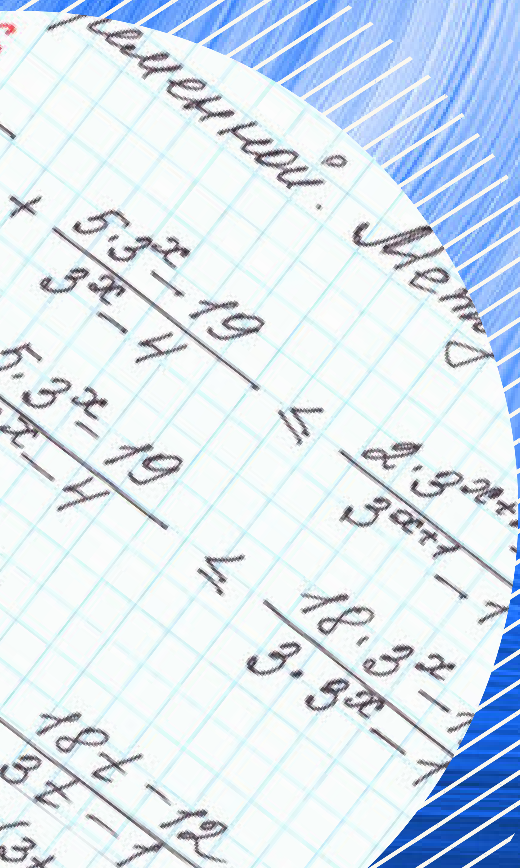
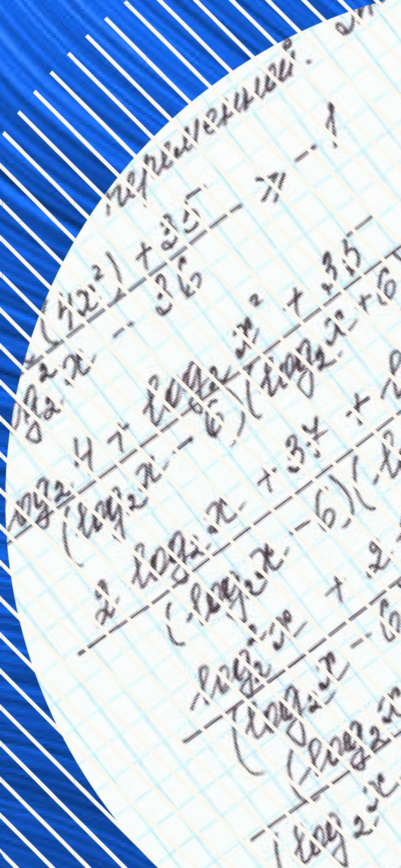
ЛЮДМИЛА ИВАНОВНА СКРИПКА

ЗАДАНИЕ №15

Подборка Александра Томилина





Рукописный вариант

2020 г

Содержание

Задание №15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

1) $\log_2^2(16+6x-x^2)+10\log_{0,5}(16+6x-x^2)+24>0.$ (ЕГЭ-2015)

2) $\dfrac{2}{3^x-9}\geqslant\dfrac{8}{3^x-3}.$ (ЕГЭ-2015)

3) $\dfrac{\log_2(4x^2)+35}{\log_2^2 x-36}\geqslant -1.$ (ЕГЭ-2017)

4) $\dfrac{9^x+2\cdot 3^x-117}{3^x-27}\leqslant 1.$ (ЕГЭ-2019)

5) $\dfrac{49^x-6\cdot 7^x+3}{7^x-5}+\dfrac{6\cdot 7^x-39}{7^x-7}\leqslant 7^x+5.$ (ЕГЭ-2016)

6) $\dfrac{\log_5(25x)}{\log_5 x-2}+\dfrac{\log_5 x-2}{\log_5(25x)}\geqslant\dfrac{6-\log_5 x^4}{\log_5^2 x-4}.$ (ЕГЭ-2017)

7) $\dfrac{9^{x+\frac{1}{2}}-4\cdot 3^x+5}{9^{x+\frac{1}{2}}-4\cdot 3^x+1}+\dfrac{5\cdot 3^x-19}{3^x-4}\leqslant\dfrac{2\cdot 3^{x+2}-12}{3^{x+1}-1}.$ (ЕГЭ-2016)

8) $\dfrac{2^{x+5}-2^{-x}}{2^{3-x}-4^{-x}}\geqslant 2^x.$ (ЕГЭ-2019)

9) ${\log_2}^2(25-x^2)-7\log_2(25-x^2)+12\geqslant 0.$ (ЕГЭ-2017)

10) $\lg^4 x-4\lg^3 x+5\lg^2 x-2\lg x\geqslant 0.$ (ЕГЭ-2015)

11) $\left(\log_2^2 x-2\log_2 x\right)^2<11\log_2^2 x-22\log_2 x-24.$ (ЕГЭ-2015)

12) $\dfrac{105}{\left(2^{4-x^2}-1\right)^2}-\dfrac{22}{2^{4-x^2}-1}+1\geqslant 0.$ (ЕГЭ-2015)

Задание №15.1. Ответы.

1) $(-2;\ 0);\ (6;\ 8).$

2) $(-\infty;\ 1);\ (2;\ \log_3 11].$

3) $\left(0;\ \dfrac{1}{64}\right);\ \dfrac{1}{2};\ (64;\ +\infty).$

4) $[2;\ 3).$

5) $(-\infty;\ 0];\ (\log_7 5;\ 1).$

6) $(0;\ 0,04);\ 0,2;\ (25;\ +\infty).$

7) $(-\infty;\ -1);\ (-1;\ 0);\ [1;\ \log_3 4).$

8) $(-\infty;\ -3);\ [-2;\ +\infty).$

9) $(-5;\ -\sqrt{17}];\ [-3;\ 3];\ [\sqrt{17};\ 5).$

10) $(0;\ 1];\ 10;\ [100;\ +\infty).$

11) $\left(\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{2}\right);\ (8;\ 16).$

12) $(-\infty;\ -2);\ (-2;\ -1];\ 0;\ [1;\ 2);\ (2;\ +\infty).$

Задание №15.1 (ДЗ). Замена переменной. Метод интервалов.

1) $9^{4x-x^2-1} - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \geqslant 0.$ (ЕГЭ-2017)

2) $\dfrac{3\lg^2 x - 8}{\lg^2 x - 4} \geqslant 2.$ (ЕГЭ-2015)

3) $\dfrac{31 - 5 \cdot 2^x}{4^x - 24 \cdot 2^x + 128} \geqslant 0,25.$ (ЕГЭ-2015)

4) $\dfrac{2\log_3(9x) - 13}{\log_3^2 x - \log_3 x^4} \leqslant 1.$ (ЕГЭ-2017)

5) $\dfrac{4^x - 2^{x+3} + 7}{4^x - 5 \cdot 2^x + 4} \leqslant \dfrac{2^x - 9}{2^x - 4} + \dfrac{1}{2^x - 6}.$ (ЕГЭ-2016)

6) $\dfrac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \dfrac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geqslant \dfrac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}.$ (ЕГЭ-2017)

7) $\dfrac{9^x - 3^{x+1} - 19}{3^x - 6} + \dfrac{9^{x+1} - 3^{x+4} + 2}{3^x - 9} \leqslant 10 \cdot 3^x + 3.$ (ЕГЭ-2016)

8) $\dfrac{3^x - 80 \cdot 3^{-x} - 27}{9^{-x} - 3^{3-x}} \leqslant 3^x.$

9) $2{\log_4}^2(20 - x^2) - 7\log_4(20 - x^2) + 6 \geqslant 0.$

10) $3^{4x+1} - 31 \cdot 27^x + 37 \cdot 9^x - 3^{x+2} \leqslant 0.$

11) $\left(9^x - 2 \cdot 3^x\right)^2 - 62\left(9^x - 2 \cdot 3^x\right) - 63 \geqslant 0.$ (ЕГЭ-2017)

12) $\dfrac{4}{\left(\log_2\left(64 - x^2\right) - 2\right)^2} - \dfrac{5}{\log_2\left(16 - \dfrac{x^2}{4}\right)} + 1 \geqslant 0.$

Задание №15.1 (ДЗ). Ответы.

1) $(-\infty;\ 1];\ 2;\ [3;\ +\infty).$

2) $(0;\ 0,01);\ 1;\ (100;\ +\infty).$

3) $1;\ (3;\ 4).$

4) $(0;\ 1);\ 27;\ (81;\ +\infty).$

5) $(-\infty;\ 0);\ (0;\ 2);\ (\log_2 6;\ 3].$

6) $\left(0;\ \dfrac{1}{64}\right);\ 4;\ (64;\ +\infty).$

7) $(-\infty;\ 1];\ (\log_3 6;\ 2).$

8) $(-\infty;\ -3);\ [2;\ +\infty).$

9) $(-2\sqrt{5};\ -2\sqrt{3}];\ [-2;\ 2];\ [2\sqrt{3};\ 2\sqrt{5}).$

10) $(-\infty;\ -1];\ [0;\ 2].$

11) $0;\ [2;\ +\infty).$

12) $(-8;\ -2\sqrt{15});\ (-2\sqrt{15};\ -2\sqrt{14}];\ 0;\ [2\sqrt{14};\ 2\sqrt{15});\ (2\sqrt{15};\ 8).$

Задание №15.2. Действия с логарифмами, потенцирование. Действия со степенями, логарифмирование.

1) $2\log_2(x\sqrt{3}) - \log_2\dfrac{x}{x+1} \geqslant \log_2\left(3x^2+\dfrac{1}{x}\right).$ (ЕГЭ-2018)

2) $\log_7(2x^2+12) - \log_7(x^2-x+12) \geqslant \log_7\left(2-\dfrac{1}{x}\right).$ (ЕГЭ-2018)

3) $\log_5(3x+1) + \log_5\left(\dfrac{1}{72x^2}+1\right) \geqslant \log_5\left(\dfrac{1}{24x}+1\right).$ (ЕГЭ-2018)

4) $\log_2(x-1) + \log_2\left(x^2+\dfrac{1}{x-1}\right) \leqslant 2\log_2\dfrac{x^2+x-1}{2}.$ (ЕГЭ-2018)

5) $\log_5(4-x) + \log_5\dfrac{1}{x} \leqslant \log_5\left(\dfrac{1}{x}-x+3\right).$ (ЕГЭ-2018)

6) $\log_4(6-6x) < \log_4(x^2-5x+4) + \log_4(x+3).$ (ЕГЭ-2019)

7) $\log^2_{|x+1|}(x+1)^4 + \log_2(x+1)^2 \leqslant 22.$

8) $-\log_{\frac{1}{3}} x^2 + 2\log_9(x+3) \geqslant 2\log_3(-x-1) + \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(x+6).$

9) $\log_{\sqrt[9]{8}}\left(\log_{\frac{1}{7}}(x+1)\right) \geqslant 3.$

10) $3^{x^2}\cdot 5^{x-1} \geqslant 3.$ (ЕГЭ-2018)

11) $\sqrt[3]{27^{2x-3}} > \sqrt{81^{\frac{6-4x}{x+1}}}.$

12) $5^{x+3} + 5^{x+1} + 2\cdot 5^{x} < 2^{\frac{x}{4}+6} + 2^{\frac{x}{4}+1}.$

Задание №15.2. Ответы.

1) $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3};\ +\infty\right)$.

2) $\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{4}{3}\right];\ [3;\ +\infty)$.

3) $\left[-\dfrac{1}{6};\ -\dfrac{1}{24}\right);\ (0;\ +\infty)$.

4) $\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$.

5) $[1;\ 3]$.

6) $(-2;\ 1)$.

7) $[-9;-2);\ (-2;\ -1);\ (-1;\ 0);\ (0;\ 7]$.

8) $[-2;\ -1)$.

9) $\left(-1;\ -\dfrac{48}{49}\right]$.

10) $(-\infty;\ -\log_3 15];\ [1;\ +\infty)$.

11) $(-5;-1);\ \left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

12) $\left(-\infty;-\dfrac{\lg 2}{\lg 5-\lg\sqrt[4]{2}}\right)$.

Задание №15.2 (ДЗ). Действия с логарифмами, потенцирование. Действия со степенями, логарифмирование.

1) $2\log_2(1-2x) - \log_2\left(\dfrac{1}{x} - 2\right) \leqslant \log_2(4x^2+6x-1)$. (ЕГЭ-2018)

2) $\log_2(x-1) + \log_2\left(2x + \dfrac{4}{x-1}\right) \geqslant 2\log_2\dfrac{3x-1}{2}$. (ЕГЭ-2018)

3) $\log_5(3x^2-2) - \log_5 x < \log_5\left(3x^2 + \dfrac{1}{x} - 3\right)$. (ЕГЭ-2018)

4) $2\log_2 x + \log_2\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right) \leqslant 2\log_2\dfrac{x^2+x}{2}$. (ЕГЭ-2018)

5) $\log_2\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) + \log_2\left(\dfrac{1}{x} + 1\right) \leqslant \log_2(27x-1)$. (ЕГЭ-2018)

6) $\log_2(x-1)(x^2+2) \leqslant 1 + \log_2(x^2+3x-4) - \log_2 x$. (ЕГЭ-2019)

7) $\log^2_{|x|}(x^2) + \log_2(x^2) \leqslant 8$.

8) $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{7}} x^2 - \log_{\frac{1}{7}}(x+2) \leqslant 2\log_7(1-x) + 2\log_{49}(x+10)$.

9) $\log_{\sqrt[4]{36}}\left(\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\right) \geqslant 2$.

10) $8 \cdot 7^{2x+1} \leqslant 16^{1-x^2}$.

11) $\sqrt{625^{\frac{4-2x}{x-1}}} > \sqrt[3]{125^{2x+1}}$.

12) $3^{x+3} + 3^{x+2} - 3^x < 2^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{x}{2}-1} + 2^{\frac{x}{2}-2}$.

Задание №15.2 (ДЗ). Ответы.

1) $\left[\dfrac{1}{6};\ \dfrac{1}{2}\right).$

2) $(1;\ 3].$

3) $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3};\ 1\right);\ (1;\ +\infty).$

4) $[2;\ +\infty).$

5) $\left[\dfrac{1}{3};\ 1\right).$

6) $(1;\ 2].$

7) $[-4;-1);\ (-1;\ 0);\ (0;\ 1);\ (1;\ 4].$

8) $(-2;\ 0);\ \left(0;\ \dfrac{2}{3}\right].$

9) $\left(-1;\ -\dfrac{63}{64}\right].$

10) $\left[\dfrac{1-\log_2 7}{2};\ -\dfrac{1}{2}\right].$

11) $(-\infty;-3);\ \left(1;\dfrac{3}{2}\right).$

12) $\left(-\infty;-\dfrac{\lg 20}{\lg 3-\lg\sqrt{2}}\right).$

Задание №15.3. Смешанные неравенства. Переменное основание.

1) $\dfrac{6^x - 4\cdot 3^x}{x\cdot 2^x - 5\cdot 2^x - 4x + 20} \leqslant \dfrac{1}{x-5}$. (ЕГЭ-2018)

2) $\dfrac{25^{x^2+x-10} - (0,2)^{x^2-2x-7}}{0,5\cdot 4^{x-1} - 1} \leqslant 0$. (ЕГЭ-2019)

3) $(5x-13)\cdot \log_{2x-5}(x^2-6x+10) \geqslant 0$. (ЕГЭ-2016)

4) $\left(4^{x^2-x-6} - 1\right)\cdot \log_{0,25}\left(4^{x^2+2x+2} - 3\right) \leqslant 0$. (ЕГЭ-2016)

5) $\dfrac{\log_2(2x^2-17x+35) - 1}{\log_7(x+6)} \leqslant 0$. (ЕГЭ-2017)

6) $\log_{3-x}(2x+1)\cdot \log_{3x+4}(4-x) \leqslant 0$.

7) $\log_{1-\frac{1}{(x-1)^2}}\left(\dfrac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2}\right) \leqslant 0$.

8) $\log_{\frac{x}{2}}(x^2-2x+1) \geqslant 2$.

9) $\log_{x^3-9x^2+27x-27}(9-x) \geqslant 0$.

10) $\log_{5-x}\dfrac{x+2}{(x-5)^4} \geqslant -4$.

Задание №15.3. Ответы.

1) $[0;\ 2);\ (2;\ 5)$.

2) $(-\infty;\ -3];\ (1,5;\ 3]$.

3) $(2,5;\ 2,6];\ (3;\ +\infty)$.

4) $(-\infty;\ -2];\ -1;\ [3;\ +\infty)$.

5) $(-6;\ -5);\ [3;\ 3,5);\ (5;\ 5,5]$.

6) $(-0,5;\ 0];\ (2;\ 3)$.

7) $\left[-\frac{3}{4};\ 0\right);\ (2;\ +\infty)$.

8) $\left[\frac{2}{3};\ 1\right);\ (1;\ 2);\ (2;\ +\infty)$.

9) $(4;\ 8]$.

10) $(-1;\ 4]$.

Задание №15.3 (ДЗ). Смешанные неравенства. Переменное основание.

1) $\dfrac{x\cdot 7^x - 7^{x+1} - 2x + 14}{175 + x\cdot 5^x - 25x - 7\cdot 5^x} \geqslant \dfrac{1}{5^{x-1} - 5}.$

2) $\dfrac{16\cdot 2^{x^2(x-3)} - (0,125)^{x^2-4}}{0,04\cdot 25^{2x^2-11} - 5} \geqslant 0.$

3) $(20 - 11x)\cdot \log_{5x-9}(x^2 - 4x + 5) \leqslant 0.$ (ЕГЭ-2016)

4) $\left(9^{x^2-1} - 3^{5x+1}\right)\cdot \log_{\frac{1}{3}}\left(3^{x^2+4x+6} - 8\right) \geqslant 0.$

5) $\dfrac{\log_5(3x^2 + 11x + 6) + \log_{0,2}(x^2+1)}{\log_{0,2}(7-x)} \geqslant 0.$

6) $\log_{4-x}(3x+8)\cdot \log_{2x+5}(5-x) \geqslant 0.$

7) $\log_{\frac{1}{\sin^2 x}}\left(\dfrac{2}{x^2 - 5x + 6}\right) \geqslant 0.$

8) $\log_{\sqrt{4x-7}}(x^2 - 4x + 5) \leqslant 2.$

9) $\log_{x+2}(1 - 6x + 12x^2 - 8x^3) \leqslant 0.$

10) $\log_{x^2+1}(9 - x^2) \leqslant 1 + \log_{x^2+1}(x+3).$

Задание №15.3 (ДЗ). Ответы.

1) $(-\infty;\ 1];\ (2;\ 7);\ (7;\ +\infty).$

2) $(-2,5;\ 2];\ (2,5;\ +\infty).$

3) $\left(\dfrac{9}{5};\ \dfrac{20}{11}\right];\ (2;\ +\infty).$

4) $-2;\ [-0,5;\ 3].$

5) $[-5;\ -3);\ \left(-\dfrac{2}{3};\ -\dfrac{1}{2}\right];\ (6;\ 7).$

6) $\left(-\dfrac{5}{2};\ -\dfrac{7}{3}\right];\ (-2;\ 3).$

7) $\left[1;\ \dfrac{\pi}{2}\right);\ \left(\dfrac{\pi}{2};\ 2\right);\ (3;\ \pi);\ (\pi;\ 4]$

8) $(1,75;\ 2);\ (2;\ 6].$

9) $(-2;\ -1);\ [0;\ 0,5).$

10) $(-3;\ -2];\ [1;\ 3).$

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

1) ЕГЭ - 2015

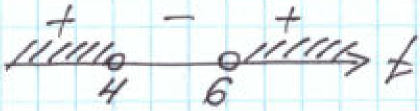
$\log_2^2(16+6x-x^2)+10\log_{0,5}(16+6x-x^2)+24>0.$

$\log_2^2(16+6x-x^2)-10\cdot\log_2(16+6x-x^2)+24>0$

Пусть $\log_2(16+6x-x^2)=t$, тогда

$t^2-10t+24>0$

$(t-4)(t-6)>0$

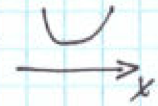


$\left[\begin{array}{l} t<4 \\ t>6 \end{array}\right.$

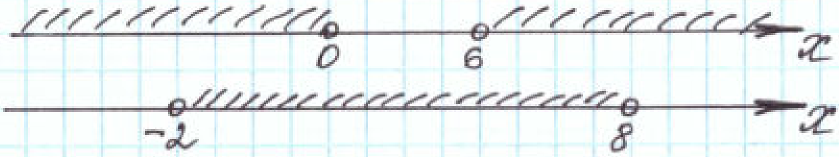
$\left[\begin{array}{l} \log_2(16+6x-x^2)<\log_2 2^4 \\ \log_2(16+6x-x^2)>\log_2 2^6 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 0<16+6x-x^2<16 \\ 16+6x-x^2>64. \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-6x>0 \\ x^2-6x-16<0 \end{cases} \\ x^2-6x+48<0, \text{ нет решений, т.к. } D<0 \end{array}\right.$



$\begin{cases} x(x-6)>0 \\ (x+2)(x-8)<0 \end{cases}$ $\Big|$ $\begin{array}{l} 0;\ 6 \\ -2;\ 8. \end{array}$



$x\in(-2;0)\cup(6;8)$

__Ответ:__ $(-2;0)\cup(6;8)$

$\boxed{15.1.}$ Замена переменной. Метод интервалов.

2) ЕГЭ – 2015

$$\frac{2}{3^x-9} \geqslant \frac{8}{3^x-3}$$

Пусть $3^x-3=t$, тогда

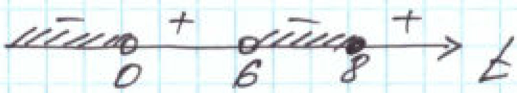
$$\frac{2}{t-6} \geqslant \frac{8}{t}$$

$$\frac{1}{t-6} - \frac{4}{t} \geqslant 0$$

$$\frac{t-4t+24}{t(t-6)} \geqslant 0$$

$$\frac{-3t+24}{t(t-6)} \geqslant 0$$

$$\frac{t-8}{t(t-6)} \leq 0 \quad \Big| \begin{array}{l} 8 \\ 0;6 \end{array}$$



$$\left[\begin{array}{l} t<0 \\ 6<t\leq 8 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 3^x-3<0 \\ 6<3^x-3\leq 8 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3^x<3^1 \\ 3^2<3^x\leq 3^{\log_3 11} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x<1 \\ 2<x\leq \log_3 11 \end{array}\right.$$

Функция $y=3^x$ возрастающая на R.

Ответ: $(-\infty;1)\cup(2;\log_3 11]$

$\boxed{15.1.}$ Замена переменной. Метод интервалов.

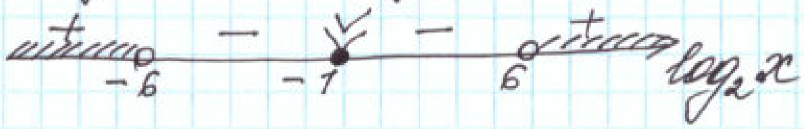
3) $\dfrac{\log_2(4x^2)+35}{\log_2^2 x-36} \geqslant -1$ ЕГЭ-2017

$$\frac{\log_2 4+\log_2 x^2+35}{(\log_2 x-6)(\log_2 x+6)}+1 \geqslant 0$$

$$\frac{2\log_2 x+37+\log_2^2 x-36}{(\log_2 x-6)(\log_2 x+6)} \geqslant 0$$

$$\frac{\log_2^2 x+2\log_2 x+1}{(\log_2 x-6)(\log_2 x+6)} \geqslant 0$$

$$\frac{(\log_2 x+1)^2}{(\log_2 x-6)(\log_2 x+6)} \geqslant 0$$



$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x<-6\\ \log_2 x=-1\\ \log_2 x>6\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\log_2 x<\log_2 2^{-6}\\ \log_2 x=\log_2 2^{-1}\\ \log_2 x>\log_2 2^{6}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}0<x<\frac{1}{64}\\ x=\frac{1}{2}\\ x>64\end{array}\right.$$

Функция $y=\log_2 x$ возрастающая на $(0;+\infty)$.

$$x\in\left(0;\frac{1}{64}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup(64;+\infty)$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{64}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup(64;+\infty)$

$\boxed{15.1.}$ Замена переменной. Метод интервалов.

4) ЕГЭ-2019

$$\frac{9^x + 2\cdot 3^x - 117}{3^x - 27} \leq 1$$

$$\frac{9^x + 2\cdot 3^x - 117 - 3^x + 27}{3^x - 27} \leq 0$$

$$\frac{(3^x)^2 + 3^x - 90}{3^x - 27} \leq 0 \qquad \text{Пусть } 3^x = t.$$

$$\frac{t^2 + t - 90}{t - 27} \leq 0$$

$$\frac{(t+10)(t-9)}{t-27} \leq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t \leq -10 \\ 9 \leq t < 27 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 3^x \leq -10 \text{ нет решений.} \\ 3^2 \leq 3^x < 3^3 \end{array}\right.$$

$2 \leq x < 3$, т.к. функция $y = 3^x$ возрастающая на R.

Ответ: $[2; 3)$

$\boxed{15.1.}$ Замена переменной. Метод интервалов.

5) ЕГЭ – 2016

$$\frac{49^x - 6\cdot 7^x + 3}{7^x - 5} + \frac{6\cdot 7^x - 39}{7^x - 7} \le 7^x + 5.$$

Пусть $7^x = t$, тогда

(*) $$\frac{t^2 - 6t + 3}{t - 5} + \frac{6t - 39}{t - 7} - t - 5 \le 0$$

$$\frac{(t^2 - 6t + 3)(t-7) + (6t-39)(t-5) - t(t^2 - 12t + 35) - 5(t^2 - 12t + 35)}{(t-5)(t-7)} \le 0$$

$$\frac{t^3 - 6t^2 + 3t - 7t^2 + 42t - 21 + 6t^2 - 69t + 195 - t^3 + 12t^2 - 35t - 5t^2 + 60t - 175}{(t-5)(t-7)} \le 0$$

$$\frac{t-1}{(t-5)(t-7)} \le 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t \le 1 \\ 5 < t < 7 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 7^x \le 1 \\ 5 < 7^x < 7 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 7^x \le 7^0 \\ 7^{\log_7 5} < 7^x < 7^1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ \log_7 5 < x < 1 \end{array}\right.$$

Функция $y = 7^x$ возрастающая на R

$$x \in (-\infty; 0] \cup (\log_7 5; 1)$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (\log_7 5; 1)$

(*) $$\frac{t^2 - 6t + 3}{t - 5} + \frac{6t - 39}{t - 7} - t - 5 \le 0$$

$$\frac{t(t-5) + 3 - t}{t - 5} + \frac{6(t-7) + 3}{t - 7} - t - 5 \le 0$$

$$t + \frac{3 - t}{t - 5} + 6 + \frac{3}{t-7} - t - 5 \le 0$$

$$\frac{3-t}{t-5} + \frac{3}{t-7} + 1 \le 0$$

$$\frac{(3-t)(t-7) + 3(t-5) + (t-5)(t-7)}{(t-5)(t-7)} \le 0$$

$$\frac{3t - t^2 - 21 + 7t + 3t - 15 + t^2 - 5t - 7t + 35}{(t-5)(t-7)} \le 0; \quad \frac{t-1}{(t-5)(t-7)} \le 0.$$

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

б) ЕГЭ-2017

$$\frac{\log_5(25x)}{\log_5 x-2}+\frac{\log_5 x-2}{\log_5(25x)}\geqslant\frac{6-\log_5 x^4}{\log_5^2 x-4}$$

$$\frac{\log_5 x+2}{\log_5 x-2}+\frac{\log_5 x-2}{\log_5 x+2}\geqslant\frac{6-4\log_5 x}{(\log_5 x-2)(\log_5 x+2)}$$

Пусть $\log_5 x=t$, тогда

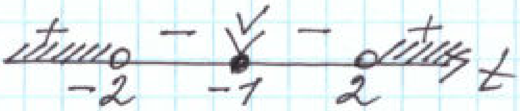
$$\frac{t+2}{t-2}+\frac{t-2}{t+2}\geqslant\frac{6-4t}{(t-2)(t+2)}$$

$$\frac{(t+2)^2+(t-2)^2-6+4t}{(t-2)(t+2)}\geqslant 0$$

$$\frac{t^2+4t+4+t^2-4t+4-6+4t}{(t-2)(t+2)}\geqslant 0$$

$$\frac{2t^2+4t+2}{(t-2)(t+2)}\geqslant 0$$

$$\frac{(t+1)^2}{(t-2)(t+2)}\geqslant 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t<-2 \\ t=-1 \\ t>2 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \log_5 x<\log_5 5^{-2} \\ \log_5 x=\log_5 5^{-1} \\ \log_5 x>\log_5 5^{2} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 0<x<\frac{1}{25} \\ x=\frac{1}{5} \\ x>25 \end{array}\right.$$

Функция $y=\log_5 x$ возрастающая на $(0;+\infty)$

$x\in\left(0;\frac{1}{25}\right)\cup\left\{\frac{1}{5}\right\}\cup(25;+\infty)$

<u>Ответ</u>: $\left(0;\frac{1}{25}\right)\cup\left\{\frac{1}{5}\right\}\cup(25;+\infty)$

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

7) ЕГЭ - 2016

$$\frac{9^{x+\frac{1}{2}}-4\cdot 3^x+5}{9^{x+\frac{1}{2}}-4\cdot 3^x+1}+\frac{5\cdot 3^x-19}{3^x-4}\le\frac{2\cdot 3^{x+2}-12}{3^{x+1}-1}$$

$$\frac{3\cdot 9^x-4\cdot 3^x+5}{3\cdot 9^x-4\cdot 3^x+1}+\frac{5\cdot 3^x-19}{3^x-4}\le\frac{18\cdot 3^x-12}{3\cdot 3^x-1}$$

Пусть $3^x=t$, тогда

$$\frac{3t^2-4t+5}{3t^2-4t+1}+\frac{5t-19}{t-4}\le\frac{18t-12}{3t-1}$$

$$\frac{(3t^2-4t+1)+4}{3t^2-4t+1}+\frac{5(t-4)+1}{t-4}\le\frac{6(3t-1)-6}{3t-1}$$

$3t^2-4t+1=0$

$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{1}{3}\end{array}\right.$

$$1+\frac{4}{3t^2-4t+1}+5+\frac{1}{t-4}\le 6-\frac{6}{3t-1}$$

$$\frac{4}{3(t-1)(t-\frac{1}{3})}+\frac{1}{t-4}+\frac{6}{3t-1}\le 0$$

$$\frac{4(t-4)+3t^2-4t+1+6(t-1)(t-4)}{3(t-1)(t-\frac{1}{3})(t-4)}\le 0$$

$$\frac{4t-16+3t^2-4t+1+6t^2-6t-24t+24}{3(t-1)(t-\frac{1}{3})(t-4)}\le 0$$

$$\frac{9t^2-30t+9}{3(t-1)(t-\frac{1}{3})(t-4)}\le 0$$

$$\frac{3t^2-10t+3}{(t-1)(t-\frac{1}{3})(t-4)}\le 0$$

$$\frac{3(t-3)(t-\frac{1}{3})}{(t-1)(t-\frac{1}{3})(t-4)}\le 0$$

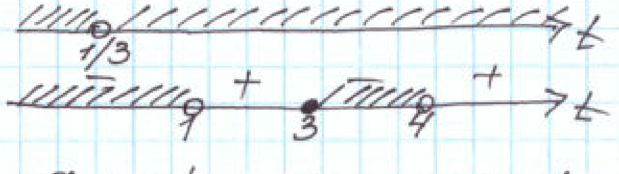
$3t^2-10t+3=0$

$t=\frac{5\pm\sqrt{25-9}}{3}$

$t=\frac{5\pm 4}{3}$

$\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\frac{1}{3}\end{array}\right.$

$$\begin{cases} t\ne\frac{1}{3} \\ \frac{t-3}{(t-1)(t-4)}\le 0\end{cases}$$



$\left[\begin{array}{l} t<1/3 \\ 1/3<t<1 \\ 3\le t<4\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 3^x<3^{-1} \\ 3^{-1}<3^x<3^0 \\ 3^1\le 3^x<3^{\log_3 4}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x<-1 \\ -1<x<0 \\ 1\le x<\log_3 4\end{array}\right.$

$y=3^x$ возрастающая на R

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup[1;\log_3 4)$

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

8) ЕГЭ – 2019

$$\frac{2^{x+5}-2^{-x}}{2^{3-x}-4^{-x}} \geqslant 2^x$$

$$\frac{32\cdot 2^x-2^{-x}}{8\cdot 2^{-x}-(2^{-x})^2}-2^x \geqslant 0$$ Пусть $2^x=t$, где $t>0$.

$$\frac{32t-\frac{1}{t}}{\frac{8}{t}-\frac{1}{t^2}}-t \geqslant 0$$

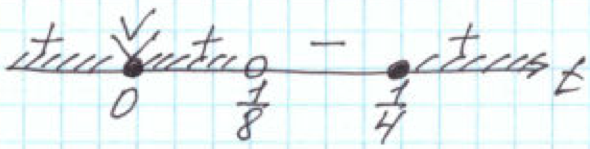
$$\frac{32t^2-1}{t} : \frac{8t-1}{t^2}-t \geqslant 0$$

$$\frac{(32t^2-1)t}{8t-1}-t \geqslant 0$$

$$\frac{32t^3-t-8t^2+t}{8t-1} \geqslant 0$$

$$\frac{8t^2(4t-1)}{8t-1} \geqslant 0$$

$$\frac{t^2(t-\frac{1}{4})}{t-\frac{1}{8}} \geqslant 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t<\frac{1}{8} \\ t\geqslant\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2^x<2^{-3} \\ 2^x\geqslant 2^{-2} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x\geqslant -2 \end{array}\right. \qquad x\in(-\infty;-3)\cup[-2;+\infty)$$

Функция $y=2^x$ возрастающая на R.

<u>Ответ</u>: $(-\infty;-3)\cup[-2;+\infty)$

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

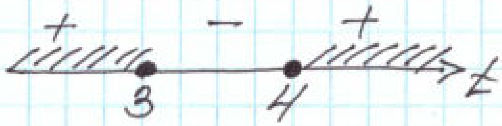
9) ЕГЭ – 2017

$$\log_2^2(25-x^2)-7\cdot\log_2(25-x^2)+12\geqslant 0$$

Пусть $\log_2(25-x^2)=t$, тогда

$$t^2-7t+12\geqslant 0$$

$$(t-3)(t-4)\geqslant 0$$



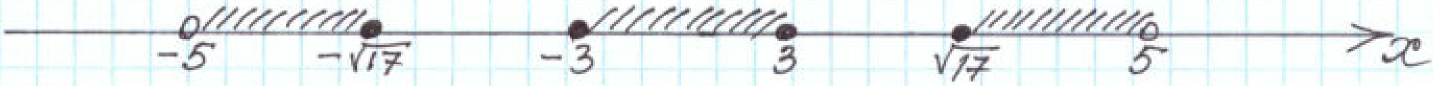
$$\left[\begin{array}{l} t\leqslant 3 \\ t\geqslant 4 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(25-x^2)\leqslant \log_2 2^3 \\ \log_2(25-x^2)\geqslant \log_2 2^4 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 0<25-x^2\leqslant 8 \\ 25-x^2\geqslant 16 \end{array}\right.$$

Функция $y=\log_2 m$ возрастающая на $(0;+\infty)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 25-x^2>0 \\ 25-x^2\leqslant 8 \end{cases} \\ 25-x^2\geqslant 16 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 17\leqslant x^2<25 \\ x^2\leqslant 9 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{17}\leqslant |x|<5 \\ |x|\leqslant 3 \end{array}\right.$$



$$x\in(-5;-\sqrt{17}]\cup[-3;3]\cup[\sqrt{17};5)$$

Ответ: $(-5;-\sqrt{17}]\cup[-3;3]\cup[\sqrt{17};5)$

$\boxed{15.1.}$ Замена переменной. Метод интервалов.

10) ЕГЭ – 2015

$$\lg^4 x - 4\lg^3 x + 5\lg^2 x - 2\lg x \geq 0.$$

Пусть $\lg x = t$, тогда

$$t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 2t \geq 0$$

$$t(t^3 - 4t^2 + 5t - 2) \geq 0$$

$$t(t-1)^2(t-2) \geq 0$$

1) $t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = 0$

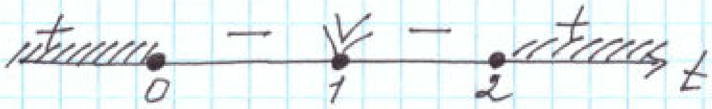
$t = 1$ корень, т.к.

$1 - 4 + 5 - 2 = 0$ верно

2)
$$\begin{array}{r|l} t^3 - 4t^2 + 5t - 2 & t-1 \\ \hline t^3 - t^2 & t^2 - 3t + 2 \\ -3t^2 + 5t - 2 & \\ -3t^2 + 3t & \\ -2t - 2 & \\ -2t - 2 & \\ 0 & \end{array}$$

3) $t^2 - 3t + 2 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l} t \leq 0 \\ t = 1 \\ t \geq 2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \lg x \leq \lg 1 \\ \lg x = \lg 10 \\ \lg x \geq \lg 100 \end{array}\right.$$

Функция $y = \lg x$ возрастающая на $(0; +\infty)$

$$\left[\begin{array}{l} 0 < x \leq 1 \\ x = 10 \\ x \geq 100 \end{array}\right. \qquad x \in (0; 1] \cup \{10\} \cup [100; +\infty)$$

<u>Ответ</u>: $(0; 1] \cup \{10\} \cup [100; +\infty)$

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

11) ЕГЭ – 2015

$$(\log_2^2 x - 2\log_2 x)^2 < 11\log_2^2 x - 22\log_2 x - 24.$$

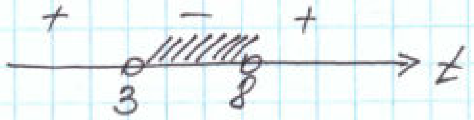
$$(\log_2^2 x - 2\log_2 x)^2 < 11(\log_2^2 x - 2\log_2 x) - 24.$$

Пусть $\log_2^2 x - 2\log_2 x = t$, тогда

$t^2 < 11t - 24$

$t^2 - 11t + 24 < 0$

$(t-3)(t-8) < 0$



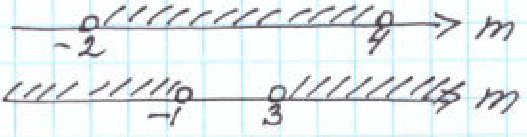
$3 < t < 8$

$$\begin{cases} \log_2^2 x - 2\log_2 x < 8 \\ \log_2^2 x - 2\log_2 x > 3 \end{cases}$$

Пусть $\log_2 x = m$

$$\begin{cases} m^2 - 2m - 8 < 0 \\ m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} -2;\ 4 \\ -1;\ 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} (m+2)(m-4) < 0 \\ (m+1)(m-3) > 0 \end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{l} -2 < m < -1 \\ 3 < m < 4 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 2^{-2} < \log_2 x < \log_2 2^{-1} \\ \log_2 2^3 < \log_2 x < \log_2 2^4 \end{array} \right.$$

Функция $y = \log_2 x$ возрастает на $(0; +\infty)$,

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \\ 8 < x < 16 \end{array} \right. \qquad x \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup (8; 16)$$

<u>Ответ</u>: $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup (8; 16)$

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

12) ЕГЭ – 2015

$$\frac{105}{\left(2^{4-x^2}-1\right)^2}-\frac{22}{2^{4-x^2}-1}+1\geqslant 0.$$

Пусть $2^{4-x^2}-1=t$, тогда

$$\frac{105}{t^2}-\frac{22}{t}+1\geqslant 0$$

$$\frac{105-22t+t^2}{t^2}\geqslant 0$$

$$\frac{t^2-22t+105}{t^2}\geqslant 0$$

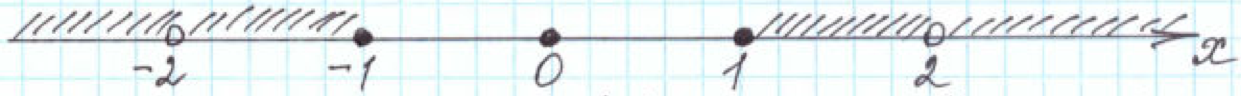
$$\frac{(t-15)(t-7)}{t^2}\geqslant 0 \quad \Bigg| \begin{array}{c} 7;\ 15 \\ 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} t<0 \\ 0<t\leq 7 \\ t\geqslant 15 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2^{4-x^2}-1<0 \\ 0<2^{4-x^2}-1\leq 7 \\ 2^{4-x^2}-1\geqslant 15 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2^{4-x^2}<2^0 \\ 2^0<2^{4-x^2}\leq 2^3 \\ 2^{4-x^2}\geqslant 2^4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 4-x^2<0 \\ 0<4-x^2\leq 3 \\ 4-x^2\geqslant 4 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2>4 \\ 1\leq x^2<4 \\ x^2\leq 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x|>2 \\ 1\leq |x|<2 \\ |x|=0 \end{array}\right.$$

Функция $y=2^m$ возрастающая на R.



$x\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1]\cup\{0\}\cup[1;2)\cup(2;+\infty)$

__Ответ:__ $(-\infty;-2)\cup(-2;-1]\cup\{0\}\cup[1;2)\cup(2;+\infty)$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование. Действия со степенями, логарифмирование.

1) ЕГЭ-2018

$$2\log_2(x\sqrt{3}) - \log_2\frac{x}{x+1} \geqslant \log_2\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)$$

I. ОДЗ: $\begin{cases} x\sqrt{3}>0 \\ \dfrac{x}{x+1}>0 \\ 3x^2+\dfrac{1}{x}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x+1>0 \\ \dfrac{3x^3+1}{x}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ 3x^3+1>0 \end{cases}$ $\boxed{x>0}$

II. $\log_2(3x^2) \geqslant \log_2\dfrac{x}{x+1} + \log_2\dfrac{3x^3+1}{x}$

$\log_2(3x^2) \geqslant \log_2\dfrac{x(3x^3+1)}{(x+1)\cdot x}$

Функция $y=\log_2 t$ возрастающая на $(0;+\infty)$

$3x^2 \geqslant \dfrac{3x^3+1}{x+1}$

$3x^2 - \dfrac{3x^3+1}{x+1} \geqslant 0$

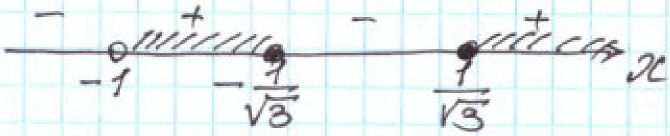
$\dfrac{3x^3+3x^2-3x^3-1}{x+1} \geqslant 0$

$\dfrac{3x^2-1}{x+1} \geqslant 0$

$3x^2-1=0$

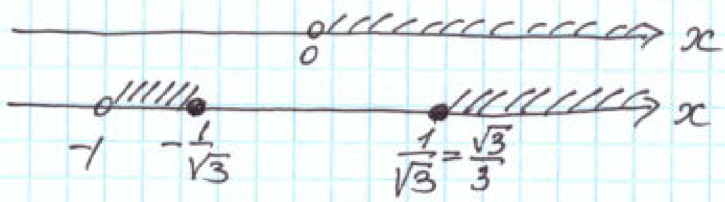
$x^2=\dfrac{1}{3}$

$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



$x\in\left(-1;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

III. С учётом ОДЗ получим:



$x\in\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$

Ответ: $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование. Действия со степенями, логарифмирование.

2) ЕГЭ-2018

$$\log_7(2x^2+12)-\log_7(x^2-x+12)\geqslant \log_7\left(2-\frac{1}{x}\right)$$

Заметим, что $2x^2+12>0$ и $x^2-x+12>0$ для любых действительных значений x, поэтому $\log_7\frac{2x^2+12}{x^2-x+12}\geqslant \log\left(\frac{2x-1}{x}\right)$.

Функция $y=\log_7 t$ возрастающая на $(0;+\infty)$.

$$\frac{2x^2+12}{x^2-x+12}\geqslant\frac{2x-1}{x}>0.$$

$$\begin{cases}\dfrac{2x^2+12}{x^2-x+12}-\dfrac{2x-1}{x}\geqslant 0\\ \dfrac{2x-1}{x}>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{2x^3+12x-2x^3+3x^2-25x+12}{(x^2-x+12)\cdot x}\geqslant 0\\ \dfrac{2x-1}{x}>0\end{cases}$$

$\cdot(x^2-x+12)$ т.к. $x^2-x+12>0$ $\forall x\in R$

$$\begin{cases}\dfrac{3x^2-13x+12}{x}\geqslant 0\\ \dfrac{2x-1}{x}>0\end{cases}$$

$3x^2-13x+12=0$

$x=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{6}$

$x=\frac{13\pm 5}{6}$

$\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\frac{4}{3}\end{array}\right.$

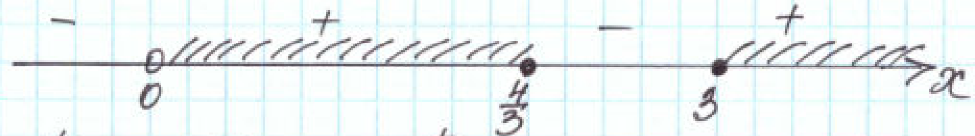
$$\begin{cases}\dfrac{3(x-3)\left(x-\frac{4}{3}\right)}{x}\geqslant 0\\ \dfrac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x}>0\end{cases}$$

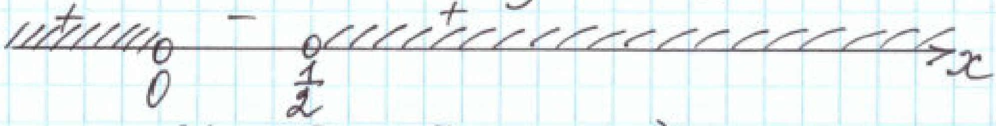
$\frac{4}{3}$; 3

0

$\frac{1}{2}$

0





$x\in\left(\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right]\cup[3;+\infty)$

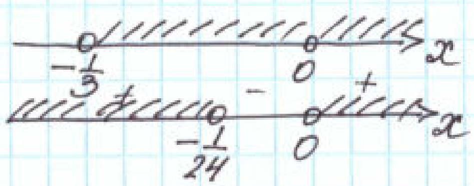
<u>Ответ</u>: $\left(\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right]\cup[3;+\infty)$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование. Действия со степенями, логарифмирование.

3) ЕГЭ – 2018

$$\log_5(3x+1)+\log_5\left(\frac{1}{72x^2}+1\right)\geqslant\log_5\left(\frac{1}{24x}+1\right)$$

I. ОДЗ: $\begin{cases}3x+1>0\\ \frac{1}{72x^2}+1>0\\ \frac{1}{24x}+1>0\end{cases}$ $\begin{cases}x>-\frac{1}{3}\\ \frac{1+72x^2}{72x^2}>0\\ \frac{1+24x}{24x}>0\end{cases}$ $\begin{cases}x>-\frac{1}{3}\\ x\neq 0\\ \frac{x+\frac{1}{24}}{x}>0\end{cases}$



$x\in\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{24}\right)\cup(0;+\infty)$.

II. $\log_5\frac{(3x+1)(1+72x^2)}{72x^2}\geqslant\log_5\frac{1+24x}{24x}$

Функция $y=\log_5 t$ возрастающая на $(0;+\infty)$

$$\frac{(3x+1)(1+72x^2)}{72x^2}\geqslant\frac{1+24x}{24x}\quad\Big/\cdot 24$$

$$\frac{3x+1+216x^3+72x^2}{3x^2}-\frac{(1+24x)\cdot 3x}{x\cdot 3x}\geqslant 0$$

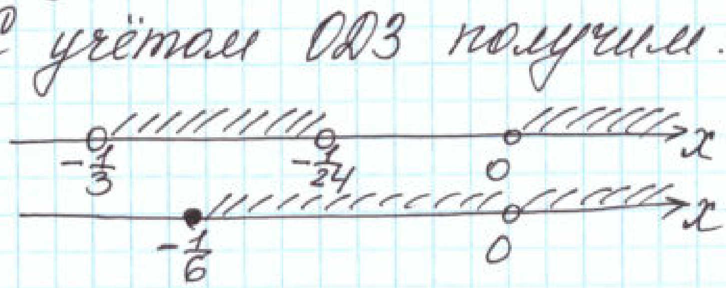
$$\frac{216x^3+72x^2+3x+1-3x-72x^2}{3x^2}\geqslant 0\quad\Big/\cdot 3$$

$$\frac{216x^3+1}{x^2}\geqslant 0$$

$$\begin{cases}x\neq 0\\ 216x^3+1\geqslant 0\end{cases}$$

$\begin{cases}x\neq 0\\ x\geqslant-\frac{1}{6}\end{cases}$ $x\in\left[-\frac{1}{6};0\right)\cup(0;+\infty)$

III. С учётом ОДЗ получим:



$x\in\left[-\frac{1}{6};-\frac{1}{24}\right)\cup(0;+\infty)$

Ответ: $\left[-\frac{1}{6};-\frac{1}{24}\right)\cup(0;+\infty)$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование. Действия со степенями, логарифмирование.

4) ЕГЭ-2018

$$\log_2(x-1)+\log_2\left(x^2+\frac{1}{x-1}\right)\le 2\cdot\log_2\frac{x^2+x-1}{2}$$

I. ОДЗ: $\begin{cases} x-1>0 \\ x^2+\dfrac{1}{x-1}>0 \\ \dfrac{x^2+x-1}{2}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>1 \\ x^2>-\dfrac{1}{x-1} \\ x^2>-(x-1) \end{cases}$ $\boxed{x>1}$

При $x>1$ второе и третье неравенства выполняются.

I способ

II. $\log_2\dfrac{(x-1)\cdot(x^3-x^2+1)}{x-1}\le\log_2\dfrac{(x^2+x-1)^2}{4}$

Функция $y=\log_2 t$ возрастающая на $(0;+\infty)$

$$x^3-x^2+1\le\frac{(x^2+x-1)^2}{4}$$

$$4x^3-4x^2+4\le x^4+x^2+1+2x^3-2x-2x^2$$

$$x^4-2x^3+3x^2-2x-3\geqslant 0$$

$$(x^4-2x^3+x^2)+(2x^2-2x)-3\geqslant 0$$

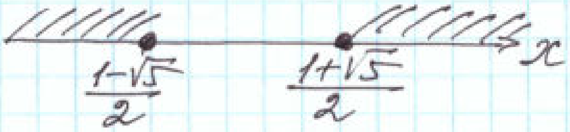
$(x^2-x)^2+2(x^2-x)-3\geqslant 0$ Пусть $x^2-x=t$

$$t^2+2t-3\geqslant 0$$

$$(t-1)(t+3)\geqslant 0$$

$$(x^2-x-1)(x^2-x+3)\geqslant 0$$

$$x^2-x-1\geqslant 0$$



1) $x^2-x+3>0$ $\forall x\in R$.

2) $x^2-x-1=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}$

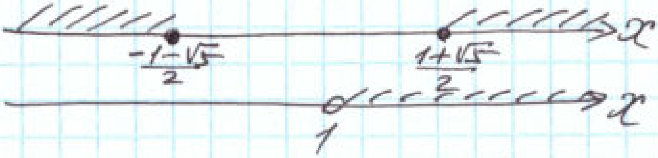
$2<\sqrt5<3$

$3<1+\sqrt5<4$

$\dfrac32<\dfrac{1+\sqrt5}{2}<2$

$\dfrac{1-\sqrt5}{2}<0$.

III. С учётом ОДЗ получим:



$$x\in\left[\frac{1+\sqrt5}{2};+\infty\right)$$

Ответ: $\left[\dfrac{1+\sqrt5}{2};+\infty\right)$

II способ $\log_2(x-1)+\log_2\left(x^2+\frac{1}{x-1}\right)\le 2\log_2\frac{x^2+x-1}{2}$

Пусть $x-1=a$, $x^2=b$, тогда

$\log_2 a+\log_2\left(b+\frac{1}{a}\right)\le 2\cdot\log_2\frac{b+a}{2}$

$a\left(b+\frac{1}{a}\right)\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$ab+1\le\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$

$4ab+4\le a^2+2ab+b^2$

$a^2-2ab+b^2-4\ge 0$

$(a-b)^2-2^2\ge 0$

$(a-b-2)(a-b+2)\ge 0$

$(x-1-x^2-2)(x-1-x^2+2)\ge 0$

$(-x^2+x-3)(-x^2+x+1)\ge 0$

$(x^2-x+3)(x^2-x-1)\ge 0.$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование. Действия со степенями, логарифмирование.

5) ЕГЭ – 2018

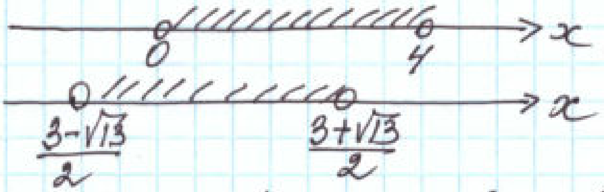
$$\log_5(4-x)+\log_5\frac{1}{x}\le\log_5\left(\frac{1}{x}-x+3\right)$$

I. ОДЗ: $\begin{cases}4-x>0\\ \frac{1}{x}>0\\ \frac{1}{x}-x+3>0\end{cases}$ $\begin{cases}0<x<4\\ \frac{1-x^2+3x}{x}>0\end{cases}$ $\begin{cases}0<x<4\\ x^2-3x-1<0\end{cases}$

$x^2-3x-1=0$ | $3<\sqrt{13}<4$ | $-4<-\sqrt{13}<-3$

$x=\frac{3\pm\sqrt{9+4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ | $6<3+\sqrt{13}<7$ | $-1<3-\sqrt{13}<0$

$3<\frac{3+\sqrt{13}}{2}<3,5$ | $-0,5<\frac{3-\sqrt{13}}{2}<0$



$x\in\left(0;\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

II. $\log_5\frac{4-x}{x}\le\log_5\left(\frac{1-x^2+3x}{x}\right)$

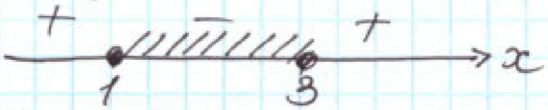
Функция $y=\log_5 t$ возрастающая на $(0;+\infty)$.

$\frac{4-x}{x}\le\frac{1-x^2+3x}{x}$ Умножим обе части неравенства на x, т.к. по ОДЗ $0<x<\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

$4-x\le 1-x^2+3x$

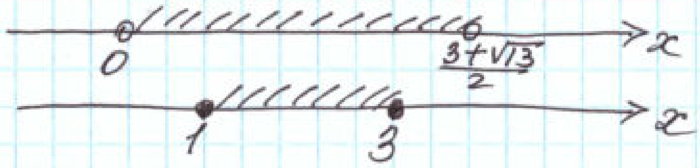
$x^2-4x+3\le 0$

$(x-1)(x-3)\le 0$



$x\in[1;3]$

III. С учётом ОДЗ получим:



$x\in[1;3]$

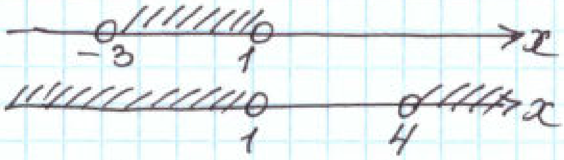
<u>Ответ:</u> $[1;3]$

$\boxed{15.2.}$ Действия с логарифмами, потенцирование. Действия со степенями, логарифмирование.

6) ЕГЭ - 2019

$$\log_4(6-6x) < \log_4(x^2-5x+4) + \log_4(x+3)$$

I. ОДЗ: $\begin{cases} 6-6x>0 \\ x^2-5x+4>0 \\ x+3>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<1 \\ (x-1)(x-4)>0 \\ x>-3 \end{cases}$ $\begin{cases} -3<x<1 \\ (x-1)(x-4)>0 \end{cases}$



$x \in (-3;1)$

II. $\log_4(6-6x) < \log_4((x-1)(x-4)(x+3))$

Функция $y=\log_4 t$ возрастающая на $(0;+\infty)$

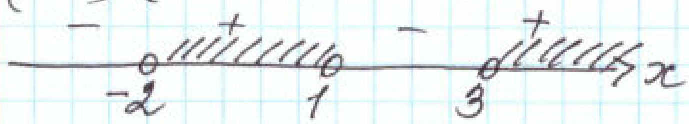
$6(1-x) < (x-1)(x-4)(x+3)$

$(x-1)(x-4)(x+3) + 6(x-1) > 0$

$(x-1)(x^2-4x+3x-12+6) > 0$

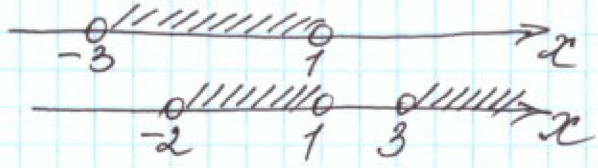
$(x-1)(x^2-x-6) > 0$

$(x-1)(x+2)(x-3) > 0$



$x \in (-2;1) \cup (3;+\infty)$

III. С учётом ОДЗ получим:



$x \in (-2;1)$

Ответ: $(-2;1)$

$\boxed{15.2.}$ Действия с логарифмами, потенцирование. Действия со степенями, логарифмирование.

7) $\log^2_{|x+1|}(x+1)^4 + \log_2(x+1)^2 \le 22$

Заметим, что $(x+1)^4 = |x+1|^4$, $(x+1)^2 = |x+1|^2$.

Пусть $|x+1| = t$, тогда

$(\log_t t^4)^2 + \log_2 t^2 \le 22$

$$\begin{cases} t > 0 \\ t \ne 1 \\ 16 + \log_2 t^2 \le 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 0 \\ t \ne 1 \\ 2\log_2 t \le 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 0 \\ t \ne 1 \\ \log_2 t \le \log_2 8 \end{cases}$$

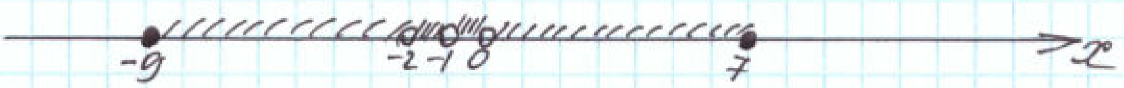
$$\begin{cases} t > 0 \\ t \ne 1 \\ t \le 8 \end{cases}$$

, т. к. функция $y = \log_2 t$ возрастающая на $(0; +\infty)$.

$$\left[\begin{array}{l} 0 < t < 1 \\ 1 < t \le 8 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 0 < |x+1| < 1 \\ 1 < |x+1| \le 8 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 0 < x+1 < 1 \\ -1 < x+1 < 0 \\ 1 < x+1 \le 8 \\ -8 \le x+1 < -1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ -2 < x < -1 \\ 0 < x \le 7 \\ -9 \le x < -2 \end{array}\right.$$



Ответ: $[-9; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 7]$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование. Действия со степенями, логарифмирование.

8) $-\log_{\frac{1}{3}} x^2 + 2\log_9(x+3) \geq 2\log_3(-x-1) + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(x+6)$.

I. ОДЗ: $\begin{cases} x^2>0 \\ x+3>0 \\ -x-1>0 \\ x+6>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 0 \\ x>-3 \\ x<-1 \\ x>-6 \end{cases}$ $x\in(-3;-1)$

II. $2\log_3|x| + \log_3(x+3) \geq 2\log_3(-x-1) + \log_3(x+6)$

$\log_3 x^2 + \log_3(x+3) \geq \log_3(-x-1)^2 + \log_3(x+6)$

$\log_3\left(x^2(x+3)\right) \geq \log_3\left((x+1)^2(x+6)\right)$

Функция $y=\log_3 t$ возрастающая на $(0;+\infty)$

$x^2(x+3) \geq (x^2+2x+1)(x+6)$

$x^3+3x^2 \geq x^3+2x^2+x+6x^2+12x+6$

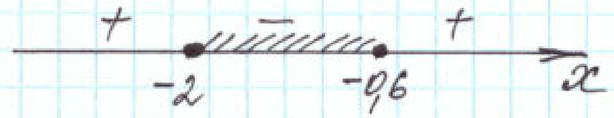
$5x^2+13x+6 \leq 0$

$5x^2+13x+6=0$

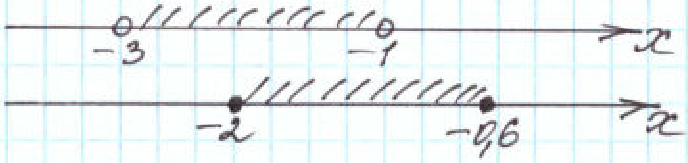
$x=\frac{-13\pm\sqrt{169-120}}{10}$

$x=\frac{-13\pm 7}{10}$

$\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-0{,}6 \end{array}\right.$



III. С учётом ОДЗ получим:



$x\in[-2;-1)$

<u>Ответ:</u> $[-2;-1)$

$\boxed{15.2.}$ Действия с логарифмами, потенцирование. Действия со степенями, логарифмирование.

9) $\log_{\sqrt[9]{8}}\left(\log_{\frac{1}{7}}(x+1)\right) \geq 3$

$\log_{\sqrt[9]{8}}\left(\log_{\frac{1}{7}}(x+1)\right) \geq \log_{\sqrt[9]{8}}\left(\sqrt[9]{8}\right)^3$

Функция $y=\log_{\sqrt[9]{8}} t$ возрастающая на $(0;+\infty)$, т.к. $\sqrt[9]{8}>1$, то

$\log_{\frac{1}{7}}(x+1) \geq \left(\left(2^3\right)^{\frac{1}{9}}\right)^3$

$\log_{\frac{1}{7}}(x+1) \geq 2$

$\log_{\frac{1}{7}}(x+1) \geq \log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{1}{7}\right)^2$

Функция $y=\log_{\frac{1}{7}} m$ убывающая на $(0;+\infty)$

$0 < x+1 \leq \frac{1}{49}$

$-1 < x \leq -\frac{48}{49}$

$x \in \left(-1; -\frac{48}{49}\right]$

<u>Ответ</u>: $\left(-1; -\frac{48}{49}\right]$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование. Действия со степенями, логарифмирование.

10) ЕГЭ-2018

$$3^{x^2}\cdot 5^{-x-1} \geqslant 3$$

$$\frac{3^{x^2}}{3} \geqslant \frac{1}{5^{x+1}}$$

$$3^{x^2-1} \geqslant 5^{1-x}$$

Функция $y=\log_3 t$ возрастающая на $(0;+\infty)$ и

$3^{x^2-1} \geqslant 5^{1-x} > 0$, тогда

$$\log_3 3^{x^2-1} \geqslant \log_3 5^{1-x}$$

$$x^2-1 \geqslant (1-x)\log_3 5$$

$$(x-1)(x+1)+(x-1)\cdot\log_3 5 \geqslant 0$$

$$(x-1)(x+1+\log_3 5) \geqslant 0$$

$$(x-1)(x+\log_3 15) \geqslant 0$$

$+$ $\quad -\log_3 15 \quad$ $-$ $\quad 1 \quad$ $+$ $\quad x$

$x \in (-\infty; -\log_3 15] \cup [1; +\infty)$

$\log_3 15 > \log_3 1$

$\log_3 15 > 0$

$-\log_3 15 < 0.$

Ответ: $(-\infty; -\log_3 15] \cup [1; +\infty)$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование. Действия со степенями, логарифмирование.

11) $\sqrt[3]{27^{2x-3}} > \sqrt{81^{\frac{6-4x}{x+1}}}$

$\sqrt[3]{\left(3^3\right)^{2x-3}} > \sqrt{\left(3^4\right)^{\frac{6-4x}{x+1}}}$

$\sqrt[3]{\left(3^{2x-3}\right)^3} > \sqrt{\left(3^{\frac{6-4x}{x+1}}\right)^4}$

$3^{2x-3} > \left(3^{\frac{6-4x}{x+1}}\right)^2$

$3^{2x-3} > 3^{\frac{12-8x}{x+1}}$

Функция $y=3^t$ возрастающая на R

$2x-3 > \frac{12-8x}{x+1}$

$\frac{(2x-3)(x+1)-(12-8x)}{x+1} > 0$

$\frac{2x^2-3x+2x-3-12+8x}{x+1} > 0$

$\frac{2x^2+7x-15}{x+1} > 0$

$\frac{2(x+5)(x-\frac{3}{2})}{x+1} > 0$

$2x^2+7x-15=0$

$x=\frac{-7\pm\sqrt{49+120}}{4}$

$x=\frac{-7\pm 13}{4}$

$\left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=\frac{3}{2} \end{array}\right.$

$-\quad +\quad -\quad +$

$-5 \quad -1 \quad \frac{3}{2} \quad x$

$x \in (-5;-1) \cup (\frac{3}{2};+\infty)$

Ответ: $(-5;-1) \cup (\frac{3}{2};+\infty)$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование. Действия со степенями, логарифмирование.

12) $5^{x+3}+5^{x+1}+2\cdot 5^x < 2^{\frac{x}{4}+6}+2^{\frac{x}{4}+1}$

$5^x(5^3+5^1+2) < 2^{\frac{x}{4}}(2^6+2^1)$

$5^x\cdot 132 < (\sqrt[4]{2})^x\cdot 66$

$5^x < (\sqrt[4]{2})^x\cdot \frac{1}{2}$, $(\sqrt[4]{2})^x > 0 \quad \forall x \in R$

$\frac{5^x}{(\sqrt[4]{2})^x} < \frac{1}{2}$

$\left(\frac{5}{\sqrt[4]{2}}\right)^x < \left(\frac{5}{\sqrt[4]{2}}\right)^{\log_{\frac{5}{\sqrt[4]{2}}}\frac{1}{2}}$, функция $y=\left(\frac{5}{\sqrt[4]{2}}\right)^x$ возрастающая на R, т.к. $\frac{5}{\sqrt[4]{2}}>1$

$x < \log_{\frac{5}{\sqrt[4]{2}}}\frac{1}{2}$

$x < -\log_{\frac{5}{\sqrt[4]{2}}}2$

$x < -\frac{\ln 2}{\ln 5-\ln\sqrt[4]{2}}$

$x < -\frac{\ln 2}{\ln 5-\frac{1}{4}\ln 2}$

$x < -\frac{4\ln 2}{4\ln 5-\ln 2}$

Можно записать так:

$\log_{\frac{5}{\sqrt[4]{2}}}\frac{1}{2}=\frac{\lg\frac{1}{2}}{\lg\frac{5}{\sqrt[4]{2}}}=$

$=\frac{-\lg 2}{\lg 5-\lg\sqrt[4]{2}}$

<u>Ответ</u>: $\left(-\infty;-\frac{4\ln 2}{4\ln 5-\ln 2}\right)$

$\boxed{15.3.}$ Смешанные неравенства. Переменное основание.

1) ЕГЭ-2018

$$\frac{6^x-4\cdot 3^x}{x\cdot 2^x-5\cdot 2^x-4x+20}\le\frac{1}{x-5}$$

$$\frac{3^x(2^x-4)}{2^x(x-5)-4(x-5)}-\frac{1}{x-5}\le 0$$

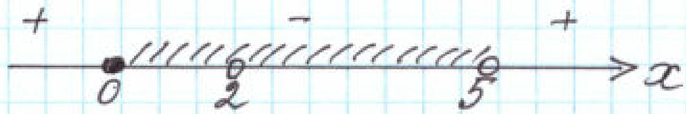
$$\frac{3^x(2^x-4)}{(x-5)(2^x-4)}-\frac{1}{x-5}\le 0$$

$$\begin{cases}2^x-4\ne 0\\ \dfrac{3^x-1}{x-5}\le 0\end{cases}$$

Знак выражения $a^{f(x)}-a^{g(x)}$ совпадает со знаком выражения $(a-1)\cdot(f(x)-g(x))$, при условиях $\begin{cases}a>0\\a\ne 1.\end{cases}$

$$\begin{cases}2^x\ne 2^2\\ \dfrac{3^x-3^0}{x-5}\le 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ne 2\\ \dfrac{x}{x-5}\le 0\end{cases}$$



$x\in[0;2)\cup(2;5)$

<u>Ответ</u>: $[0;2)\cup(2;5)$.

15.3. Смешанные неравенства. Переменное основание.

2) ЕГЭ-2019

$$\frac{25^{x^2+x-10}-(0{,}2)^{x^2-2x-7}}{0{,}5\cdot 4^{x-1}-1}\le 0$$

$$\frac{5^{2x^2+2x-20}-5^{-x^2+2x+7}}{0{,}5\cdot \frac{1}{4}\cdot 4^{x}-1}\le 0$$

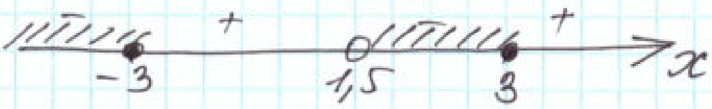
$$\frac{5^{2x^2+2x-20}-5^{-x^2+2x+7}}{2^{2x}-2^{3}}\le 0$$

Знак выражения $a^{f(x)}-a^{g(x)}$ совпадает со знаком выражения $(a-1)(f(x)-g(x))$ при условиях $\begin{cases} a>0 \\ a\ne 1 \end{cases}$.

$$\frac{(5-1)(2x^2+2x-20+x^2-2x-7)}{(2-1)(2x-3)}\le 0$$

$$\frac{3x^2-27}{2x-3}\le 0$$

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x-1{,}5}\le 0$$



$x\in(-\infty;-3]\cup(1{,}5;3]$

Ответ: $(-\infty;-3]\cup(1{,}5;3]$

15.3. Смешанные неравенства. Переменное основание.

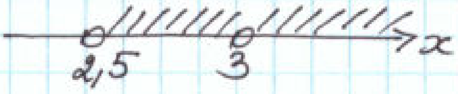
3) ЕГЭ – 2016

$$(5x-13)\cdot\log_{2x-5}(x^2-6x+10)\geq 0$$

I способ (метод интервалов)

1. Введём функцию $f(x)=(5x-13)\cdot\log_{2x-5}(x^2-6x+10)$.

2. $D(f)$: $\begin{cases} x^2-6x+10>0 \\ 2x-5>0 \\ 2x-5\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-3)^2+1>0 \quad \forall x\in R \\ x>2,5 \\ x\neq 3 \end{cases}$

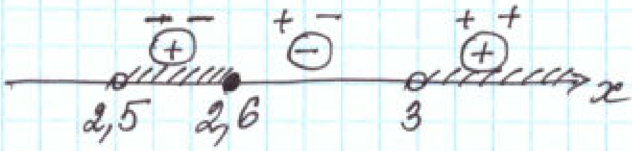


$x\in(2,5;\,3)\cup(3;+\infty)$.

3. $f(x)=0$; $\left[\begin{array}{l} 5x-13=0 \\ \log_{2x-5}(x^2-6x+10)=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 5x=13 \\ x^2-6x+10=1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=2,6 \\ x=3 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} ,\ 2,6\in D(f) \\ ,\ 3\notin D(f) \end{array}$

4.



$5x-13>0$ при $x>2,6$

$5x-13<0$ при $x<2,6$

$$\log_{2x-5}(x^2-6x+10)=\frac{\ln((x-3)^2+1)}{\ln(2x-5)}$$

$\ln((x-3)^2+1)>0$, т.к. $(x-3)^2+1>1$ на ОДЗ.

$\ln(2x-5)>0$ при $2x-5>1$; $x>3$

$\ln(2x-5)<0$ при $0<2x-5<1$; $2,5<x<3$

$f(x)\geq 0$ при $x\in(2,5;\,2,6]\cup(3;+\infty)$

Ответ: $(2,5;\,2,6]\cup(3;+\infty)$

II способ (метод замены множителей)

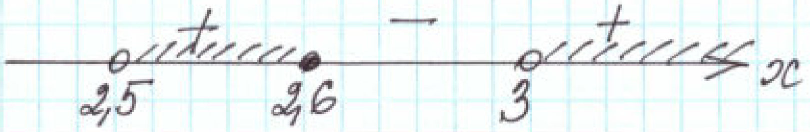
$$(5x-13)\cdot\log_{2x-5}(x^2-6x+10) \geq 0.$$

Знак выражения $\log_{h(x)} f(x)$ совпадает со знаком выражения $(h(x)-1)(f(x)-1)$ при условиях

$$\begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-5 > 0 \\ 2x-5 \neq 1 \\ x^2-6x+10 > 0 \quad \forall x \in R \\ (5x-13)(2x-5-1)(x^2-6x+10-1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2,5 \\ x \neq 3 \\ (x-2,6)(x-3)^3 \geq 0 \end{cases}$$



$$x \in (2,5;\ 2,6] \cup (3;\ +\infty)$$

Ответ: $(2,5;\ 2,6] \cup (3;\ +\infty)$

$\boxed{15.3.}$ Смешанные неравенства. Переменное основание.

4) ЕГЭ – 2016 I способ

$$\left(4^{x^2-x-6}-1\right)\cdot\log_{0{,}25}\left(4^{x^2+2x+2}-3\right)\le 0.$$

$$\left(4^{x^2-x-6}-1\right)\cdot\left(-\log_4\left(4^{x^2+2x+2}-3\right)\right)\le 0$$

$$\left(4^{x^2-x-6}-4^0\right)\cdot\log_4\left(4^{x^2+2x+2}-3\right)\ge 0$$

Знак выражения $a^{f(x)}-a^{g(x)}$ совпадает со знаком выражения $(a-1)(f(x)-g(x))$ при условиях: $\begin{cases} a>0 \\ a\ne 1 \end{cases}$

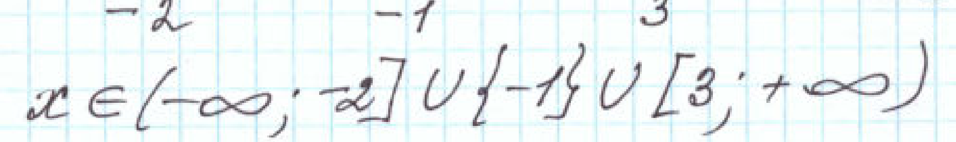
Знак выражения $\log_a f(x)$ совпадает со знаком выражения $(a-1)(f(x)-1)$ при условиях: $\begin{cases} a>0 \\ a\ne 1 \\ f(x)>0 \end{cases}$

$$\begin{cases} (4-1)(x^2-x-6-0)(4-1)\left(4^{x^2+2x+2}-3-1\right)\ge 0 \\ 4^{x^2+2x+2}>3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2-x-6)\left(4^{x^2+2x+2}-4^1\right)\ge 0 \\ 4^{x^2+2x+2}\ge 4>3;\ \forall x\in R. \end{cases}$$

$$(x+2)(x-3)(x^2+2x+2-1)\ge 0$$

$$(x+2)(x-3)(x+1)^2\ge 0 \qquad -2;\ -1;\ 3$$



$x\in(-\infty;-2]\cup\{-1\}\cup[3;+\infty)$

<u>Ответ</u>: $(-\infty;-2]\cup\{-1\}\cup[3;+\infty)$

$$\left(4^{x^2-x-6}-1\right)\cdot\log_{0,25}\left(4^{x^2+2x+2}-3\right)\le 0.$$

II способ

1. ОДЗ: $4^{x^2+2x+2}-3>0$

$$4^{(x+1)^2+1}>3$$

$$(x+1)^2\ge 0 \Rightarrow (x+1)^2+1\ge 1 \Rightarrow 4^{(x+1)^2+1}\ge 4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4^{x^2+2x+2}>3$ при любых значениях x.

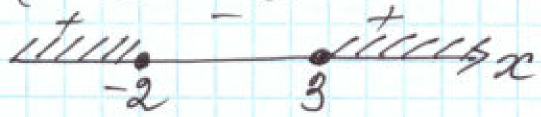
2. $\begin{cases}4^{x^2-x-6}-1\ge 0\\ \log_{0,25}\left(4^{x^2+2x+2}-3\right)\le 0\end{cases}$ или $\begin{cases}4^{x^2-x-6}-1\le 0\\ \log_{0,25}\left(4^{x^2+2x+2}-3\right)\ge 0\end{cases}$

$\begin{cases}4^{x^2-x-6}\ge 4^0\\ 4^{x^2+2x+2}-3\ge 1\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}4^{x^2-x-6}\le 4^0\\ 4^{x^2+2x+2}-3\le 1\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-x-6\ge 0\\ x^2+2x+2\ge 1\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}x^2-x-6\le 0\\ x^2+2x+2\le 1\end{cases}$

$\begin{cases}(x+2)(x-3)\ge 0\\ (x+1)^2\ge 0;\ \forall x\in R\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}(x+2)(x-3)\le 0\\ (x+1)^2\le 0\end{cases}$

$(x+2)(x-3)\ge 0$ $\qquad$ $\begin{cases}(x+2)(x-3)\le 0\\ x=-1\end{cases}$



$x\in(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$

$x=-1.$

Объединим полученные решения:

$x\in(-\infty;-2]\cup\{-1\}\cup[3;+\infty)$

<u>Ответ</u>: $(-\infty;-2]\cup\{-1\}\cup[3;+\infty)$

15.3. Смешанные неравенства. Переменное основание.

5) ЕГЭ – 2017

$$\frac{\log_2(2x^2-17x+35)-1}{\log_7(x+6)} \le 0$$

$$\frac{\log_2(2x^2-17x+35)-\log_2 2}{\log_7(x+6)} \le 0$$

Знак выражения $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ совпадает со знаком выражения $(a-1)(f(x)-g(x))$ при условиях: $\begin{cases} a>0 \\ a\ne 1 \\ f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$

Знак выражения $\log_a f(x)$ совпадает со знаком выражения $(a-1)(f(x)-1)$ при условиях: $\begin{cases} a>0 \\ a\ne 1 \\ f(x)>0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x^2-17x+35>0 \\ x+6>0 \\ \dfrac{(2x^2-17x+35-2)(2-1)}{(x+6-1)(7-1)} \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x-5)(x-3{,}5)>0 \\ x>-6 \\ \dfrac{2x^2-17x+33}{x+5} \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-5)(x-3{,}5)>0 \\ x>-6 \\ \dfrac{(x-3)(x-5{,}5)}{x+5} \le 0 \end{cases}$$

$3{,}5\ ;\ 5$

-6

$3\ ;\ 5{,}5$

-5

$2x^2-17x+35=0$

$$x=\frac{17\pm\sqrt{289-280}}{4}$$

$$x=\frac{17\pm 3}{4}$$

$$\left[\begin{aligned} x&=5 \\ x&=3{,}5 \end{aligned}\right.$$

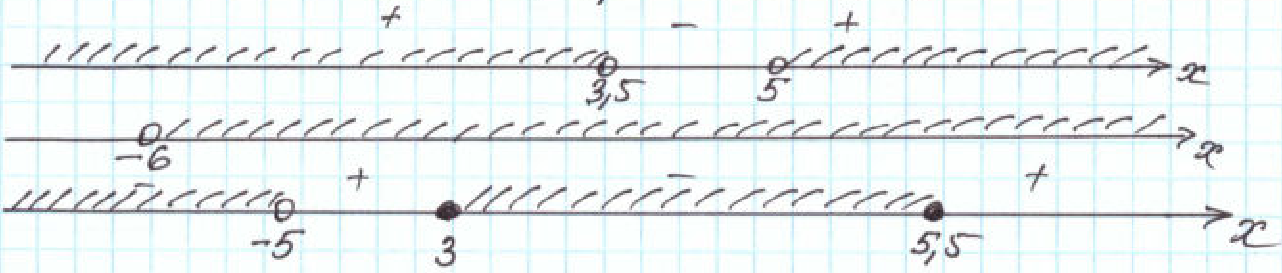
$2x^2-17x+33=0$

$$x=\frac{17\pm\sqrt{289-264}}{4}$$

$$x=\frac{17\pm 5}{4}$$

$$\left[\begin{aligned} x&=3 \\ x&=5{,}5 \end{aligned}\right.$$

$-6 < -5 < 3 < 3,5 < 5 < 5,5$



$x \in (-6;-5) \cup [3;3,5) \cup (5;5,5]$

Ответ: $(-6;-5) \cup [3;3,5) \cup (5;5,5]$

15.3. Смешанные неравенства. Переменное основание.

б) $\log_{3-x}(2x+1)\cdot\log_{3x+4}(4-x)\le 0$

Знак выражения $\log_{h(x)} f(x)$ совпадает со знаком выражения $(h(x)-1)(f(x)-1)$ при условиях: $\begin{cases} h(x)>0 \\ h(x)\ne 1 \\ f(x)>0 \end{cases}$.

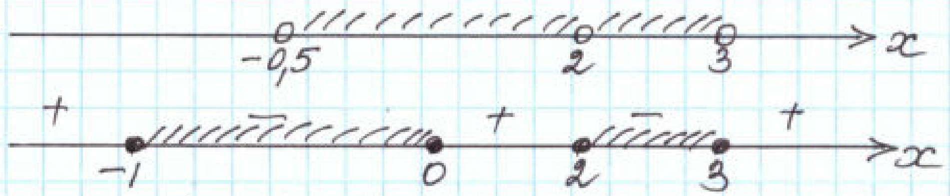
$$\begin{cases} 3-x>0 \\ 3-x\ne 1 \\ 2x+1>0 \\ 3x+4>0 \\ 3x+4\ne 1 \\ 4-x>0 \\ (3-x-1)(2x+1-1)(3x+4-1)(4-x-1)\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<3 \\ x\ne 2 \\ x>-\frac{1}{2} \\ x>-\frac{4}{3} \\ x\ne -1 \\ x<4 \\ (2-x)\cdot 2x\cdot(3x+3)(3-x)\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}<x<3 \\ x\ne 2 \\ x(x-2)(x+1)(x-3)\le 0 \end{cases}$$

$-\frac{1}{2}$; 3
2
-1 ; 0 ; 2 ; 3

$$-1<-\frac{1}{2}<0<2<3$$



$x\in(-0,5;0]\cup(2;3)$

Ответ: $(-0,5;0]\cup(2;3)$

$\boxed{15.3.}$ Смешанные неравенства.
Переменное основание.

7) $\log_{1-\frac{1}{(x-1)^2}}\left(\dfrac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2}\right)\le 0$

Знак выражения $\log_{h(x)} f(x)$ совпадает со знаком выражения $(h(x)-1)(f(x)-1)$ при условиях: $\begin{cases} h(x)>0 \\ h(x)\ne 1 \\ f(x)>0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 1-\dfrac{1}{(x-1)^2}>0 \\ 1-\dfrac{1}{(x-1)^2}\ne 1 \\ \dfrac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2}>0 \\ \left(1-\dfrac{1}{(x-1)^2}-1\right)\left(\dfrac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2}-1\right)\le 0 \end{cases}$$

$x^2+5x+8>0$ при любых x, т.к. $D<0$

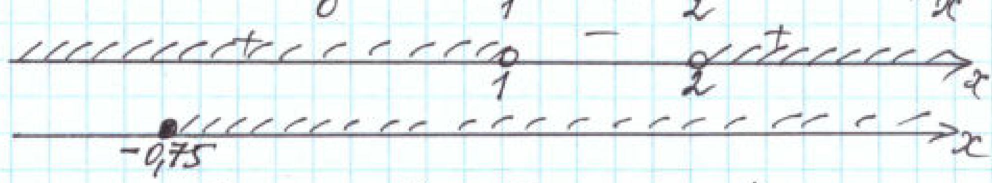
$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}>0 \\ \dfrac{1}{(x-1)^2}\ne 0 \text{ — выполняется при } x\ne 1. \\ x^2-3x+2>0 \\ \dfrac{1}{(x-1)^2}\cdot\left(\dfrac{x^2+5x+8-x^2+3x-2}{x^2-3x+2}\right)\ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}>0 \\ (x-1)(x-2)>0 \\ 8x+6\ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}>0 \\ (x-1)(x-2)>0 \\ x\ge -0{,}75 \end{cases}$$

$0;\ 2$
1

$1;\ 2$

$-0{,}75$



$x\in[-0{,}75;\,0)\cup(2;+\infty)$

Ответ: $[-0{,}75;\,0)\cup(2;+\infty)$

15.3. Смешанные неравенства. Переменное основание.

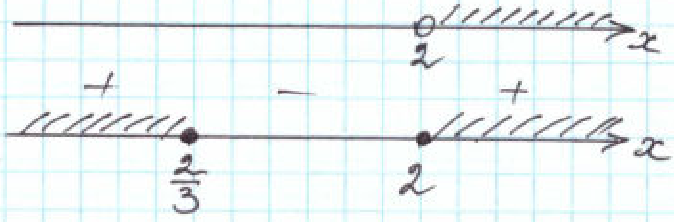
8) $\log_{\frac{x}{2}}(x^2-2x+1) \geq 2.$

$$\log_{\frac{x}{2}}(x^2-2x+1) \geq \log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{4}\right)$$

$$\begin{cases} 0 < \frac{x}{2} < 1 \\ 0 < x^2-2x+1 \leq \frac{x^2}{4} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} > 1 \\ x^2-2x+1 \geq \frac{x^2}{4} > 0 \end{cases}$$

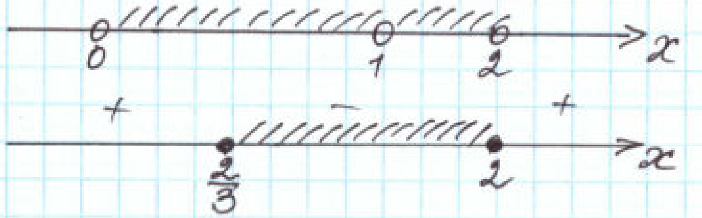
$$\begin{cases} 0 < x < 2 \\ (x-1)^2 > 0 \\ 4x^2-8x+4-x^2 \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 2 \\ x \neq 0 \\ 4x^2-8x+4-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 2 \\ x \neq 1 \\ 3x^2-8x+4 \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 2 \\ 3(x-2)(x-\frac{2}{3}) \geq 0 \end{cases}$$



$x \in (2; +\infty).$

$$\begin{cases} 0 < x < 2 \\ x \neq 1 \\ 3(x-2)(x-\frac{2}{3}) \leq 0 \end{cases}$$



$x \in [\frac{2}{3}; 1) \cup (1; 2)$

Объединим полученные решения:

$x \in [\frac{2}{3}; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

<u>Ответ</u>: $[\frac{2}{3}; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

$\boxed{15.3.}$ Смешанные неравенства. Переменное основание.

9) $\log_{x^3-9x^2+27x-27}(9-x) \geq 0$

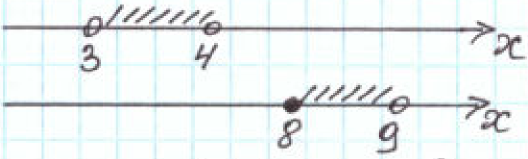
$\log_{(x-3)^3}(9-x) \geq 0$

$\frac{1}{3}\cdot\log_{x-3}(9-x) \geq 0$

$\log_{x-3}(9-x) \geq 0$

$\begin{cases} 0 < x-3 < 1 \\ 0 < 9-x \leq 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-3 > 1 \\ 9-x \geq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3 < x < 4 \\ 8 \leq x < 9 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 4 \\ x \leq 8 \end{cases}$



$x \in (4; 8]$

нет решений

<u>Ответ:</u> $(4; 8]$

15.3. Смешанные неравенства. Переменное основание.

10) $\log_{5-x} \dfrac{x+2}{(x-5)^4} \geqslant -4$

I. ОДЗ: $\begin{cases} 5-x>0 \\ 5-x \neq 1 \\ \dfrac{x+2}{(x-5)^4}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<5 \\ x\neq 4 \\ \dfrac{x+2}{(x-5)^4}>0 \end{cases}$

$x \in (-2; 4) \cup (4; 5)$

II. $\log_{5-x}(x+2) - \log_{5-x}(5-x)^4 \geqslant -4.$

$\log_{5-x}(x+2) - 4 + 4 \geqslant 0$

$\log_{5-x}(x+2) \geqslant 0$

$(5-x-1)(x+2-1) \geqslant 0$

$(4-x)(x+1) \geqslant 0$

$(x-4)(x+1) \leqslant 0$

$x \in [-1; 4]$.

III. С учётом ОДЗ получим:

$x \in [-1; 4)$

Ответ: $[-1; 4)$