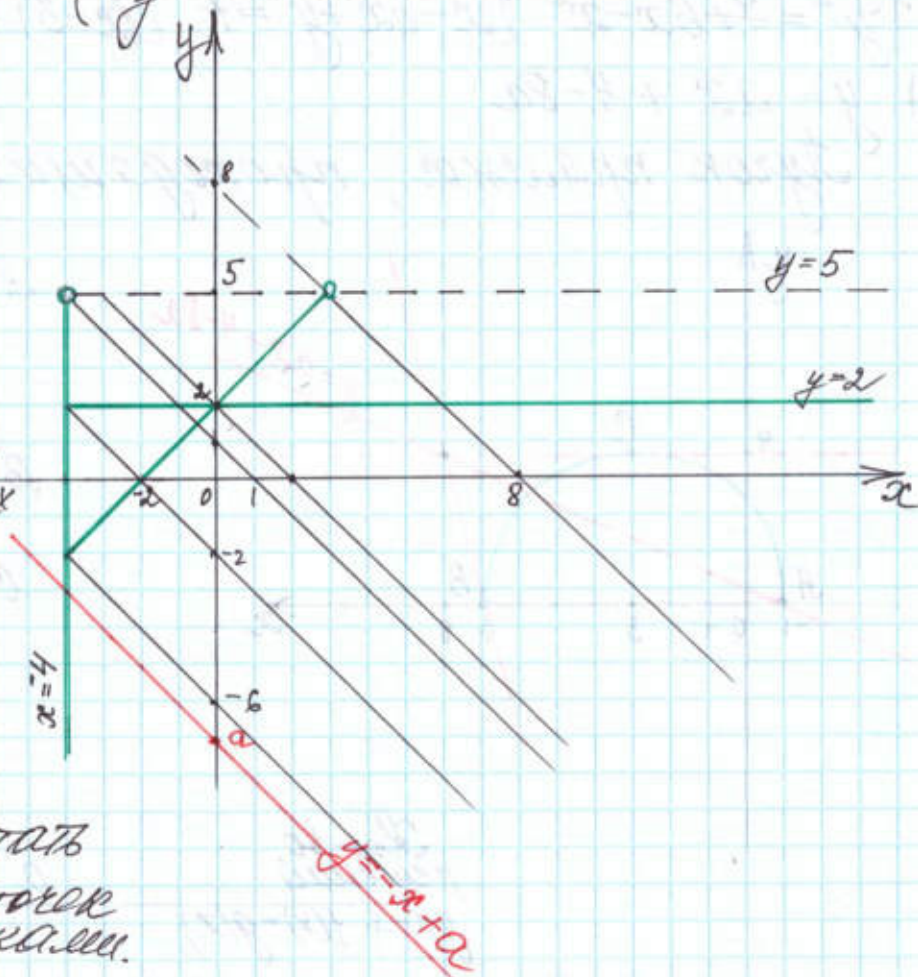
$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy - 4y + 2x + 4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}} = 0 \\ a = x+y \end{cases}$$

Найдем ограничения на переменные x, y :

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 5-y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ y < 5 \end{cases}$$

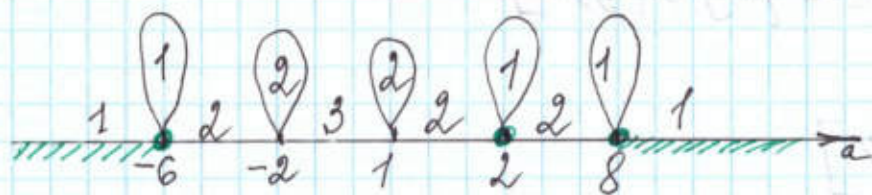
$$\begin{cases} y^2 - xy - 4y + 2x + 4 = 0 \\ x+4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - (x+4)y + (2+x) \cdot 2 = 0 \\ x = -4 \\ y = a - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x+2 \\ y = 2 \\ x = -4 \\ y = a-x \end{cases}$$



Множество точек координатной пары x, y , удовлетворяющих совокупности, выделено зеленым цветом.

Будем двигать прямую $y = -x + a$ снизу вверх и считать количество общих точек с зелеными точками.



$$a \in (-\infty; -6] \cup \{2\} \cup [8; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -6] \cup \{2\} \cup [8; +\infty)$

18.6 2) ЕГЭ - 2013

a - ? единственное решение.

$$8a + \sqrt{7+6x-x^2} = ax+4.$$

$$\sqrt{7+6x-x^2} = ax+4-8a$$

Построим графики функций

$$y=f(x), \text{ где } f(x)=\sqrt{7+6x-x^2} \text{ и}$$

$$y=g(x), \text{ где } g(x)=ax+4-8a, \text{ затем}$$

решим уравнение $f(x)=g(x)$.

1) $y=\sqrt{7+6x-x^2}$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 7+6x-x^2 \end{cases}$$

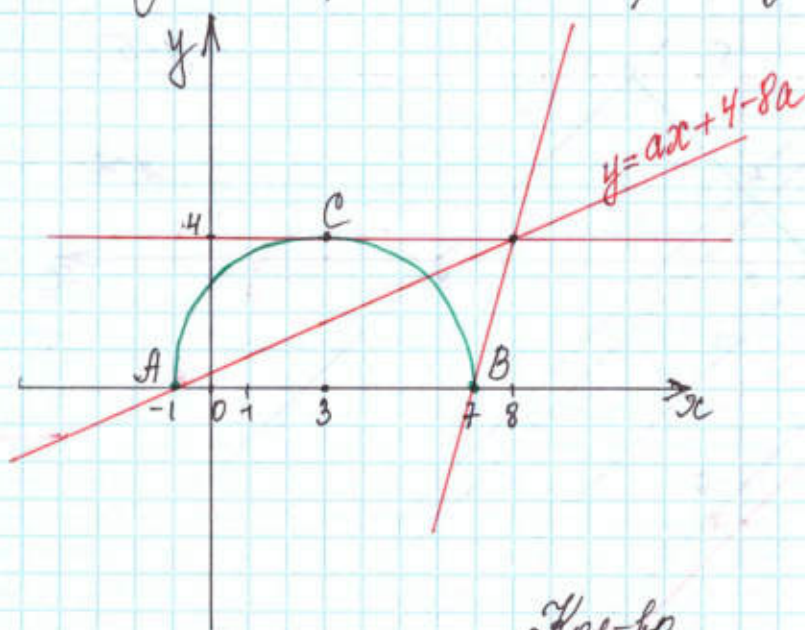
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2-6x+y^2=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ (x-3)^2+y^2=16 \end{cases}$$

Окружность
(3;0) центр
 $R=4$.

2) $y=ax+4-8a$

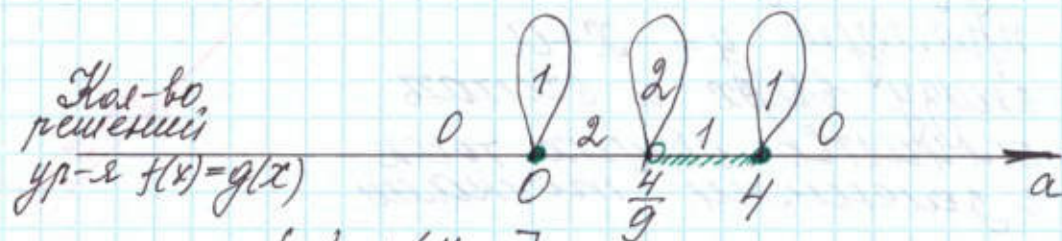
Линия прямая, проходящая через точку (8;4)



$A(-1;0) \quad 0 = -a+4-8a$
 $9a=4$
 $a=\frac{4}{9}$

$B(7;0) \quad 0 = 7a+4-8a$
 $a=4$

$C(3;4) \quad 4 = 3a+4-8a$
 $5a=0$
 $a=0$.



$$a \in \{0\} \cup \left(\frac{4}{9}; 4\right]$$

Ответ: $\{0\} \cup \left(\frac{4}{9}; 4\right]$

18.6. 3) ЕГЭ-2012

a - ? более двух корней на $(0; +\infty)$

$$\left| \frac{5}{x} - 3 \right| = ax - 2$$

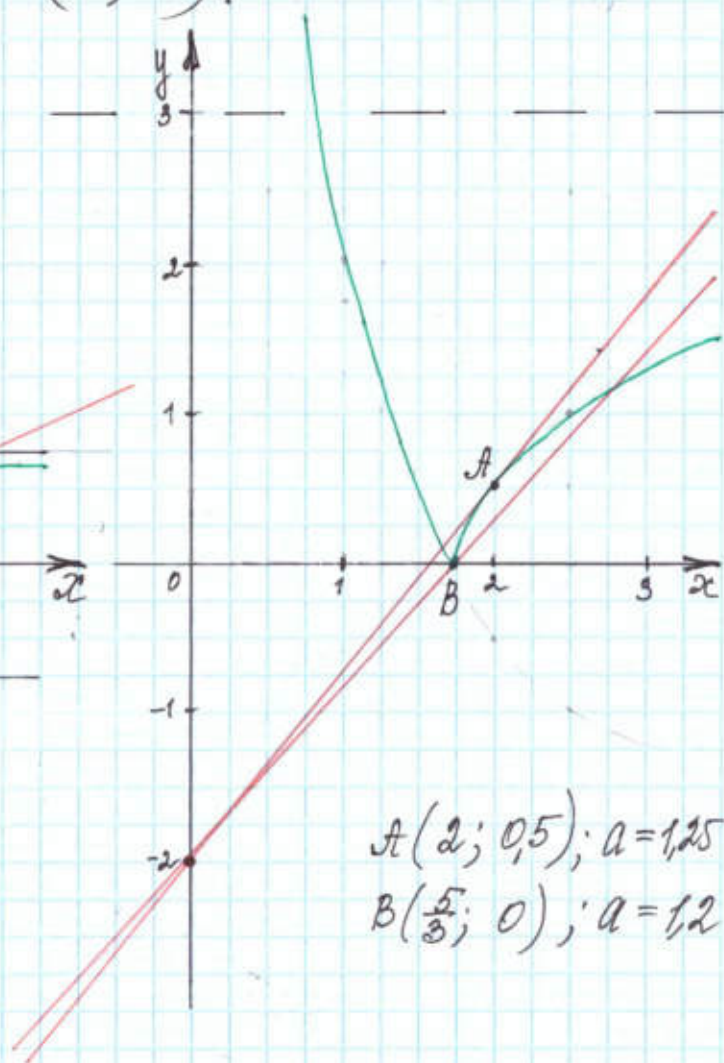
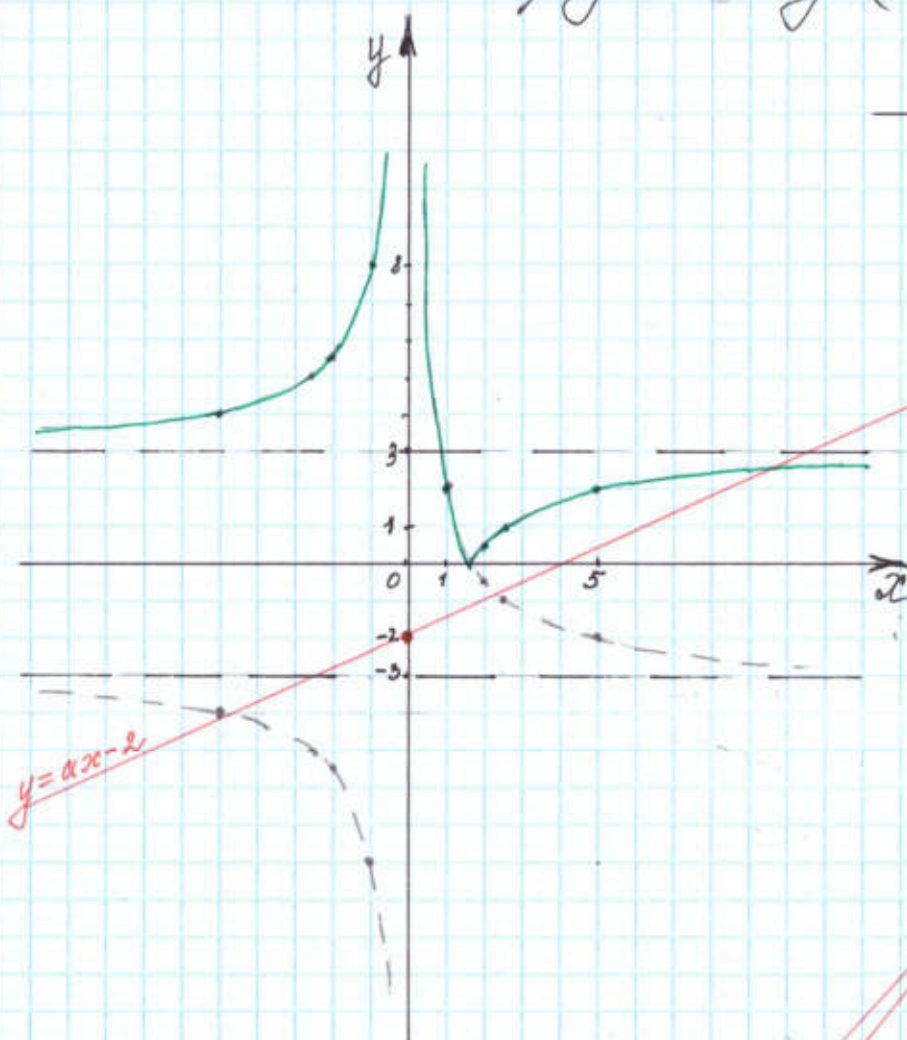
1) Построим график функции $y = \left| \frac{5}{x} - 3 \right|$ с помощью преобразований:

1. $y = \frac{5}{x}$

2. $y = \frac{5}{x} - 3$

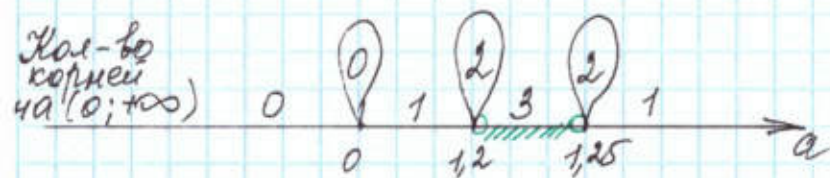
3. $y = \left| \frac{5}{x} - 3 \right|$

2) $y = ax - 2$. Это лучок прямых, проходящих через точку $(0; -2)$.



$A(2; 0,5); a = 1,25$

$B(\frac{5}{3}; 0); a = 1,2$



$a \in (1,2; 1,25)$

Ответ: $(1,2; 1,25)$

Найдём то значение a , при котором прямая $y = ax - 2$ будет являться касательной к графику функции $y = -(\frac{5}{x} - 3)$ в точке с абсциссой x_0 .

$$\begin{cases} ax_0 - 2 = -\frac{5}{x_0} + 3 \\ a = \frac{5}{x_0^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 \cdot \frac{5}{x_0^2} + \frac{5}{x_0} = 5 \\ a = \frac{5}{x_0^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{10}{x_0} = 5 \\ a = \frac{5}{x_0^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ a = 1,25 \end{cases}$$

$$A(2; 0,5); \quad a = 1,25.$$

Найдём то значение a , при котором прямая $y = ax - 2$ пройдёт через точку $B(\frac{5}{3}; 0)$.

$$0 = \frac{5}{3}a - 2, \quad \frac{5}{3}a = 2, \quad a = \frac{6}{5}, \quad a = 1,2$$

18.6. 4) ЕГЭ-2012

a -? равно 2 корня на $[0; +\infty)$.

$$a|x-2| = \frac{3}{x+1}$$

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ a(x-2) = \frac{3}{x+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2 < 0 \\ a(x-2) = \frac{-3}{x+1} \end{cases}$$

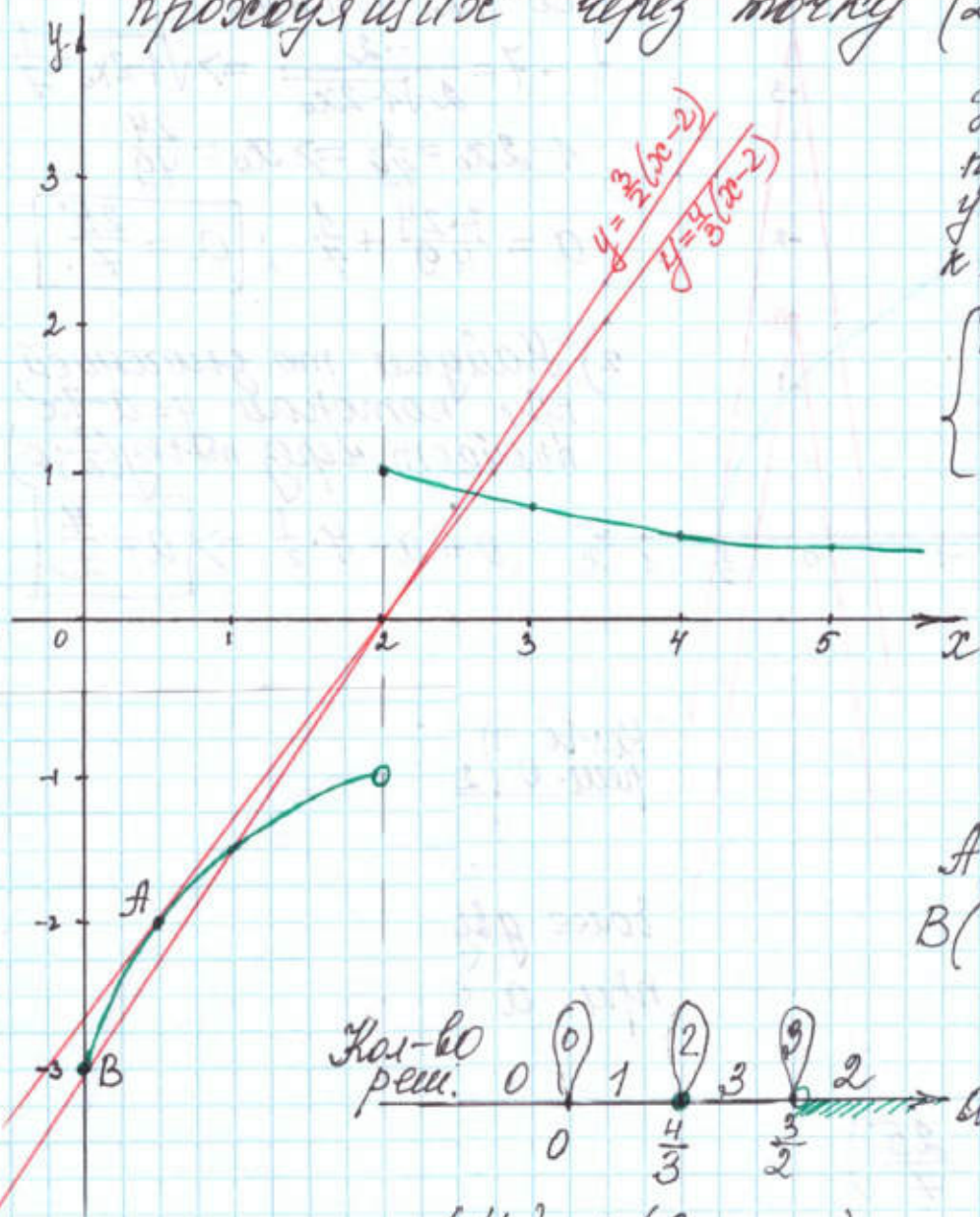
$$\begin{cases} x \geq 2 \\ a(x-2) = \frac{3}{x+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x < 2, \text{ т.к. } x \in [0; +\infty) \\ a(x-2) = \frac{-3}{x+1} \end{cases}$$

Построим графики $y = \frac{3}{x+1}$ для $x \geq 2$ и

$y = \frac{-3}{x+1}$ для $0 \leq x < 2$.

Уравнение $y = a(x-2)$ задает пучок прямых, проходящих через точку $(2; 0)$.



Найдем то значение a , при котором прямая $y = a(x-2)$ будет касательна к графику $y = \frac{-3}{x+1}$ в т. x_0 .

$$\begin{cases} a(x_0-2) = \frac{-3}{x_0+1} \\ a = \frac{3}{(x_0+1)^2} \end{cases}$$

$$\frac{3(x_0-2)}{(x_0+1)^2} = \frac{-3 \cdot (x_0+1)}{(x_0+1)(x_0+1)}$$

$$3x_0 - 6 = -3x_0 - 3$$

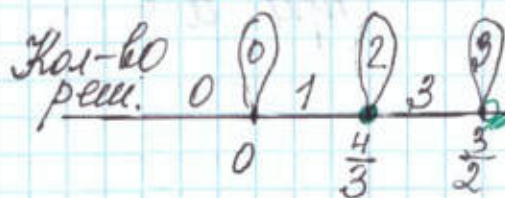
$$6x_0 = 3$$

$$x_0 = 0.5 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

$$A(0.5; -2).$$

$$B(0; -3): -3 = a(-2)$$

$$a = \frac{3}{2}$$



Ровно 2 решения при $a \in \{\frac{4}{3}\} \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$

Ответ: $\{\frac{4}{3}\} \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$

18.6) 5) ЕГЭ-2012

a - ? более двух решений

$$\sqrt{1-2x} = a - 7|x|$$

Построим графики функций:

$$y = \sqrt{1-2x}$$

и

$$y = a - 7|x|$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y = \sqrt{2(\frac{1}{2}-x)} \end{cases}$$

$$1. y = -|x|$$

$$2. y = -7|x|$$

$$3. y = a - 7|x|$$

$$1. y = \sqrt{-x}$$

$$2. y = \sqrt{\frac{1}{2}-x}$$

$$3. y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}-x}$$

1) Найдем то значение a , при котором $y = a - 7|x|$ будет касаться $y = \sqrt{1-2x}$.

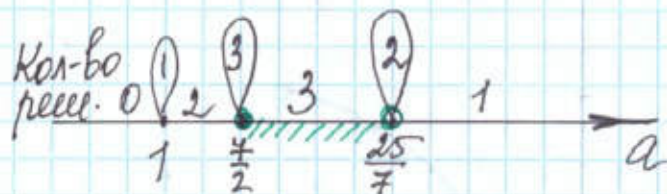
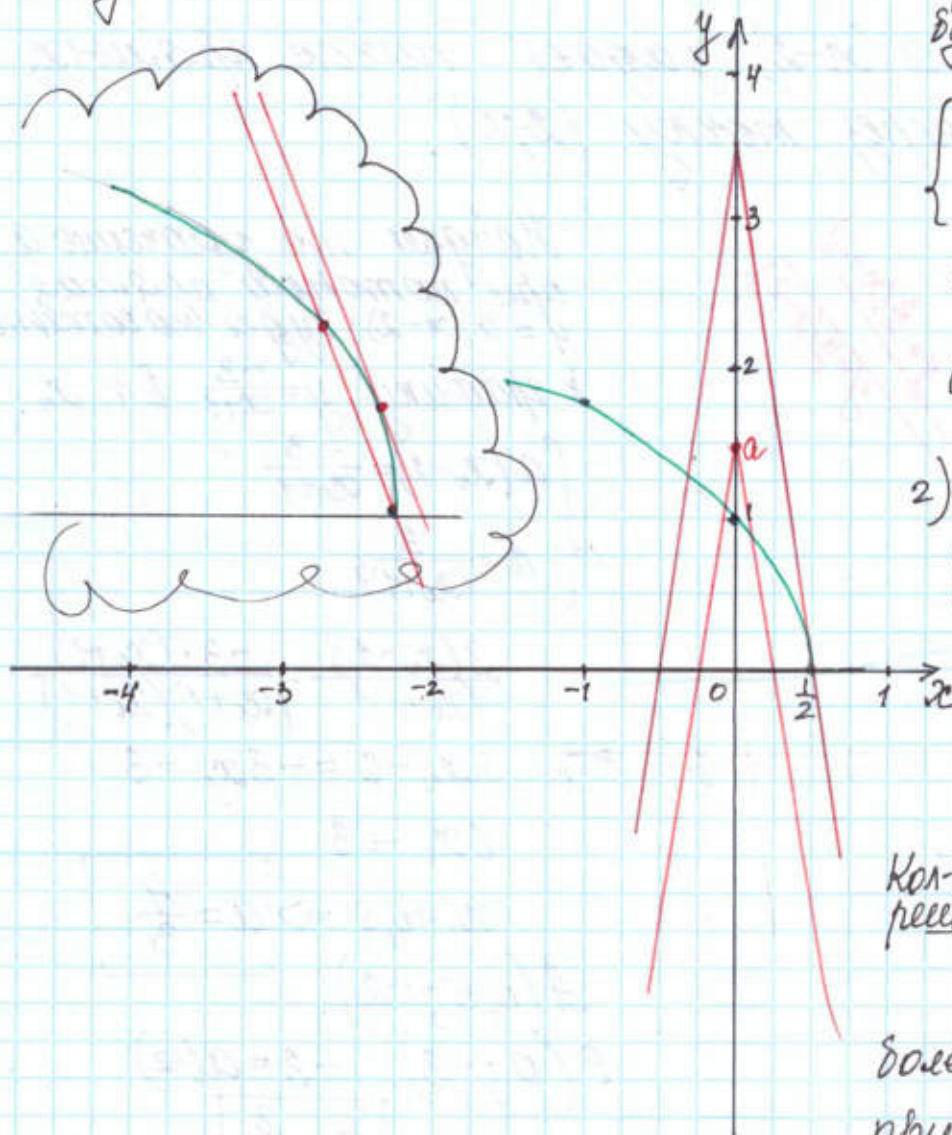
$$\begin{cases} a - 7x_0 = \sqrt{1-2x_0} \\ -7 = \frac{-2}{2\sqrt{1-2x_0}} \Rightarrow \sqrt{1-2x_0} = \frac{1}{7} \end{cases}$$

$$1-2x_0 = \frac{1}{49} \Rightarrow x_0 = \frac{24}{49}$$

$$a = \frac{7 \cdot 24}{49} + \frac{1}{7}; \quad \boxed{a = \frac{25}{7}}$$

2) Найдем то значение a , при котором $y = a - 7|x|$ пройдет через точку $(\frac{1}{2}; 0)$

$$0 = a - 7 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{7}{2}}$$



более двух решений будет при $a \in [\frac{7}{2}; \frac{25}{7})$

Ответ: $[\frac{7}{2}; \frac{25}{7})$

18.7. 1) ЕГЭ-2019

a - ? ровно один корень на $[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$

$$3 \sin x + \cos x = a.$$

$$\sqrt{10} \left(\sin x \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \right) = a$$

$$\sin x \cdot \cos \varphi + \cos x \cdot \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{10}}, \text{ где } \cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}, \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

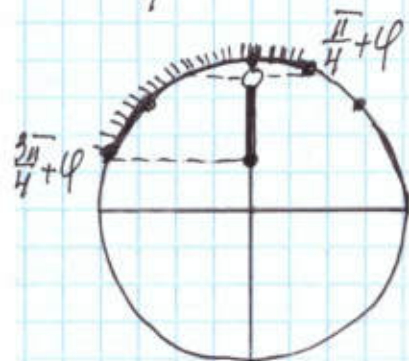
$$\sin(x + \varphi) = \frac{a}{\sqrt{10}}$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{10}} < \frac{1}{2}$$

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} + \varphi \leq x + \varphi \leq \frac{3\pi}{4} + \varphi, \text{ где } \varphi \in (0; \frac{\pi}{6}).$$



Чтобы уравнение $\sin(x + \varphi) = \frac{a}{\sqrt{10}}$ имело ровно один корень, должны выполняться условия:

$$\left[\begin{aligned} \sin(\frac{3\pi}{4} + \varphi) &\leq \frac{a}{\sqrt{10}} < \sin(\frac{\pi}{4} + \varphi) \\ \frac{a}{\sqrt{10}} &= 1 \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} \sin \frac{3\pi}{4} \cdot \cos \varphi + \cos \frac{3\pi}{4} \cdot \sin \varphi &\leq \frac{a}{\sqrt{10}} < \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \varphi + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \varphi \\ a &= \sqrt{10} \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} &\leq \frac{a}{\sqrt{10}} < \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \\ a &= \sqrt{10} \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} &\leq \frac{a}{\sqrt{10}} < \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} \\ a &= \sqrt{10} \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} \sqrt{2} &\leq a < 2\sqrt{2} \\ a &= \sqrt{10} \end{aligned} \right.$$

$$a \in [\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{10}\}.$$

Ответ: $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{10}\}$

18.7. 2) ЕГЭ-2018

a - ? хотя бы один корень
 $(4x-x^2)^2 - 32\sqrt{4x-x^2} = a^2 - 14a$.

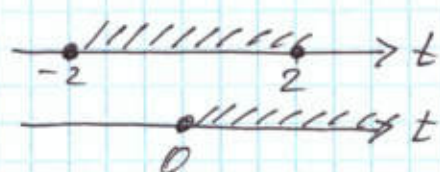
Пусть $\sqrt{4x-x^2} = t, t \geq 0$.

$$4x - x^2 = t^2$$

$$x^2 - 4x + t^2 = 0.$$

Хотя бы один корень у этого уравнения будет, если $D \geq 0$ (или $\frac{D}{4} \geq 0$).

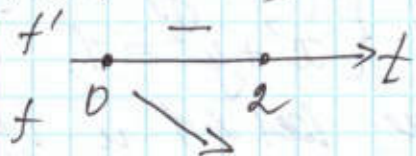
$$\frac{D}{4} = 4 - t^2, \quad 4 - t^2 \geq 0, \quad t^2 - 4 \leq 0, \quad (t-2)(t+2) \leq 0$$



$$0 \leq t \leq 2$$

Введем функцию $f(t) = t^4 - 32t$, где $0 \leq t \leq 2$.
 $f'(t) = 4t^3 - 32 = 4(t^3 - 8)$.

$$f'(t) = 0; \quad t^3 - 8 = 0, \quad t = 2.$$



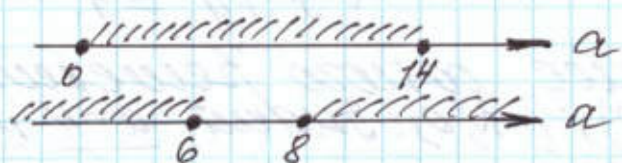
$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 2^4 - 32 \cdot 2 = 16 - 64 = -48.$$

$$-48 \leq f(t) \leq 0.$$

Уравнение $f(t) = a^2 - 14a$ будет иметь хотя бы одно решение, если
 $-48 \leq a^2 - 14a \leq 0$

$$\begin{cases} a(a-14) \leq 0 \\ a^2 - 14a + 48 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a(a-14) \leq 0 \\ (a-6)(a-8) \geq 0 \end{cases}$$



$$a \in [0; 6] \cup [8; 14]$$

Ответ: $[0; 6] \cup [8; 14]$

а - ? любое решение уравнения принадлежит $[1; 3]$

$$4 \cdot \sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 3 \cdot \log_2(3x - 1) + 2a = 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 4 \cdot \sqrt[3]{3,5x - 2,5}$, она существует на $[1; 3]$ и возрастает на нём, т.к. её производная положительна.

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3,5}{\sqrt[3]{(3,5x - 2,5)^2}} = \frac{14}{3 \sqrt[3]{(3,5x - 2,5)^2}}, \quad f'(x) > 0.$$

Рассмотрим функцию $g(x) = 3 \cdot \log_2(3x - 1)$, она существует при $x > \frac{1}{3}$, а значит на $[1; 3]$ и возрастает на нём, т.к.

$$g'(x) = 3 \cdot \frac{1}{(3x - 1) \cdot \ln 2}; \quad g'(x) > 0.$$

Левая часть данного уравнения представляет из себя возрастающую функцию, как сумма двух возрастающих функций. Значит своё наименьшее значение она будет принимать в левом конце отрезка, а наибольшее — в правом.

$$f(x) + g(x) + 2a = 0$$

При $x = 1$ $4 \sqrt[3]{1} + 3 \log_2 2 + 2a = 0$; $2a = -7$, $a = -3,5$

При $x = 3$ $4 \sqrt[3]{8} + 3 \log_2 8 + 2a = 0$; $2a = -17$, $a = -8,5$.

Значит, при $a \in [-8,5; -3,5]$ любое решение уравнения будет попадать на $[1; 3]$.

Ответ: $[-8,5; -3,5]$

18.7.

4) ЕГЭ-2014

a - ? неравенство верно для любого действительного x

$$|3\sin x + a^2 - 22| + |7\sin x + a + 12| \leq 11\sin x + |a^2 + a - 20| + 11.$$

Если неравенство должно выполняться для любого действительного x , то и для конкретного x , например, для $x = -\frac{\pi}{2}$, при этом $\sin x = -1$.

$$|-3 + a^2 - 22| + |-7 + a + 12| \leq -11 + |a^2 + a - 20| + 11$$

$$(*) \quad |a^2 - 25| + |a + 5| \leq |a^2 + a - 20|$$

$$|(a-5)(a+5)| + |a+5| \leq |(a-4)(a+5)| \quad \text{I способ}$$

$$\begin{array}{c} -5 \quad 4 \quad 5 \\ \hline \end{array} \rightarrow a$$

$(a-5)(a+5)$	+	-	-	+
$(a+5)$	+	+	+	+
$(a-4)(a+5)$	+	-	+	+

$\begin{cases} a \leq -5 \\ a^2 - 25 - a - 5 \leq a^2 + a - 20 \\ -5 < a \leq 4 \\ -a^2 + 25 + a + 5 \leq -a^2 - a + 20 \\ 4 < a \leq 5 \\ -a^2 + 25 + a + 5 \leq a^2 + a - 20 \\ a > 5 \\ a^2 - 25 + a + 5 \leq a^2 + a - 20 \end{cases}$	$\begin{cases} a \leq -5 \\ 2a \geq -10 \\ -5 < a \leq 4 \\ 2a \leq -10 \\ 4 < a \leq 5 \\ 2a^2 \geq 50 \\ a > 5 \\ -20 \leq -20 \end{cases}$	$\begin{cases} a \leq -5 \\ a \geq -5 \\ -5 < a \leq 4 \text{ нет} \\ a \leq -5 \text{ реш.} \\ 4 < a \leq 5 \\ a \geq 5 \\ a > 5 \end{cases}$	$\begin{cases} a = -5 \\ a = 5 \\ a > 5 \end{cases}$
--	---	--	--

Получили $a \in \{-5\} \cup [5; +\infty)$

Ответ: $\{-5\} \cup [5; +\infty)$

$$(*) \quad |a^2 - 25| + |a + 5| \leq |a^2 + a - 20|$$

II способ

Заметим, что $(a^2 - 25) + (a + 5) = a^2 + a - 20$,

$$|m| + |n| \geq |m+n|$$

поэтому $|m+n| \leq |m| + |n| \leq |m+n|$

это неравенство выполняется только при условии $|m| + |n| = |m+n|$.

$$|a^2 - 25| + |a + 5| = |a^2 + a - 20|$$

$$|(a-5)(a+5)| + |a+5| - |(a+5)(a-4)| = 0$$

$$|a-5| \cdot |a+5| + |a+5| - |a+5| \cdot |a-4| = 0$$

$$|a+5| \cdot (|a-5| + 1 - |a-4|) = 0$$

$$|a+5| = 0 \quad \text{или} \quad |a-5| - |a-4| + 1 = 0$$

$$a + 5 = 0$$

$$\boxed{a = -5}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \rightarrow a \\ a-5 & - & 4 & - & 5 & + & \\ a-4 & - & & + & & + & \end{array}$$

$$\begin{cases} a \leq 4 \\ -a+5+a-4+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 < a \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a+5-a+4+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-5-a+4+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq 4 \\ 2=0 \end{cases} \text{ нет реш.}$$

$$\begin{cases} 4 < a \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 5 \\ a > 5 \end{cases}$$

$$\boxed{a \geq 5}$$

Объединим полученные решения:

$$a \in \{-5\} \cup [5; +\infty)$$

Ответ: $\{-5\} \cup [5; +\infty)$.

18.7. 5) ЕГЭ-2013

a - ? хотя бы один корень

$$(4 \cos x - 3 - a) \cos x - 2,5 \cos 2x + 1,5 = 0. \quad (1)$$

Пусть $\cos x = t$, тогда $\cos 2x = 2t^2 - 1$.

$$(4t - 3 - a)t - 2,5(2t^2 - 1) + 1,5 = 0$$

$$4t^2 - 3t - at - 5t^2 + 2,5 + 1,5 = 0$$

$$t^2 + (a+3)t - 4 = 0. \quad (2)$$

Чтобы уравнение (1) имело хотя бы один корень, необходимо, чтобы уравнение (2) имело хотя бы один корень из промежутка $[-1; 1]$.

$D = (a+3)^2 + 16$, $D > 0$ значит будут два разл. корня.

$$t_1 = \frac{-a-3-\sqrt{(a+3)^2+16}}{2} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{-a-3+\sqrt{(a+3)^2+16}}{2}$$

$$-1 \leq t_1 \leq 1 \quad \text{или} \quad -1 \leq t_2 \leq 1$$

$$\begin{cases} -a-3-\sqrt{(a+3)^2+16} \leq 2 \\ -a-3-\sqrt{(a+3)^2+16} \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(a+3)^2+16} \geq -a-5 \quad (*) \\ \sqrt{(a+3)^2+16} \leq -a-1 \quad (**) \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} -a-5 < 0 \\ (a+3)^2+16 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a-5 \geq 0 \\ a^2+6a+25 \geq a^2+10a+25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > -5 \\ \begin{cases} a \leq -5 \\ a \leq 0 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} a > -5 \\ a \leq -5 \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

$$(**) \begin{cases} -a-1 \geq 0 \\ a^2+6a+25 \leq a^2+2a+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq -1 \\ 4a \leq -24 \end{cases} \quad \boxed{a \leq -6}$$

$$\begin{cases} -a-3+\sqrt{(a+3)^2+16} \leq 2 \\ -a-3+\sqrt{(a+3)^2+16} \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+6a+25} \leq a+5 \quad (v) \\ \sqrt{a^2+6a+25} \geq a+1 \quad (w) \end{cases}$$

$$(v) \begin{cases} a+5 \geq 0 \\ a^2+6a+25 \leq a^2+10a+25 \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq -5 \\ a \geq 0 \end{cases} \quad \boxed{a \geq 0}$$

$$(w) \begin{cases} a+1 < 0 \\ a^2+6a+25 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a < -1 \\ a^2+6a+25 \geq a^2+2a+1 \end{cases} \quad \begin{cases} a < -1 \\ 4a \geq -24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < -1 \\ a \geq -1 \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Найдём объединение полученных решений
 $a \in (-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$

18.7. 6) ЕГЭ - 2012

a - ? более 3 разл. решений

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

Перепишем уравнение в виде

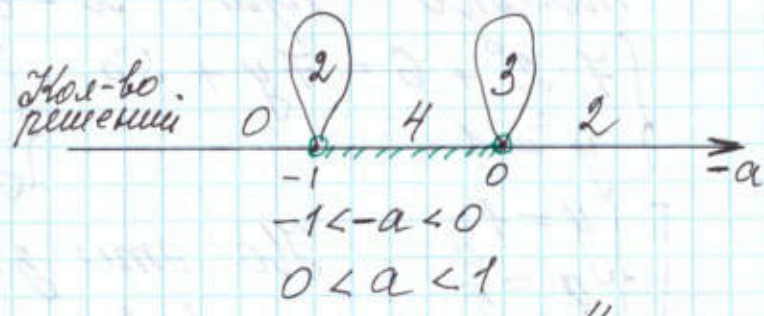
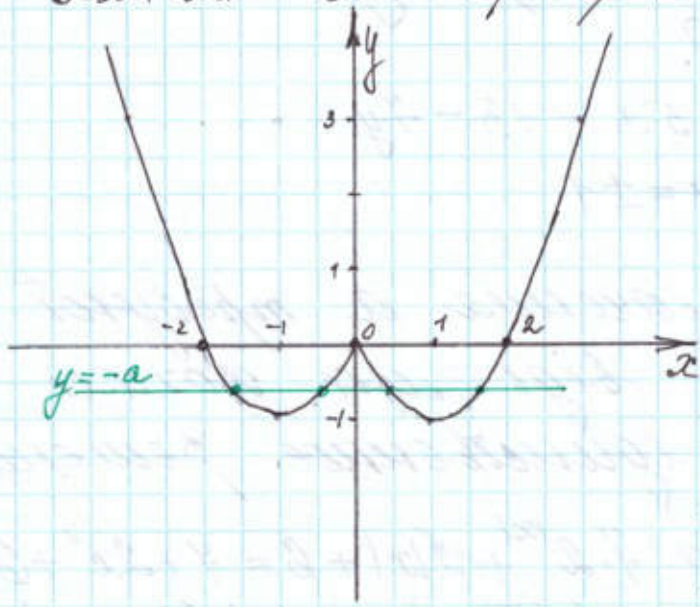
$$(x^2)^5 + x^2 = (2|x| - a)^5 + (2|x| - a)$$

Введем функцию $f(t) = t^5 + t$, $f(t)$ будет возрастать на $\mathbb{R}$, т.к. $f'(t) = 5t^4 + 1$, $f'(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Тогда уравнение $f(x^2) = f(2|x| - a)$ будет иметь решение, если $x^2 = 2|x| - a$.

$$x^2 - 2|x| = -a.$$

Решим его графически: $y = x^2 - 2|x|$, $y = -a$.



Более трех решений будет при $a \in (0; 1)$.

Ответ: $(0; 1)$

18.7. 4) ЕГЭ - 2011.

a - ? единственное решение

$$\begin{cases} 7 \cdot 2^{|x|} + 2|x| + 6 = 7y + 2x^2 + 5a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Заметим, что система симметрична относительно x , поэтому вместе с решением $(x_0; y_0)$ всегда будет иметь решение $(-x_0, y_0)$.

И тогда нечётное количество решений возможно только при $x=0$.

$$\begin{cases} 7 \cdot 2^0 + 6 = 7y + 5a \\ y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 5a = 13 - 7y \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Если $y=1$, то $a = \frac{6}{5}$

Если $y=-1$, то $a=4$.

Проверим эти значения a .

Будет ли решение единственным.

$$\left[a = \frac{6}{5} \right] \begin{cases} 7 \cdot 2^{|x|} + 2|x| - 7y - 2x^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 7(2^{|x|} - y) = 2|x|(1|x| - 1) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Из второго уравнения получим $|x| \leq 1$ и $|y| \leq 1$.

Тогда $7(2^{|x|} - y) \geq 0$; $2|x|(1|x| - 1) \leq 0$,

а значит равенство возможно лишь

$$\begin{cases} 7(2^{|x|} - y) = 0 \\ 2|x|(1|x| - 1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{ll} x=0 \Rightarrow y=1 & (0;1) - \text{реш.} \\ x=1 \Rightarrow y=2 & \text{не подх.} \\ x=-1 \Rightarrow y=2 & \text{не подх.} \end{array}$$

Значит при $a = \frac{6}{5}$ единственное решение $(0;1)$.

$$\left[a = 4 \right] \begin{cases} 7 \cdot 2^{|x|} + 2|x| + 6 = 7y + 2x^2 + 20 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 7(2^{|x|} - y - 2) = 2|x|(1|x| - 1) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Эта система имеет более одного решения, например, $(0; -1)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$. Значит $a=4$ не подх.

Ответ: $\frac{6}{5}$

