ЛЮДМИЛА ИВАНОВНА СКРИПКА

Задание №14

Подборка Александра Томилина

Рукописный вариант

2020 г

Содержание

Задание №14.1. Кубы.

1) (ЕГЭ-2018)

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми AC и BD_1 равен $90°$.

б) Найдите расстояние между прямыми AC и BD_1.

2) (ЕГЭ-2017)

Длина диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 3. На луче A_1C отмечена точка P так, что $A_1P = 4$.

а) Докажите, что $PBDC_1$ — правильный тетраэдр.

б) Найдите длину отрезка AP.

3) (ЕГЭ-2016)

На ребрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.

4) (ЕГЭ-2015)

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$.
Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 1 : 2$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите объем большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

5) (ЕГЭ-2015)

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. На ребре BB_1 отмечена точка K так, что $BK = 3$. Плоскость α проходит через точки C_1 и K, параллельна прямой BD_1 и пересекает ребро A_1B_1 вточке P.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости BB_1C.

Задание №14.1. Ответы.

1) $\sqrt{6}$.

2) $\sqrt{11}$.

3) $\dfrac{12\sqrt{26}}{13}$.

4) $\dfrac{1075}{9}$.

5) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{17}}{3}$.

Задание №14.1 (ДЗ). Кубы.

1) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 2.

а) Докажите, что угол между прямыми AD_1 и A_1B равен 60°.

б) Найдите расстояние между прямыми AD_1 и A_1B.

2) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 3. На диагонали A_1C отмечена точка P так, что $A_1P : PC = 2 : 1$.

а) Докажите, что точка P принадлежит плоскости BC_1D.

б) Найдите расстояние от точки P до прямой AB.

3) На ребрах CD и A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 3$, а $D_1Q = 4$. Плоскость BPQ пересекает ребро DD_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра DD_1.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости BPQ.

4) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 12. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1N : ND_1 = 2 : 1$, где N — точка пересечения плоскости α с ребром A_1D_1.

б) Найдите объем большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

5) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6. На ребре BB_1 отмечена точка K так, что $BK = 4$. Точка M — середина ребра A_1B_1.

а) Докажите, что прямая BD_1 параллельна плоскости C_1KM.

б) Найдите угол наклона плоскости C_1KM к плоскости CC_1D.

Задание №14.1 (ДЗ). Ответы.

1) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

2) $\sqrt{5}$.

3) $\dfrac{48\sqrt{29}}{29}$.

4) 1152.

5) $\operatorname{arctg}\sqrt{13}$.

Задание №14.2. Четырехугольные призмы.

1) (ЕГЭ-2015)

Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K — середина ребра BB_1. Через точки K и C_1, проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

2) (ЕГЭ-2016)

В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{3}$. На ребрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причем $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

3) (ЕГЭ-2017)

Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

4) (ЕГЭ-2017)

Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.

б) Найдите объем призмы, если $A_1C = BD = 2$.

5) (ЕГЭ-2018)

На ребре AA_1 правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка K, причем $AK : KA_1 = 1 : 3$. Через точки K и B проведена плоскость α, параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M — середина ребра DD_1.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если $AB = 5$, $AA_1 = 4$.

Задание №14.2. Ответы.

1) 16.

2) 55.

3) $\operatorname{arctg}\dfrac{5}{3}$.

4) $\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$.

5) $15\sqrt{3}$.

Задание №14.2 (ДЗ). Четырехугольные призмы.

1) Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной 2, высота призмы равна 4. Точки M и K — середины ребер DD_1 и B_1C_1, соответственно. Через точку K проведена плоскость α, параллельная плоскости AMC.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

2) В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{6}$. На ребрах DD_1, BC и A_1B_1 отмечены точки M, K и N соответственно, причем $DM = \sqrt{6}$, $BK = B_1N = 2$. Плоскость MNK пересекает ребра CD и A_1D_1 в точках E и F соответственно.

а) Докажите, что $KEFN$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

3) Точка M — середина ребра CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сечением этого параллелепипеда плоскостью α, содержащей прямую AM и параллельной прямой BD, является ромб.

а) Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AB = 3,\ AA_1 = 4$.

4) Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$. Точки M и N — середины ребер AB и A_1D_1, соответственно.

а) Докажите, что прямые AC и MN перпендикулярны.

б) Найдите объем призмы, если $AB = 2,\ MN = \sqrt{13},\ \angle BDB_1 = 60^\circ$.

5) На боковых ребрах AA_1 и CC_1 правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки K и N соответственно, причем $AK : KA_1 = C_1N : NC = 2 : 3$. Плоскость α содержит прямую KM, параллельна прямой BD и пересекает ребро BB_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M — середина ребра BB_1.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если $AB = 2,\ AA_1 = 5$.

Задание №14.2 (ДЗ). Ответы.

1) $3\sqrt{2}$.

2) 40.

3) $\operatorname{arctg}\sqrt{10}$.

4) 12.

5) $3\sqrt{2}$.

Задание №14.3. Треугольные призмы.

1) (ЕГЭ-2016)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На ребрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причем $AM = B_1N = C_1K = 2$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

2) (ЕГЭ-2016)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре B_1C_1 отмечена точка L так, что $B_1L = 1$. Точки K и M — середины ребер AB и A_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объем пирамиды, вершина которой — точка M, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

3) (ЕГЭ-2018)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 2. Точка M — середина ребра AA_1.

а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C.

4) (ЕГЭ-2019)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 6. M — середина ребра A_1C_1, O — точка пересечения диагоналей грани ABB_1A_1.

а) Докажите, что точка пересечения прямой OC_1 с четырехугольником, являющимся сечением призмы плоскостью ABM, совпадает с точкой пересечения диагоналей этого четырехугольника.

б) Найдите угол между прямой OC_1 и плоскостью ABM.

5) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N — середины ребер AB и BC, соответственно. Точка K принадлежит боковому ребру AA_1, $AK : KA_1 = 2 : 1$.

а) Докажите, что прямая A_1N параллельна плоскости CMK.

б) Найдите расстояние между прямой A_1N и плоскостью CMK, если известно, что $AB = 4$, $AA_1 = 3$.

Задание №14.3. Ответы.

1) 15.

2) $5\sqrt{3}$.

3) $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

4) $\arccos\dfrac{13}{14}$.

5) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Задание №14.3 (ДЗ). Треугольные призмы.

1) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{15}$. На ребрах $AB,\ A_1B_1$ и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причем $AM = B_1N = 3,\ C_1K = 2$.

а) Пусть P — точка пересечения плоскости MNK с ребром CC_1. Докажите, что треугольник MNP является равносторонним.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

2) (ЕГЭ-2016)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L — середины ребер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

3) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 4. Точка M — середина ребра BC. На ребре BB_1 отмечена точка N так, что $B_1N = 1$.

а) Докажите, что прямые AN и A_1M перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AN и A_1M.

4) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 3. Точки M и N — середины ребер A_1B_1 и B_1C_1, соответственно.

а) Докажите, что точка пересечения прямой CM с четырехугольником, являющимся сечением призмы плоскостью ABN, совпадает с точкой пересечения диагоналей этого четырехугольника.

б) Найдите угол между прямой CM и плоскостью ABN.

5) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N — середины ребер AB и A_1C_1, соответственно. Точка K принадлежит боковому ребру AA_1, $AK : KA_1 = 2 : 1$.

а) Докажите, что прямая BN параллельна плоскости CMK.

б) Найдите расстояние между прямой BN и плоскостью CMK, если известно, что $AB = 2,\ AA_1 = 3$.

Задание №14.3 (ДЗ). Ответы.

1) $28\sqrt{3}$.

2) $\dfrac{3}{4}$.

3) $\dfrac{8\sqrt{21}}{35}$.

4) $\arccos\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.

5) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Задание №14.4. Четырехугольные пирамиды.

1) (ЕГЭ-2015)

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 5. На ребрах $SA,\ AB,\ BC$ взяты точки $P,\ Q,\ R$ соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.

а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD.

б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR.

2) (ЕГЭ-2015)

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{5}$ и $BC = 2$. Длины боковых ребер пирамиды $SA = \sqrt{7},\ SB = 2\sqrt{3},\ SD = \sqrt{11}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

3) (ЕГЭ-2016)

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 16, а высота равна 4.
На ребрах $AB,\ CD$ и AS отмечены точки $M,\ N$ и K соответственно, причем $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC.

4) (ЕГЭ-2017)

Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причем $AB = 3\sqrt{2},\ BC = 6$.
Основание высоты пирамиды совпадает с точкой пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$.
Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB.

а) Докажите, что точка P — середина BQ.

б) Найдите угол между гранями SBA и SBC, если $SD = 9$.

5) (ЕГЭ-2017)

В основании пирамиды $PABCD$ — трапеция $ABCD$ с большим основанием AD. Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90 градусов, плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, а прямые AB и CD пересекаются в точке K.

а) Докажите, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD.

б) Найдите объем пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 8.

6) (ЕГЭ-2018)

На ребре AB правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка Q, причем $AQ : QB = 1 : 2$. Точка P — середина ребра AS.

а) Докажите, что плоскость DPQ перепендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите площадь сечения DPQ, если площадь сечения DSB равна 6.

7) (ЕГЭ-2019)

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ $AB = 7,\ SA = 14$. На ребрах CD и SC взяты точки N и K соответственно, причем $DN : NC = SK : KC = 2 : 5$. Плоскость α содержит прямую NK и параллельна ребру SA.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой BC.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости α.

Задание №14.4. Ответы.

1) $\dfrac{7}{2}$.

2) 30°.

3) $\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$.

4) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{136}}{136}\right)$.

5) 6.

6) $\sqrt{5}$.

7) $\dfrac{\sqrt{210}}{3}$.

Задание №14.4 (ДЗ). Четырехугольные пирамиды.

1) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно 3, а боковое ребро равно $\sqrt{6}$. На ребрах AB и BC взяты точки P и Q соответственно так, что $PA = QC = 1$.

а) Докажите, что плоскость PQS перпендикулярна ребру SD.

б) Найдите расстояние от вершины B до плоскости PQS.

2) В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 6$. Точка M — середина ребра AD. Известно, что $SA = SD = 4,\ SB = 5$.

а) Докажите, что SM — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой BM и плоскостью CSD.

3) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 8, а высота равна $4\sqrt{7}$. На ребрах $AB,\ SB$ и SC отмечены точки $K,\ M$ и N соответственно, причем $AK = 2$ и $SM = SN = 3$.

а) Докажите, что плоскости KMN и ASD параллельны.

б) Найдите расстояние от точки N до плоскости ASD.

4) Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причем $AB = 10,\ BC = 5\sqrt{2}$. Боковое ребро SA перпендикулярно основанию и равно 10. Из вершин B и D опущены перпендикуляры BP и DQ на ребро SC.

а) Докажите, что точка P — середина CQ.

б) Найдите угол между плоскостями SBC и SCD.

5) В основании пирамиды $PABCD$ — трапеция $ABCD$ с большим основанием AD. Прямые AB и CD пересекаются в точке K, точка M — середина AD. Известно, что $AD = 2KM$, а плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания.

а) Докажите, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD.

б) Найдите объем пирамиды $PAKM$, если высота пирамиды $PABCD$ равна 1, $BC = 2,\ AB = 3,\ CD = 4$.

6) На ребре AS правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка Q, причем $AQ : QS = 2 : 1$. Точка P — середина ребра AB.

а) Докажите, что плоскость DPQ перепендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите площадь сечения DPQ, если площадь сечения DSB равна 3.

7) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S на ребре SB взята точка K так, что $SK : KB = 1 : 3$. Точки M и N — середины ребер CD и SC соответственно.

а) Докажите, что плоскость KMN параллельна прямой AC.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости KMN если $AB = 2\sqrt{2},\ SA = 4$.

Задание №14.4 (ДЗ). Ответы.

1) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

2) $\arcsin\dfrac{\sqrt{14}}{8}$.

3) $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

4) $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

5) $1,96$.

6) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

7) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Задание №14.5. Треугольные пирамиды.

1) (ЕГЭ-2015)

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N — середины ребер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от вершины C.

б) Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

2) (ЕГЭ-2016)

В треугольной пирамиде $ABCD$ двугранные углы при ребрах AD и BC равны. $AB = BD = CD = AC = 5$.

а) Докажите, что $AD = BC$.

б) Найдите объем пирамиды $ABCD$, если двугранные углы при ребрах AD и BC равны 60°.

3) (ЕГЭ-2016)

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а высота равна 1. На ребрах AB, AC и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причем $AM = AN = 3$ и $AK = \frac{7}{4}$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC.

4) (ЕГЭ-2017)

На ребрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причем $AM : MB = CN : NB = 3 : 1$. Точки P и Q — середины ребер DA и DC соответственно.

а) Докажите, что точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

б) Найдите, в каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды.

5) (ЕГЭ-2017)

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 17$, $PB = 10$, $\cos\angle PBA = \frac{32}{85}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C. Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды $PABC$.

6) (ЕГЭ-2018)

В правильной пирамиде $SABC$ с вершиной S точки M и N — середины ребер AB и BC соответственно. На ребре SA отмечена точка K. Сечение пирамиды плоскостью MNK является четырехугольником, диагонали которого пересекаются в точке Q.

а) Докажите, что точка Q лежит на высоте пирамиды.

б1) Найдите угол между плоскостями MNK и ABC, если $AB = 6$, $SA = 12$, $SK = 6$.

б2) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MNK, если $AB = 12$, $SA = 15$, $SK = 6$.

7) (ЕГЭ-2019)

Дана пирамида $SABC$, в которой $SC = SB = AB = AC = \sqrt{17}$, $SA = BC = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что ребро SA перпендикулярно ребру BC.

б) Найдите расстояние между ребрами BC и SA.

Задание №14.5. Ответы.

1) $\dfrac{2750\sqrt{3}}{3}$.

2) $\dfrac{10\sqrt{15}}{3}$.

3) $\dfrac{9\sqrt{39}}{26}$.

4) $21 : 11$.

5) 120.

6.1) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$; **6.2)** $\dfrac{162\sqrt{51}}{25}$.

7) $\sqrt{7}$.

Задание №14.5 (ДЗ). Треугольные пирамиды.

1) В правильном тетраэдре $SABC$ на ребрах SA, SB и BC отмечены точки M, N и K соответственно, причем $AB = 9$, $AM = BN = 6$ и $BK = 2$.

а) Докажите, что плоскость MNK перпендикулярна плоскости ABC.

б) Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью MNK.

2) В треугольной пирамиде $ABCD$ известно, что $AC = BC$ и $AD = BD$.

а) Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны.

б) Найдите объем пирамиды $ABCD$, если двугранный угол при ребре CD равен $90°$, $AC = 3$, $AD = 4$, $CD = 5$.

3) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а высота равна 2.
На ребрах AB, AC и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причем $AM = AN = 2$ и $AK = \dfrac{4}{3}$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC.

4) На ребрах AD и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно, причем $AP : PD = BQ : QC = 1 : 2$. Точки M и N — середины ребер AB и CD соответственно.

а) Докажите, что точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

б) Найдите, в каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды.

5) В треугольной пирамиде $PABC$ известно, что $AP = BP = CP$. Основанием высоты этой пирамиды, опущенной из вершины P является середина ребра AB.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды $PABC$, если известно, что $AC = AP = 8$, $\cos\angle APB = \dfrac{7}{32}$.

6) В правильном тетраэдре $SABC$ ребро равно 20. На ребрах AB, AS и CS отмечены точки M, N и K соответственно, причем $AM = AN = 5$, а $BK = 8$.

а) Докажите, что центр грани ABC принадлежит плоскости MNK.

б1) Найдите угол между плоскостями MNK и BCS.

б2) Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью MNK.

7) В треугольной пирамиде $SABC$ отмечены точки пересечения медиан граней ASB и BSC — точки M и N, соответственно.

а) Докажите, что прямая MN параллельна плоскости ABC.

б) Найдите расстояние между прямыми MN и BC, если все ребра пирамиды $SABC$ равны 6.

Задание №14.5 (ДЗ). Ответы.

1) $35\sqrt{2}$.

2) $4,8$.

3) $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

4) $1:1$ (пополам).

5) $8\sqrt{39}$.

6) $\arccos\dfrac{7\sqrt{249}}{249}$; **6.2)** $\dfrac{39\sqrt{83}}{4}$.

7) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Задание №14.6. Тела вращения.

1) (ЕГЭ-2018)

В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки A и B, на окружности верхнего основания отмечены точки B_1 и C_1 так, что BB_1 является образующей, перпендикулярной основаниям, а AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что прямые AB и B_1C_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AC_1 и BB_1, если $AB = 8,\ B_1C_1 = 15$.

2) (ЕГЭ-2018)

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки $A,\ B$ и C, на окружности другого основания — точка C_1, причем CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30°,\ AB = \sqrt{2},\ CC_1 = 2$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен $45°$.

б) Найдите объем цилиндра.

3) (ЕГЭ-2019)

Радиус основания конуса с вершиной S и центром основания O равен 5, а его высота равна $\sqrt{51}$.
Точка M — середина образующей SA конуса, а точки N и B лежат на основании конуса, причем прямая MN параллельна образующей конуса SB.

а) Докажите, что угол ANO — прямой.

б) Найдите угол между прямой BM и плоскостью основания конуса, если $AB = 8$.

4) Диаметр окружности основания цилиндра равен 34, образующая цилиндра равна $4\sqrt{6}$. Плоскость α пересекает основания цилиндра по хордам длины 16 и 30. Расстояние между этими хордами равно 25.

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от плоскости α.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью основания цилиндра.

5) Радиус основания конуса равен 12, а высота конуса равна 5.

а) Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и взаимно перпендикулярные образующие.

б) Найдите расстояние от плоскости этого сечения до центра основания конуса.

6) В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 4 вписана сфера. Точка M — середина ребра DD_1. Плоскость α параллельна прямой AC и проходит через точки B и M.

а) Постройте сечение куба плоскостью α.

б) Найдите длину линии пересечения плоскости α и вписанной в куб сферы.

Задание №14.6. Ответы.

1) $\dfrac{120}{17}$.

2) 4π.

3) 30°.

4) $\arccos 0,92$.

5) $\dfrac{5\sqrt{119}}{13}$.

6) $\dfrac{4\sqrt{7}\pi}{3}$.

Задание №14.6 (ДЗ). Тела вращения.

1) В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки A и B, на окружности верхнего основания отмечены точки B_1 и C_1 так, что BB_1 является образующей, перпендикулярной основаниям, а прямые AB и B_1C_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что прямая AC_1 пересекает ось цилиндра.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если $AB = 9,\ B_1C_1 = 12,\ BB_1 = 4$.

2) В цилиндре на окружности нижнего основания выбраны точки $A,\ B$ и C так, что $AC = BC,\ AB$ — диаметр основания. Точка O_1 — центр верхнего основания цилиндра, на окружности этого основания выбрана точка C_1 так, что CC_1 — образующая цилиндра, перпендикулярная основаниям. Известно, что $\cos\angle AC_1B = 0,6$.

а) Докажите, что треугольник AO_1B — равносторонний.

б) Найдите объем цилиндра, если $CC_1 = \sqrt{6}$.

3) Радиус основания конуса с вершиной S и центром основания O равен 13, а его высота равна $3\sqrt{41}$. На окружности основания конуса отмечены точки A и B. Точка M — середина отрезка SA, а на отрезке AB отмечена точка N так, что и $\angle ANO = 90^\circ$.

а) Докажите, что прямые MN и SB параллельны.

б) Найдите угол между прямой BM и плоскостью основания конуса, если $AB = 10$.

4) Диаметр окружности основания цилиндра равен 10, образующая цилиндра равна $4\sqrt{3}$. Плоскость α пересекает нижнее основание цилиндра по хорде длины 6, а верхнее основание — по хорде длины 8. Расстояние между этими хордами равно 7.

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по одну сторону от плоскости α.

б) Найдите расстояние между плоскостью α и центром нижнего основания цилиндра.

5) Радиус основания конуса равен 24, а высота конуса равна 7.

а) Постройте такое сечение конуса, которое является равносторонним треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью этого сечения и плоскостью основания конуса.

6) Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $\sqrt{17}$ вписан в шар. Точки M и N — середины ребер B_1C_1 и C_1D_1 соответственно.

а) Постройте сечение куба плоскостью AMN.

б) Найдите площадь сечения шара плоскостью AMN.

Задание №14.6 (ДЗ). Ответы.

1) 60π.

2) $2\sqrt{6}\pi$.

3) 45°.

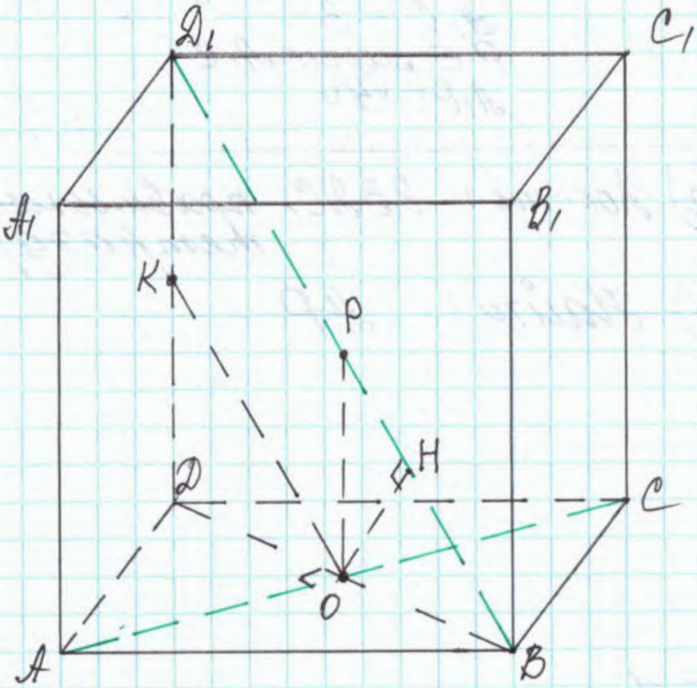
4) $\dfrac{16\sqrt{3}}{7}$.

5) $\arcsin\dfrac{14\sqrt{3}}{25}$.

3) $12,5\pi$.

14.1. Куб

1) ЕГЭ – 2018



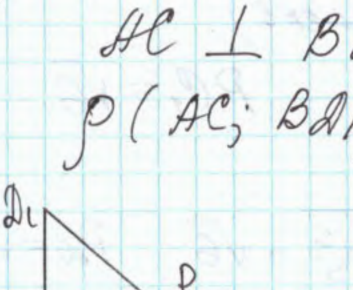
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб
$AB = 6$

а) Док-ть: $(AC;\widehat{\ }BD_1) = 90^\circ$.
б) Найти: $\rho(AC; BD_1)$.

а) $AC \cap BD = O$, проведём $OK \parallel BD_1$, K – середина DD_1.
ABCD – квадрат, значит $AC \perp OD$.
$DD_1 \perp (ABC)$, KO – наклонная к (ABC)
DO – проекция KO на (ABC)
По теореме о трёх перпендикулярах $AC \perp OK$
значит и $\underline{AC \perp BD_1}$, $\underline{(AC;\widehat{\ }BD_1) = 90^\circ}$.

б). $\left.\begin{matrix} AC \perp BD_1 \\ AC \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (BDD_1)$

$\rho(AC; BD_1) = \rho(O; BD_1) = OH$, где $OH \perp BD_1$.



$OP \parallel DD_1$, P – середина BD_1

$OB = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$OP = \frac{1}{2} DD_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$.

$BP = \sqrt{OB^2 + OP^2}$; $BP = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{18+9} = 3\sqrt{3}$

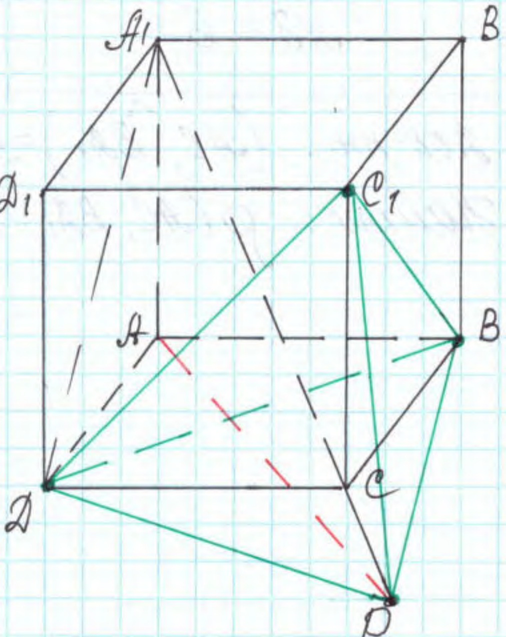
$S_{BOP} = \frac{OB \cdot OP}{2} = \frac{BP \cdot OH}{2}$; $OH = \frac{OB \cdot OP}{BP}$

$OH = \frac{3\sqrt{2} \cdot 3}{3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$. $\rho(AC; BD_1) = \sqrt{6}$.

Ответ: б) $\sqrt{6}$

14.1. Куб

2) ЕГЭ – 2017



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб
$A_1C = 3$
$P \in$ лучу A_1C
$A_1P = 4$

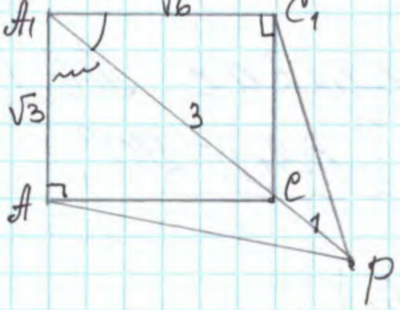
а) Док-ть: $PBDC_1$ правильный тетраэдр

б) Найти: AP

а) $A_1C = 3$, $A_1P = 4 \implies CP = 1$.

Пусть $AB = a$, тогда $\sqrt{a^2+a^2+a^2} = 3$; $a^2 = 3$, $a = \sqrt{3}$.

$\triangle BDC_1$ – правильный, т.к. стороны его являются диагоналями квадратов: $BD = BC_1 = DC_1 = \sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{6}$.



$\triangle A_1C_1C$: $A_1C_1 = \sqrt{6}$; $A_1C = 3$, $\angle A_1C_1C = 90°$.

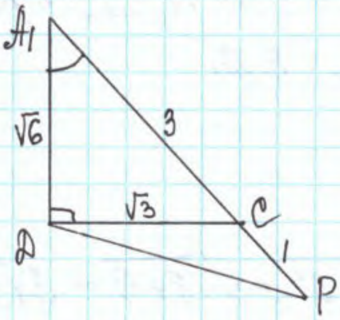
$\cos\angle C_1A_1C = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\triangle A_1C_1P$: $A_1C_1 = \sqrt{6}$; $A_1P = 4$, $\cos\angle C_1A_1P = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$PC_1 = \sqrt{A_1C_1^2 + A_1P^2 - 2\cdot A_1C_1\cdot A_1P\cdot\cos\angle C_1A_1P}$

(по теореме косинусов).

$PC_1 = \sqrt{6+16-2\cdot\sqrt{6}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}} = \sqrt{22-16} = \sqrt{6}$. $PC_1 = \sqrt{6}$



$\triangle A_1DC$: $\cos\angle DA_1C = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\triangle A_1DP$: $PD = \sqrt{(\sqrt{6})^2+4^2-2\cdot\sqrt{6}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}} = \sqrt{6}$. $PD = \sqrt{6}$.

$PB = PD = \sqrt{6}$ (т.к. куб симметричен относ. пл-ти (AA_1C))

Получим $PBDC_1$ – правильный тетраэдр, т.к. все его стороны равны $\sqrt{6}$.

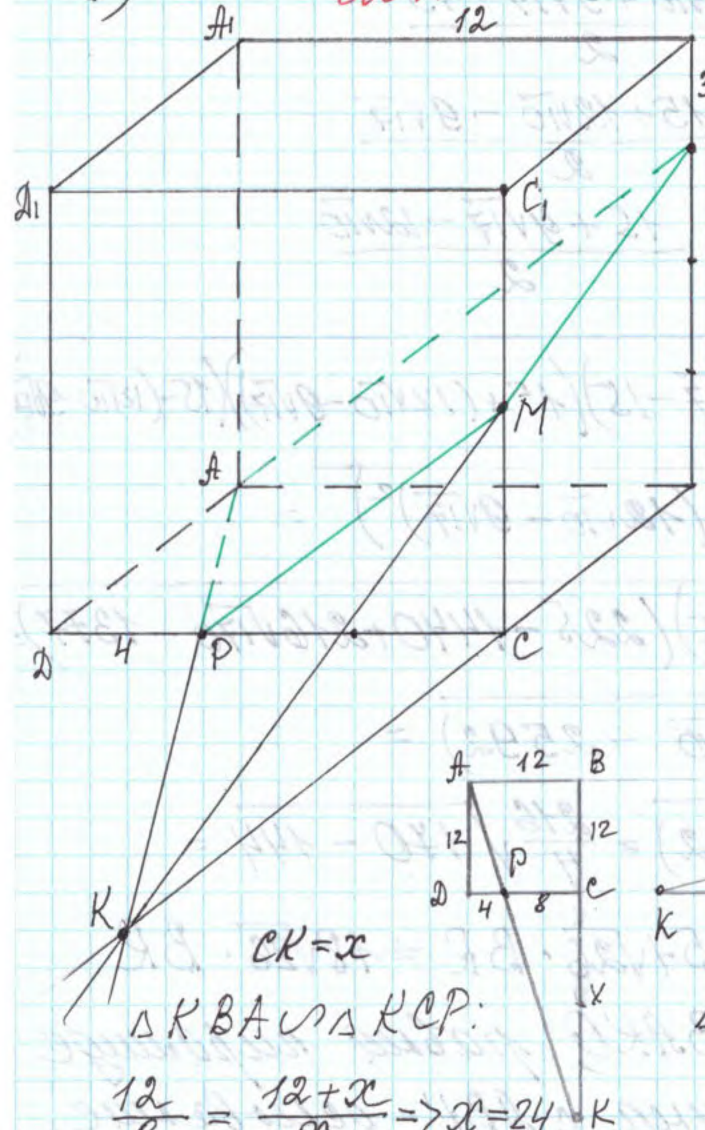
б) $\triangle A_1AC$: $\cos\angle AA_1C = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\triangle A_1AP$: $AP = \sqrt{(\sqrt{3})^2+4^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3+16-8} = \sqrt{11}$. $\boxed{AP = \sqrt{11}}$

Ответ: б) $\sqrt{11}$

14.1. Куб

3) ЕГЭ-2016



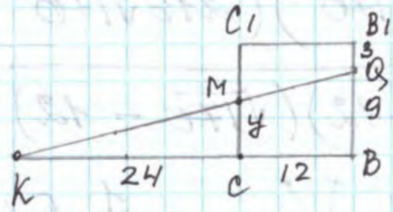
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб
$AB = 12$
$P \in CD$, $DP = 4$
$Q \in BB_1$, $B_1Q = 3$
$(APQ) \cap CC_1 = M$

а) Док-ть: M – середина CC_1
б) Найти: $\rho(C; (APQ))$

I способ

а) Строим сечение:
AQ; $AP \cap BC = K$; $KQ \cap CC_1 = M$
PM; MQ

$APMQ$ – искомое сечение куба плоскостью (APQ)



$CK = x$

$\triangle KBA \sim \triangle KCP$:

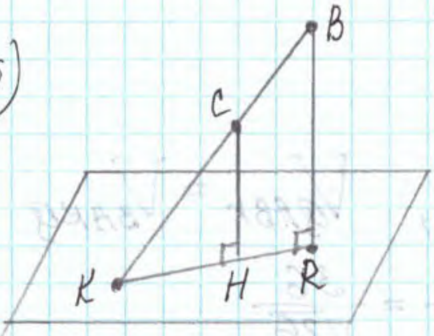
$$\frac{12}{8} = \frac{12+x}{x} \Rightarrow x = 24$$

$\triangle KBQ \sim \triangle KCM$:

$$\frac{9}{y} = \frac{12+24}{24} \Rightarrow y = 6 \Rightarrow CM = MC_1$$

M – середина CC_1

б)



$CH \perp (APQ)$, $CH = \rho(C; (APQ))$ – искомое расстояние.
$BR \perp (APQ)$.

$$\frac{CH}{BR} = \frac{CK}{BK} \Rightarrow CH = \frac{CK \cdot BR}{BK}$$

Рассмотрим пирамиду $BAKQ$, B – вершина, $\triangle AKQ$ – основание, BR – высота

$$V_{BAKQ} = \frac{1}{3} S_{AKQ} \cdot BR$$

$$AQ = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144+81} = \sqrt{225} = 15$$

$$AK = \sqrt{12^2 + 36^2} = \sqrt{144 + 1296} = \sqrt{1440} = 12\sqrt{10}$$

$$KQ = \sqrt{9^2 + 36^2} = \sqrt{81 + 1296} = \sqrt{1377} = 9\sqrt{17}$$

$$p=\frac{15+12\sqrt{10}+9\sqrt{17}}{2}$$

$$p-a=\frac{15+12\sqrt{10}+9\sqrt{17}}{2}-15=\frac{12\sqrt{10}+9\sqrt{17}-15}{2}$$

$$p-b=\frac{15+12\sqrt{10}+9\sqrt{17}}{2}-9\sqrt{17}=\frac{15+12\sqrt{10}-9\sqrt{17}}{2}$$

$$p-c=\frac{15+12\sqrt{10}+9\sqrt{17}}{2}-12\sqrt{10}=\frac{15+9\sqrt{17}-12\sqrt{10}}{2}$$

$$S_{AKQ}=\frac{1}{4}\sqrt{(12\sqrt{10}+9\sqrt{17}+15)(12\sqrt{10}+9\sqrt{17}-15)(15+(12\sqrt{10}-9\sqrt{17}))(15-(12\sqrt{10}-9\sqrt{17}))}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{((12\sqrt{10}+9\sqrt{17})^2-225)(225-(12\sqrt{10}-9\sqrt{17})^2)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(1440+216\sqrt{170}+1377-225)(225-1440+216\sqrt{170}-1377)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(2592+216\sqrt{170})(216\sqrt{170}-2592)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{216^2(\sqrt{170}+12)(\sqrt{170}-12)}=\frac{216}{4}\sqrt{170-144}=$$

$$=54\cdot\sqrt{26}. \qquad V_{BAKQ}=\frac{1}{3}\cdot 54\sqrt{26}\cdot BR=18\sqrt{26}\cdot BR.$$

Эта же пирамида BAKQ равна пирамиде QABK, в которой Q – вершина, $\triangle ABK$ – основание, QB – высота.

$$S_{ABK}=\frac{AB\cdot BK}{2}=\frac{12\cdot 36}{2}=216;\quad BQ=9.$$

$$V_{QABK}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABK}\cdot BQ=\frac{1}{3}\cdot 216\cdot 9=648;\quad V_{QABK}=V_{BAKQ}$$

$$18\sqrt{26}\cdot BR=648 \Rightarrow BR=\frac{648}{18\sqrt{26}}=\frac{36}{\sqrt{26}}$$

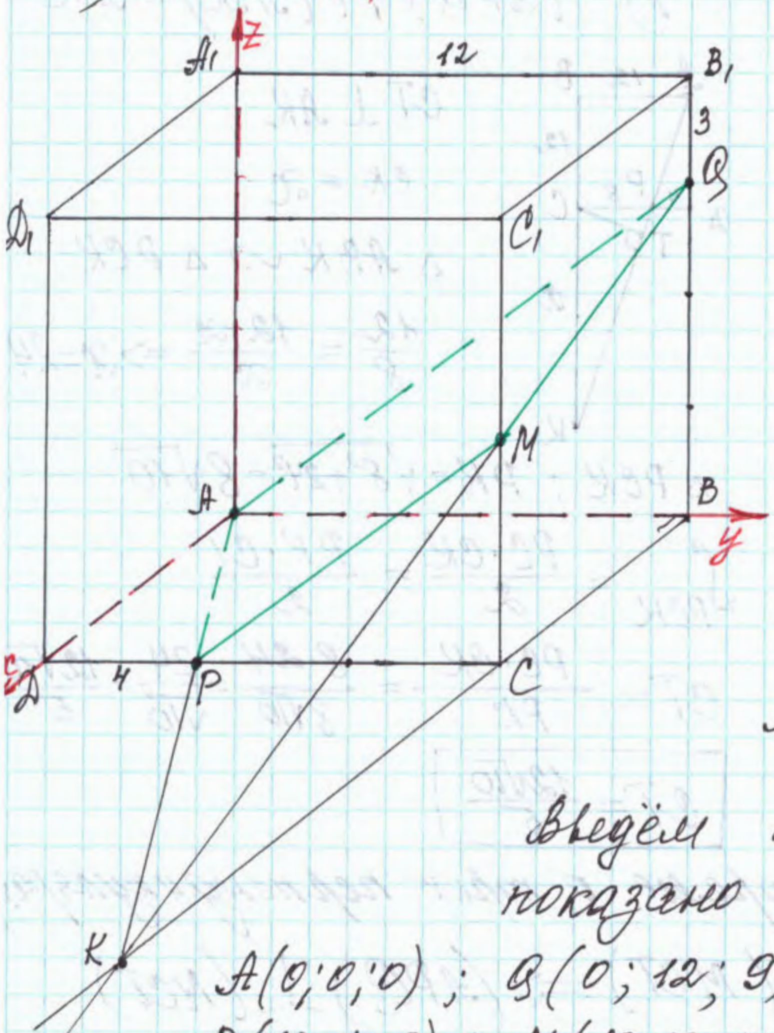
$$CH=\frac{24\cdot 36}{36\cdot\sqrt{26}}=\frac{24\cdot\sqrt{26}}{26}=\frac{12\sqrt{26}}{13}$$

$$\rho(C;(APQ))=\frac{12\sqrt{26}}{13}$$

<u>Ответ</u>: б) $\frac{12\sqrt{26}}{13}$

14.1. Куб

3) ЕГЭ-2016



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб

$AB = 12$

$P \in CD$, $DP = 4$

$Q \in BB_1$, $B_1Q = 3$

$(APQ) \cap CC_1 = M$

а) Док-ть: M — середина CC_1

б) Найти: $\rho(C; (APQ))$

II способ

а) Строим сечение:

AQ; $AP \cap BC = K$; $KQ \cap CC_1 = M$

PM; MQ.

$APMQ$ — искомое сечение куба плоскостью (APQ).

Введём систему координат как показано на рисунке.

$A(0;0;0)$; $Q(0;12;9) \Rightarrow \vec{AQ}\{0;12;9\}$

$P(12;4;0)$; $M(12;12;z_0) \Rightarrow \vec{PM}\{0;8;z_0\}$

$\vec{AQ} \downdownarrows \vec{PM} \Rightarrow \dfrac{12}{8} = \dfrac{9}{z_0} \Rightarrow z_0 = \dfrac{8 \cdot 9}{12} = 6 \Rightarrow M(12;12;6)$

а это значит, что M — середина CC_1.

б) Составим уравнение плоскости (APQ) в виде

$Ax + By + Cz + D = 0$

$$A:\ 0\cdot A + 0\cdot B + 0\cdot C + D = 0$$
$$P:\ 12A + 4B + 0\cdot C + D = 0$$
$$Q:\ 0\cdot A + 12B + 9C + D = 0$$

$$\begin{cases} D = 0 \\ 12A + 4B = 0 \\ 12B + 9C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} D = 0 \\ A = -\frac{1}{3}B \\ C = -\frac{4}{3}B \end{cases}$$

Пусть $B = -3$ тогда

$A = 1$

$C = 4$

$D = 0$.

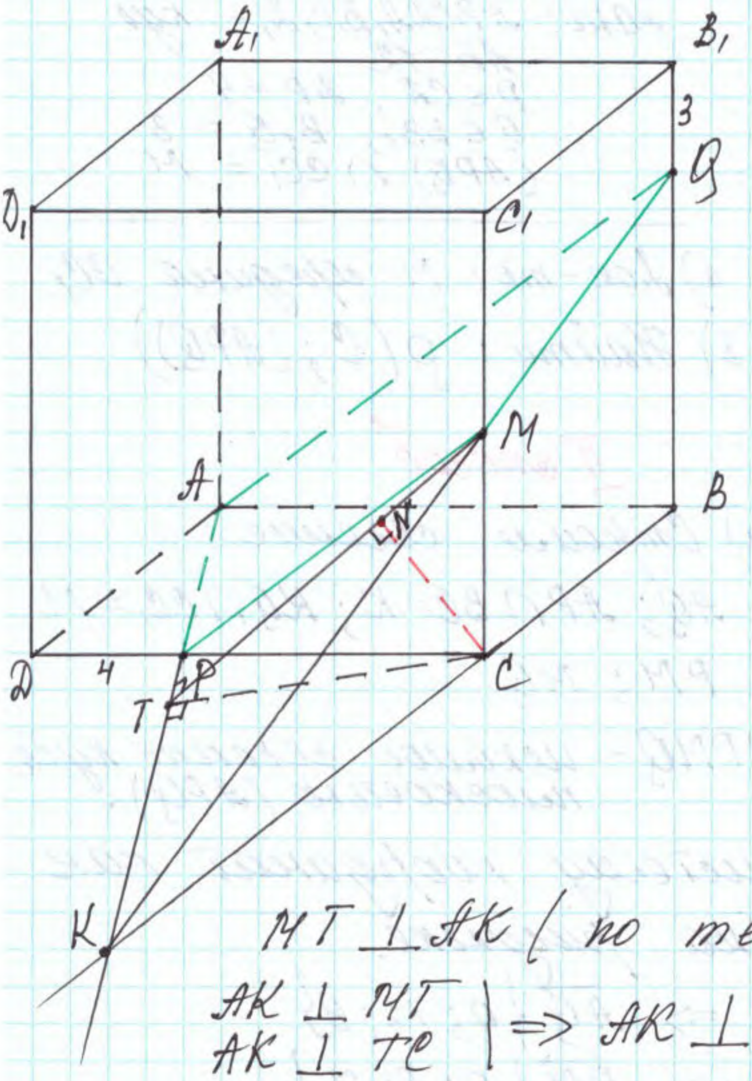
(APQ): $x - 3y + 4z = 0$; $\vec{n}\{1;-3;4\}$ — вектор нормали

$C(12;12;0)$

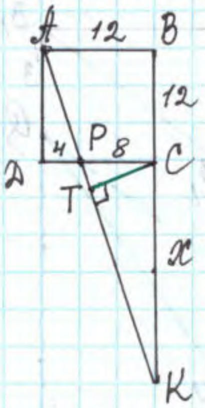
$$\rho(C;(APQ)) = \frac{|12 - 3\cdot 12|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{24}{\sqrt{26}} = \frac{24\sqrt{26}}{26} = \frac{12\sqrt{26}}{13}$$

Ответ: б) $\dfrac{12\sqrt{26}}{13}$

III способ



б) $(APQ) \cap (ABC) = AK$



$CT \perp AK$

$CK = x$

$\triangle ABK \sim \triangle PCK$

$$\frac{12}{8} = \frac{12+x}{x} \Rightarrow x = 24$$

$\triangle PCK: \ PK = \sqrt{8^2+24^2} = 8\sqrt{10}$

$$S_{PCK} = \frac{PC \cdot CK}{2} = \frac{PK \cdot CT}{2}$$

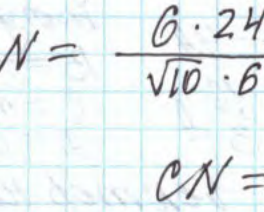
$$CT = \frac{PC \cdot CK}{PK} = \frac{8 \cdot 24}{8\sqrt{10}} = \frac{24}{\sqrt{10}} = \frac{12\sqrt{10}}{5}$$

$$\boxed{CT = \frac{12\sqrt{10}}{5}}$$

$MT \perp AK$ (по теореме о трех перпендикулярах)

$$\left.\begin{array}{l} AK \perp MT \\ AK \perp TC \end{array}\right| \Rightarrow AK \perp (MCT) \Rightarrow (APQ) \perp (MCT)$$

$CN \perp TM$, $\quad CN = \rho(C; (APQ))$ – искомое расстояние.



$\triangle MCT: \ MC \perp (ABC) \Rightarrow MC \perp TC$

$$MT = \sqrt{MC^2 + CT^2} = \sqrt{6^2 + \frac{24^2}{10}} = 6\sqrt{1 + \frac{4^2}{10}} = \frac{6\sqrt{26}}{\sqrt{10}}$$

$$S_{MCT} = \frac{MC \cdot TC}{2} = \frac{MT \cdot CN}{2} \Rightarrow CN = \frac{MC \cdot TC}{MT}$$

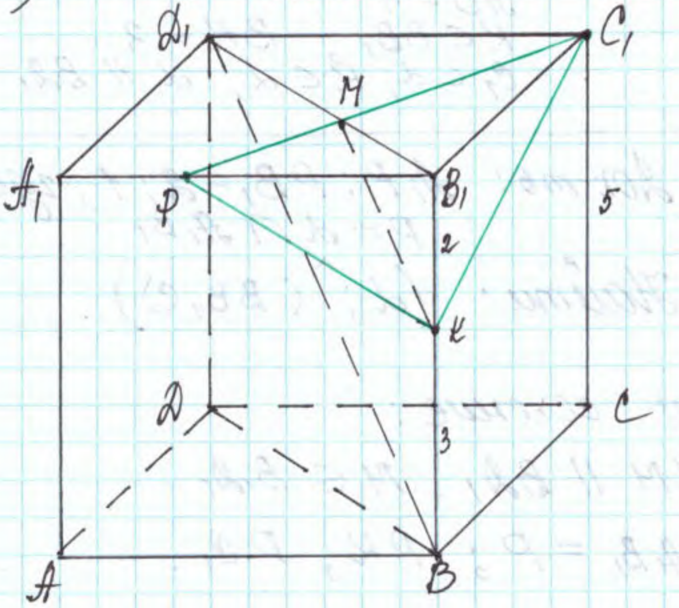
$$CN = \frac{6 \cdot 24 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{26}} = \frac{24}{\sqrt{26}} = \frac{12\sqrt{26}}{13}$$

$$CN = \rho(C; (APQ)) = \frac{12\sqrt{26}}{13}$$

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{26}}{13}$

14.1. Куб

4) ЕГЭ-2015

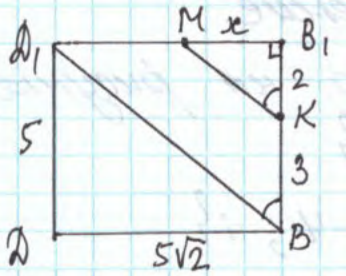


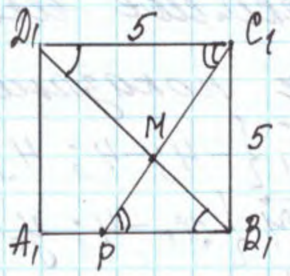
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб
$AB = 5$
$K \in BB_1$; $KB = 3$
$K \in \alpha$, $C_1 \in \alpha$, $\alpha \parallel BD_1$.

а) Док-ть: $A_1P : PB_1 = 1:2$, где $P = \alpha \cap A_1B_1$

б) Найти: объем большей части куба

а) Строим сечение:
KC_1 ; $KM \parallel BD_1$, $M \in B_1D_1$
$C_1M \cap A_1B_1 = P$; KP; C_1P.
$(KC_1P) = \alpha$; $\triangle KC_1P$ – искомое сечение пл. α





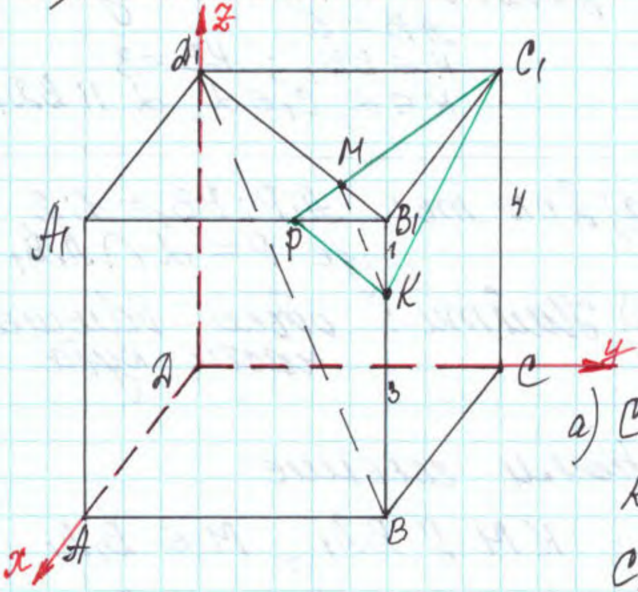
$MK \parallel D_1B$, $\triangle B_1KM \sim \triangle B_1BD_1$ по двум углам.
$DD_1 = 5$, $D_1B_1 = 5\sqrt{2}$ Пусть $MB_1 = x$, тогда $\frac{2}{5} = \frac{x}{5\sqrt{2}}$
$x = 2\sqrt{2}$ $\boxed{MB_1 = 2\sqrt{2}}$ $D_1M = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.
$\triangle D_1MC_1 \sim \triangle B_1MP$ по двум углам, $\frac{D_1C_1}{PB_1} = \frac{D_1M}{B_1M}$;
$\frac{5}{PB_1} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow PB_1 = \frac{10}{3} \Rightarrow A_1P = 5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3}$.
$A_1P : PB_1 = \frac{5}{3} : \frac{10}{3} = 1:2$.

б) Плоскость α разбила объем куба на 2 части.
KPC_1B_1 – пирамида, K – вершина, $\triangle PC_1B_1$ – основание, KB_1 – высота.
$V_{\text{меньшей части}} = \frac{1}{3} S_{PC_1B_1} \cdot KB_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{10 \cdot 5}{3 \cdot 2} \cdot 2 = \frac{50}{9} = 5\frac{5}{9}$
$V_{\text{куба}} = 5^3 = 125$
$V_{\text{большей части}} = 125 - 5\frac{5}{9} = 119\frac{4}{9}$ $V_{\text{большей части}} = 119\frac{4}{9} = \frac{1075}{9}$

Ответ: б) $119\frac{4}{9}$

14.1. Куб

5) ЕГЭ-2015



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб
$AB=4$
$K\in BB_1$; $BK=3$
$C_1\in\alpha$, $K\in\alpha$, $\alpha \parallel BD_1$

а) Док-ть: $A_1P:PB_1=2:1$, где $P=\alpha\cap A_1B_1$

б) Найти: $(\alpha;\widehat{\ }(BB_1C))$.

а) Строим сечение:
KC_1; $KM\parallel BD_1$, $M\in B_1D_1$
$C_1M\cap A_1B_1=P$; PK, PC_1.
$\triangle PKC_1$ – искомое сечение

Введём систему координат как показано на рисунке.

$B(4;4;0)$, $D_1(0;0;4) \Rightarrow \overrightarrow{BD_1}\{-4;-4;4\}$

$K(4;4;3)$, $M(x_0;y_0;4)\Rightarrow \overrightarrow{KM}\{x_0-4;y_0-4;1\}$

$\overrightarrow{BD_1}\downarrow\downarrow\overrightarrow{KM} \Rightarrow \frac{x_0-4}{-4}=\frac{y_0-4}{-4}=\frac{1}{4} \Rightarrow x_0=3;\ y_0=3$

$M(3;3;4)$, $C_1(0;4;4)\Rightarrow \overrightarrow{MC_1}\{-3;1;0\}$

$P(4;y_1;4)$, $C_1(0;4;4)\Rightarrow \overrightarrow{PC_1}\{-4;4-y_1;0\}$

$\overrightarrow{MC_1}\downarrow\downarrow\overrightarrow{PC_1} \Rightarrow \frac{4-y_1}{1}=\frac{-4}{-3}$; $12-3y_1=4$, $3y_1=8$, $y_1=\frac{8}{3}$.

$A_1P=\frac{8}{3}$, $PB_1=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$, значит $\underline{A_1P:PB_1}=\frac{8}{3}:\frac{4}{3}=\underline{2:1}$.

б) $\cos(\alpha;\widehat{\ }(BB_1C))=|\cos(\widehat{\bar n;\bar m})|$, где $\bar n$ – вектор нормали α, $\bar m$ – вектор нормали (BB_1C)

$\bar m\{0;1;0\}$, $\bar m\perp(BB_1C)$

Составим уравнение плоскости α в виде $Ax+By+Cz+D=0$.

$P(4;\frac{8}{3};4)$:	$4A+\frac{8}{3}B+4C+D=0$	$4A-C=0$	$C=4A$	$A=1$, $B=3$
$K(4;4;3)$:	$4A+4B+3C+D=0$	$\frac{4}{3}B-C=0$	$B=3A$	$C=4$
$C_1(0;4;4)$:	$0A+4B+4C+D=0$	$12A+16A+D=0$	$D=-28A$	$D=-28$

$\alpha: x+3y+4z-28=0$, $\bar n\{1;3;4\}$

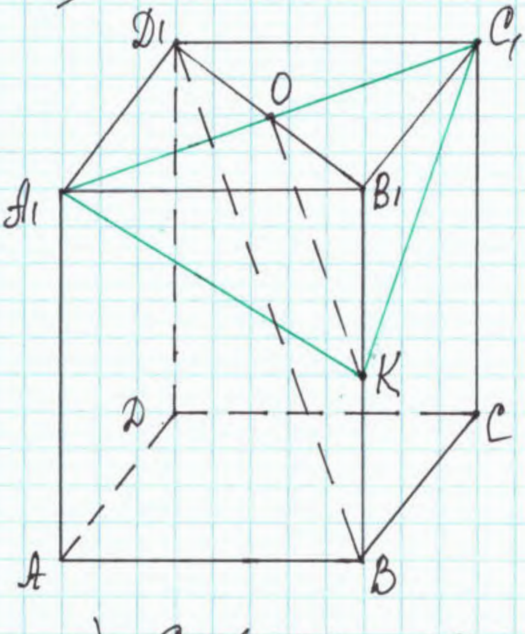
$|\cos(\widehat{\bar n;\bar m})|=\frac{|0\cdot1+1\cdot3+0\cdot4|}{1\cdot\sqrt{1^2+3^2+4^2}}=\frac{3}{\sqrt{26}} \Rightarrow \sin(\widehat{\bar n;\bar m})=\sqrt{1-\frac{9}{26}}=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$

$\operatorname{tg}(\widehat{\bar n;\bar m})=\frac{\sqrt{17}}{3} \Rightarrow (\alpha;\widehat{\ }(BB_1C))=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}}{3}$

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}}{3}$ (или $\arccos\frac{3}{\sqrt{26}}$ или $\arcsin\sqrt{\frac{17}{26}}$)

14.2. Четырехугольные призмы.

1) ЕГЭ-2015



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма
$ABCD$ – квадрат
$AB = 3\sqrt{2}$
$BB_1 = 2\sqrt{7}$
K – середина BB_1
$K \in \alpha$, $C_1 \in \alpha$, $\alpha \parallel BD_1$

а) Док-ть: сечение – равнобедренный треугольник

б) Найти: периметр сечения

а) Строим сечение:

KC_1; $KO \parallel BD_1$, O – середина B_1D_1

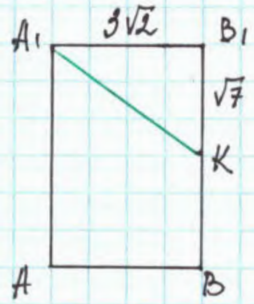
$C_1O \cap AB_1 = A_1$; KA_1

$\triangle A_1C_1K$ – искомое сечение призмы плоскостью α.

Призма правильная, боковые грани равны, значит и отрезки A_1K и C_1K будут равны, т.е. $\triangle A_1C_1K$ – равнобедренный треугольник.

б) $A_1B_1C_1D_1$ – квадрат, $A_1B_1 = 3\sqrt{2} \Rightarrow A_1C_1 = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 6$

ABB_1A_1 – прямоугольник, $A_1B_1 = 3\sqrt{2}$; $BB_1 = 2\sqrt{7}$, K – середина BB_1.



$B_1K = \sqrt{7}$. По теореме Пифагора

$$A_1K^2 = A_1B_1^2 + B_1K^2$$

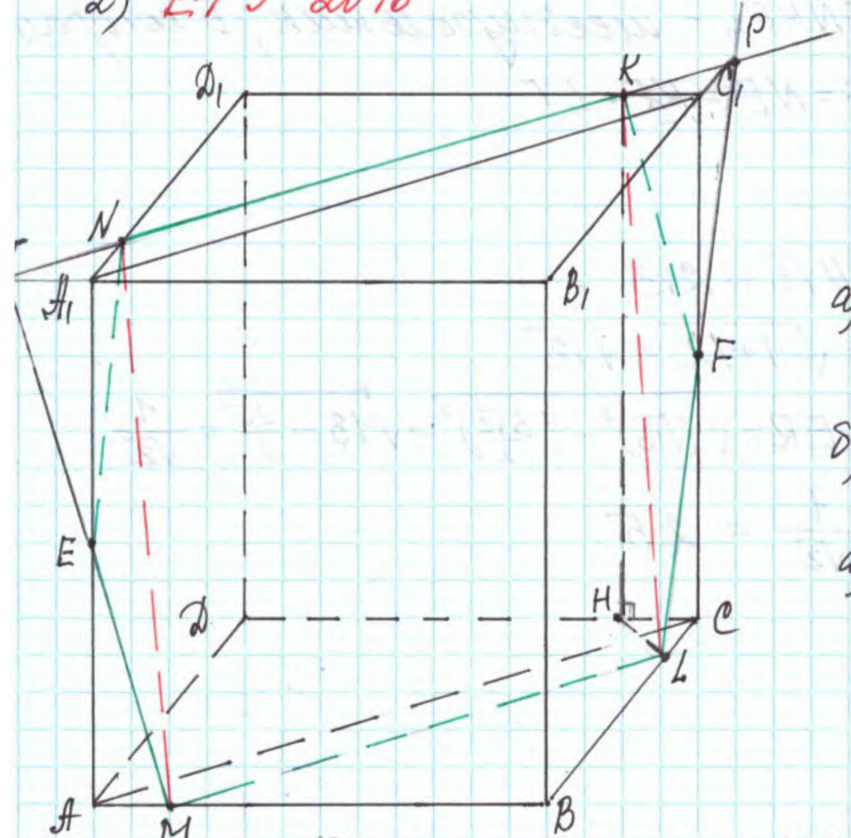
$$A_1K = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2} = \sqrt{18+7} = \sqrt{25} = 5.$$

$$P_{A_1C_1K} = A_1C_1 + 2\cdot A_1K = 6 + 2\cdot 5 = 16.$$

Ответ: б) 16

14.2. Четырехугольные призмы

2) ЕГЭ-2016



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная призма

$AB = 6$, $AA_1 = 4\sqrt{3}$

$M \in AB$, $N \in A_1D_1$, $K \in C_1D_1$

$AM = A_1N = C_1K = 1$

а) Док-ть: $MNKL$ – квадрат, если $L = (MNK) \cap BC$

б) Найти: $S_{\text{сечения}}(MNK)$

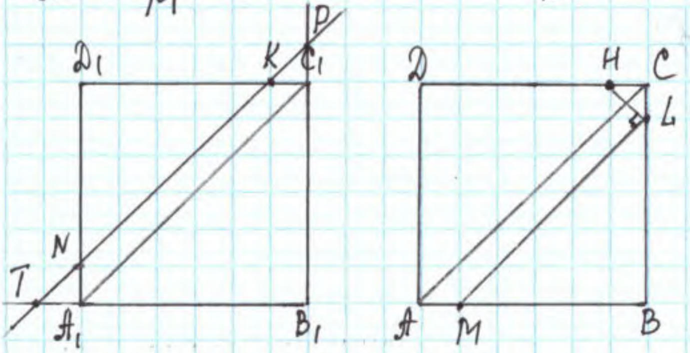
а) Строим сечение:

NK, $NK \cap A_1B_1 = T$, $TM \cap AA_1 = E$

$ML \parallel NK \parallel AC$, $L \in BC$

$NK \cap B_1C_1 = P$, $PL \cap CC_1 = F$

$MENKFL$ – искомое сечение призмы плоскостью MNK.

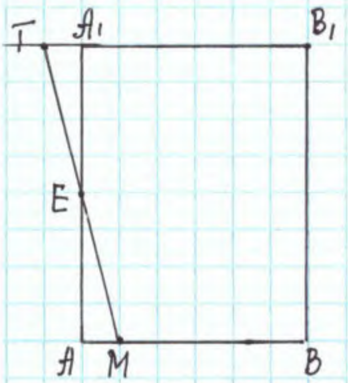


$A_1B_1C_1D_1$ – квадрат, $A_1N = C_1K = 1$

$NK \parallel A_1C_1$, $\angle C_1A_1B_1 = \angle NTA_1 = 45^\circ$

$TA_1 = NA_1 = 1$. Аналогично $C_1P = KC_1 = 1$.

ABB_1A_1 – прямоугольник, $TA_1 = AM = 1$



$\triangle TA_1E = \triangle MAE \Rightarrow E$ – середина AA_1, $EA = EA_1 = 2\sqrt{3}$.

$ML \parallel AC \parallel A_1C_1 \parallel NK$, $ML = NK$.

$\left.\begin{array}{l} KH \perp AC,\ KH \perp (ABC) \\ KL \text{ – наклонная к } (ABC) \\ HL \text{ – проекция } KL \end{array}\right\} \Rightarrow KL \perp ML$

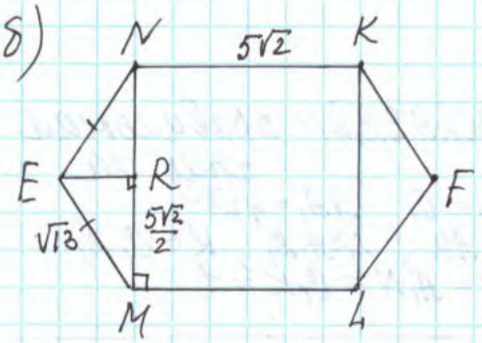
по теореме о трех перпендикулярах

$\triangle KHL$: $KH = AA_1 = 4\sqrt{3}$; $HL = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow KL = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\triangle BML \sim \triangle BAC$: $\frac{ML}{AC} = \frac{BL}{BC}$; $\frac{ML}{6\sqrt{2}} = \frac{5}{6} \Rightarrow ML = 5\sqrt{2}$.

В четырехугольнике $MNKL$: $NK \parallel ML$, $NK = ML$, $ML = KL$, $KL \perp ML$

значит <u>$MNKL$ – квадрат</u>.

б) 

MNKL - квадрат, $MN = 5\sqrt{2}$

MENKFL - шестиугольник, в котором $ME = NE = KF = LF$

$\triangle AME$: $AM = 1$, $AE = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$$ME = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+12} = \sqrt{13}$$

$ER \perp MN$, $MR = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $ER = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{13 - \frac{25}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$S_{\triangle MEN} = \frac{MN \cdot ER}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 1}{2 \cdot \sqrt{2}} = 2{,}5$$

$$S_{\triangle KLF} = S_{\triangle MEN} = 2{,}5$$

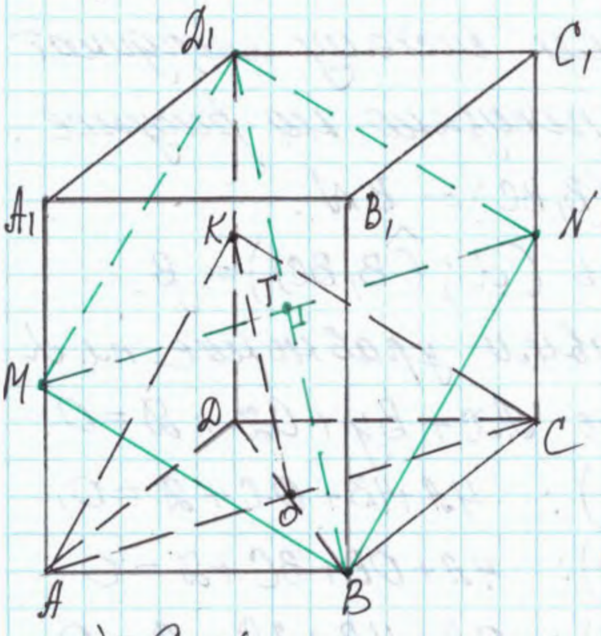
$$S_{MNKL} = (5\sqrt{2})^2 = 50$$

$$S_{MENKFL} = 2{,}5 + 2{,}5 + 50 = 55.$$

Ответ: б) 55

14.2. Четырехугольные призмы

3) ЕГЭ-2017



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольный параллелепипед

α - плоскость сечения

$BD_1 \subset \alpha$, $\alpha \parallel AC$

$\alpha \cap AA_1 = M$, $\alpha \cap CC_1 = N$

BMD_1N - ромб

а) Док-ть: $ABCD$ - квадрат

б) Найти: $(\widehat{\alpha; (BCC_1)})$, если $AA_1 = 6$; $AB = 4$.

а) Строим сечение: $AC \cap BD = O$, $OK \parallel BD_1$, $K \in DD_1$

$D_1M \parallel KA$, O - середина $BD \Rightarrow K$ - середина $DD_1 \Rightarrow$

M - середина AA_1. Аналогично, N - середина CC_1.

BMD_1N - ромб, искомое сечение, т.к.

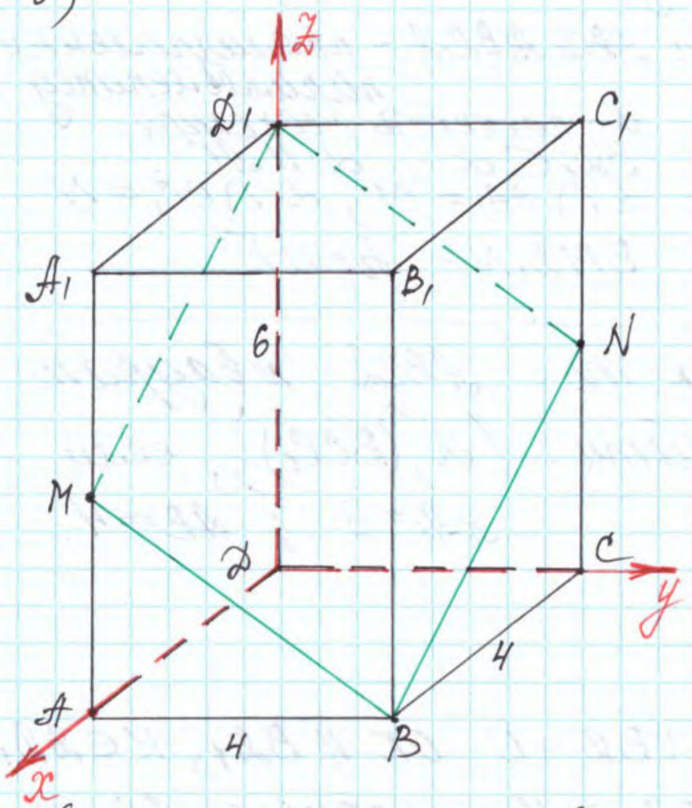
содержит BD_1 и параллельно AC ($MN \parallel AC$).

У ромба $MB = NB$ и $MN \perp BD_1$

$BD_1 \perp MN \Rightarrow BD_1 \perp AC \Rightarrow OK \perp AC \Rightarrow OD \perp AC$.

В прямоугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны, значит $ABCD$ - квадрат.

б)



$AB = BC = 4$

$AA_1 = 6$

Введём систему координат как показано на рисунке.

$\alpha \cap (B_1BC) = BN$.

Пусть $(\alpha; \widehat{B_1BC}) = \beta$.

Составим уравнение пл. α в виде $Ax + By + Cz + D = 0$.

$B(4;4;0)$: $4A + 4B + 0\cdot C + D = 0$

$M(4;0;3)$: $4A + 0B + 3C + D = 0$

$N(0;4;3)$: $0A + 4B + 3C + D = 0$.

$$\begin{cases} 4A + 4B + D = 0 \\ 4A + 3C + D = 0 \\ 4B + 3C + D = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4B - 3C = 0 \\ 3C - 4A = 0 \\ 4B + 3C + D = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B = \frac{3}{4}C \\ A = \frac{3}{4}C \\ D = -6C \end{cases}$$

Пусть $C = 4$, $A = B = 3$, $D = -24$.

α: $3x + 3y + 4z - 24 = 0$, $\overline{n}\{3;3;4\}$ – вектор нормали.

Для плоскости (BCC_1) вектор нормали $\overline{m}\{0;1;0\}$.

$$\cos(\alpha; \widehat{BCC_1}) = |\cos(\widehat{\overline{n};\overline{m}})| = \frac{|\overline{n}\cdot\overline{m}|}{|\overline{n}|\cdot|\overline{m}|} =$$

$$= \frac{|3\cdot 0 + 3\cdot 1 + 4\cdot 0|}{\sqrt{9+9+16}\cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{34}} \qquad \boxed{\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{34}}}$$

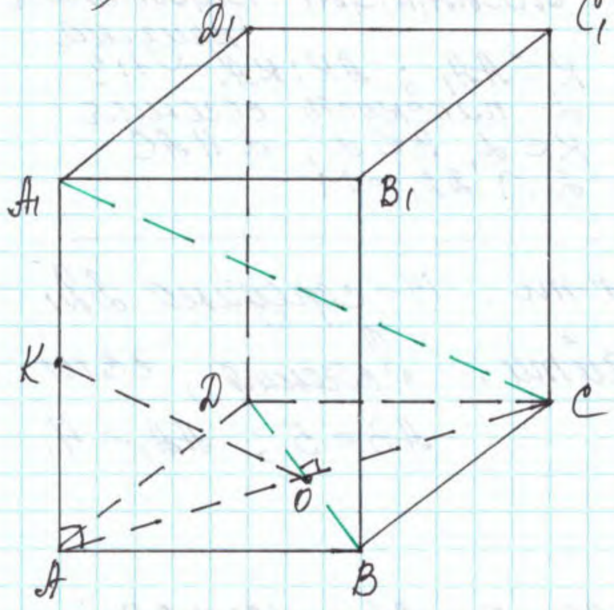
$$\sin\beta = \sqrt{1 - \frac{9}{34}} = \sqrt{\frac{25}{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$tg\,\beta = \frac{5\cdot\sqrt{34}}{\sqrt{34}\cdot 3} = \frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{\beta = arctg\,\frac{5}{3}}$$

Ответ: б) $arctg\,\frac{5}{3}$.

14.2. Четырехугольные призмы.

4) ЕГЭ-2017



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма

$ABCD$ — ромб

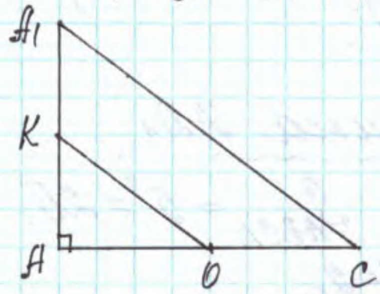
$AB = AA_1$

а) Док-ть: $A_1C \perp BD$

б) Найти: V, если $A_1C = BD = 2$.

а) $ABCD$ — ромб $\Rightarrow AC \perp BD$. $AC \cap BD = O$

Призма прямая, значит $AA_1 \perp (ABC) \Rightarrow AA_1 \perp AC$.



Проведём $OK \parallel CA_1$, O — середина $AC \Rightarrow K$ — сер. AA_1.

AK — перпендикуляр к плоскости основания

KO — наклонная

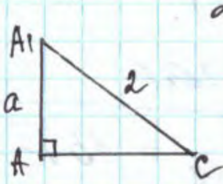
AO — проекция.

$BD \perp AO$, значит $BD \perp KO \Rightarrow \underline{BD \perp A_1C}$

(по теореме о трёх перпендикулярах).

б) $A_1C = 2$, $BD = 2$. Пусть $AB = a$, $AA_1 = a$.

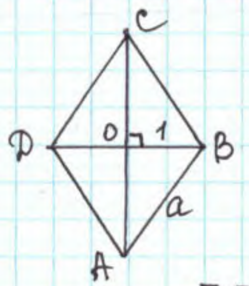
$V = \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot AA_1 = \frac{AC \cdot 2}{2} \cdot AA_1 = AC \cdot AA_1$.



$AC = \sqrt{A_1C^2 - AA_1^2} = \sqrt{4 - a^2}$

$AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - 1}$, $AC = 2 \cdot AO = 2\sqrt{a^2 - 1}$ $\Rightarrow$

$\sqrt{4 - a^2} = 2\sqrt{a^2 - 1}$



$4 - a^2 = 4a^2 - 4$

$a^2 = \frac{8}{5}$ $\Rightarrow AC = \sqrt{4 - \frac{8}{5}} = \sqrt{\frac{12}{5}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

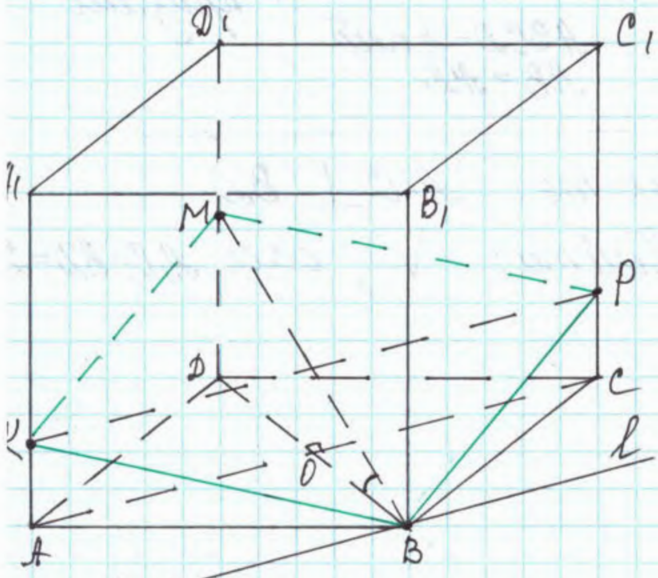
$a = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$V = \frac{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$ $\boxed{V = \frac{4\sqrt{6}}{5}}$

Ответ: $\frac{4\sqrt{6}}{5}$

14.2. Четырехугольные призмы

5) ЕГЭ-2018



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная призма

$K \in AA_1$; $AK : KA_1 = 1 : 3$

α – плоскость сечения

$K \in \alpha$, $B \in \alpha$, $\alpha \parallel AC$.

$\alpha \cap DD_1 = M$

а) Док-ть: M – середина DD_1

б) Найти: $S_{сечения}$, если $AB = 5$; $AA_1 = 4$.

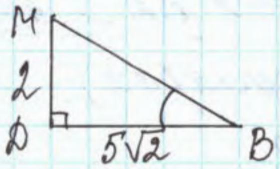
а) Строим сечение: KB; $KP \parallel AC$, $P \in CC_1$, $KM \parallel BP$, $PM \parallel BK$. $BKMP$ – искомое сечение.

$KP \parallel AC \Rightarrow CP : PC_1 = 1 : 3$. Пусть $AA_1 = a$, тогда $AK = CP = \frac{1}{4}a$, $KA_1 = PC_1 = \frac{3}{4}a$.

$KM \parallel BP \Rightarrow DM = \frac{2}{4}a = \frac{1}{2}a \Rightarrow$ $\underline{M\text{ – середина } DD_1}$

б) $ABCD$ – квадрат, $AB = 5$, $BD = 5\sqrt{2}$. $S_{ABCD} = 5^2 = 25$.

$MD \perp (ABC) \Rightarrow MD \perp DB$, $MD = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.



$$MB = \sqrt{MD^2 + BD^2} = \sqrt{2^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + 50} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$\cos\angle MBD = \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$$

$\alpha \cap (ABC) = l$, $l \parallel AC$, $B \in l$.

l – ребро двугранного угла между α и (ABC).

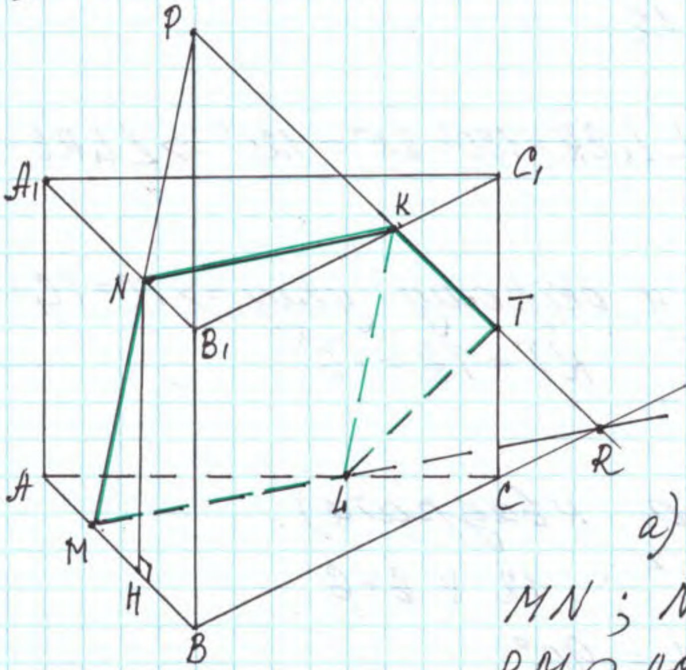
$MB \perp l$, т.к $BD \perp l$. $\Rightarrow \angle MBD$ – линейный угол.

$$S_{сеч} = \frac{S_{ABCD}}{\cos\angle MBD}, \quad S_{сеч.} = \frac{25 \cdot 3\sqrt{3}}{5} = 15\sqrt{3}. \qquad \boxed{S_{сеч} = 15\sqrt{3}}$$

Ответ: б) $15\sqrt{3}$.

14.3. Треугольные призмы

1) ЕГЭ-2016



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма

$AB=6$; $AA_1=2\sqrt{2}$

$M\in AB$; $N\in A_1B_1$; $K\in B_1C_1$

$AM=B_1N=C_1K=2$

а) Док-ть: $MNKL$ – квадрат, если $L=(MNK)\cap AC$

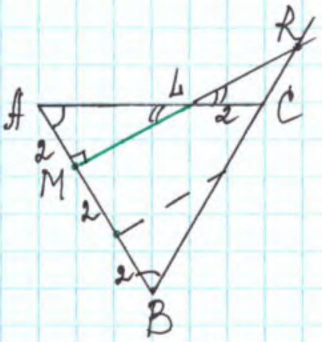
б) Найти: $S_{\text{сечения}}$

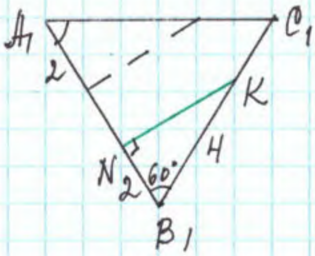
а) Строим сечение:

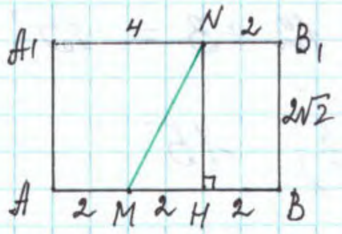
MN; NK; $MN\cap BB_1=P$, $PK\cap BC=R$

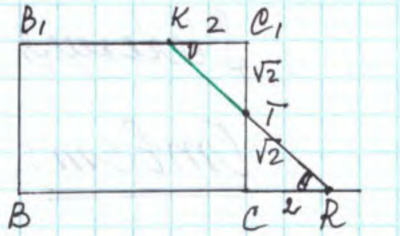
$RM\cap AC=L$; $PR\cap CC_1=T$; KT; TL; ML.

$MNKTL$ – искомое сечение









$NH\perp AB$, $MH=2$, $NH=2\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $MN=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{4+8}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\triangle NB_1K$: по теореме косинусов $NK=\sqrt{NB_1^2+KB_1^2-2\cdot NB_1\cdot KB_1\cdot\cos 60^\circ}$

$NK=\sqrt{4+16-2\cdot2\cdot4\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{20-8}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

Проверим: $B_1K^2 \vee NB_1^2+NK^2$; $16\vee 4+12$.

т.к. $16=4+12$, $B_1K^2=NB_1^2+NK^2 \Rightarrow \angle B_1NK=90^\circ$; $NK\perp A_1B_1$

$NK\parallel ML$, $AB\parallel A_1B_1$ $\Rightarrow$ $ML\perp AB$.

NH – перпендикуляр к плоскости основания

MN – наклонная, MH – проекция, $ML\perp MH$, значит по теореме о трех перпендикулярах $MN\perp ML$.

$\triangle AML=\triangle B_1NK$ по катету и прилежащему острому углу

значит $ML=NK$

В четырехугольнике $MNKL$: $ML\parallel NK$, $ML=NK$, $ML\perp MN$, $NK=MN=2\sqrt{3}$

значит $MNKL$ – квадрат

б) $S_{сечения} = S_{MNKL} + S_{KTL}$

$S_{MNKL} = MN^2 = (\sqrt{12})^2 = 12.$

$\triangle LCR$: $CL = 2$, $\angle CLR = 30°$, $\angle LCR = 180° - 60° = 120° \Rightarrow \angle LRC = 30°$.

значит $CR = CL = 2$.

$\triangle TCR = \triangle TC_1K$ по катету и острому углу $\Rightarrow TC = TC_1 = \sqrt{2}$.

$TR = \sqrt{TC^2 + CR^2} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$. $KT = TR = \sqrt{6}$

Аналогично $TL = \sqrt{6}$.

$KL = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (сторона квадрата).

Проверим: $KL^2 \vee TK^2 + TL^2$; $12 \vee 6+6$.

$KL^2 = TK^2 + TL^2 \Rightarrow \angle KTL = 90°$.

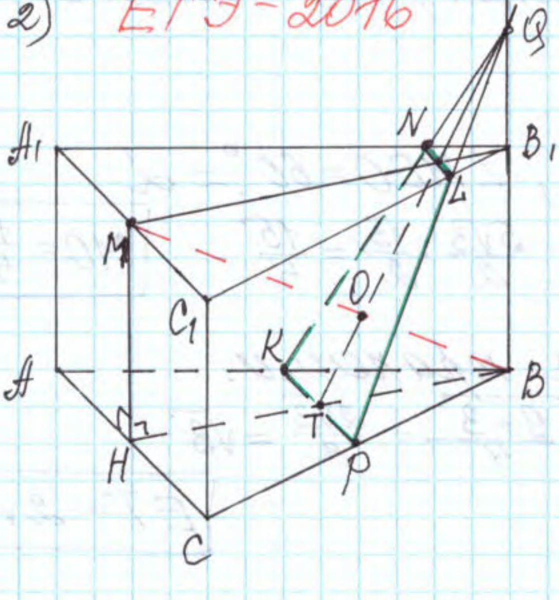
$S_{KTL} = \frac{TK \cdot TL}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$

$S_{сечения} = 12 + 3 = 15.$

<u>Ответ:</u> б) 15

14.3. Треугольные призмы

2) ЕГЭ-2016



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма

$AB = 6$, $AA_1 = 3$

$L \in B_1C_1$; $B_1L = 1$

$K \in AB$; $AK = KB$

$M \in AC_1$; $AM = MC_1$

γ – плоскость сечения

$K \in \gamma$, $L \in \gamma$; $\gamma \parallel AC$

а) Док-ть: $BM \perp \gamma$

б) Найти: объем пирамиды, у которой M-вершина, основание – сечение.

а) Строим сечение: $KP \parallel AC$, $P \in BC$; $PL \cap BB_1 = Q$

$QK \cap A_1B_1 = N$; KN; NL; LP. $KNLP$ – искомое сечение.

$KP \parallel AC$, P – середина BC, $KP = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$.

$NL \parallel KP$. Боковые грани равные прямоугольники,

$LB_1 = NB_1 = 1 \Rightarrow LP = NK$. $KNLP$ – равнобедренная трапеция.

$MH \perp AC$, $BH \perp AC$, $BH \cap KP = T$, T – середина KP.

QT – высота $\triangle QKP$, $QT \cap BM = O$.

$BH = B_1M = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$; $B_1E = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$BB_1 = 3$, $TB = \frac{1}{2}\cdot BH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Пусть $QB_1 = x$.

$\triangle QB_1E \sim \triangle QBT$ по двум углам,

$\frac{B_1E}{BT} = \frac{QB_1}{QB}$; $\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot 3\sqrt{3}} = \frac{x}{x+3}$; $3x = x+3$

$x = \frac{3}{2}$, $QB_1 = \frac{3}{2}$, $QB = 3+\frac{3}{2} = \frac{9}{2}$, $QT = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27+81}{4}} = 3\sqrt{3}$

$\cos\alpha = \frac{BT}{QT} = \frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$

$ctg\beta = \frac{BH}{MH} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \beta = 30°$

$\Rightarrow \angle TOB = 90°$

$BM \perp \gamma$.

б) Пирамида $MKLNP$:

M – вершина, $KLNP$ – основание, MO – высота.

$V_{MKLNP} = \frac{1}{3} \cdot S_{KLNP} \cdot MO$.

$\triangle MOE$: $ME = 3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $\angle MEO = 60^\circ = \alpha$.

$\sin\alpha = \frac{MO}{ME}$; $MO = ME \cdot \sin\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{4}$ $\boxed{MO = \frac{15}{4}}$

$KP = 3$, $NL = 1$, ET – высота трапеции.

$QT = 3\sqrt{3}$; $QE = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+3}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

$ET = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. $\boxed{ET = 2\sqrt{3}}$

$S_{KLNP} = \frac{NL + KP}{2} \cdot ET$

$S_{KLNP} = \frac{1+3}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ $\boxed{S_{KLNP} = 4\sqrt{3}}$

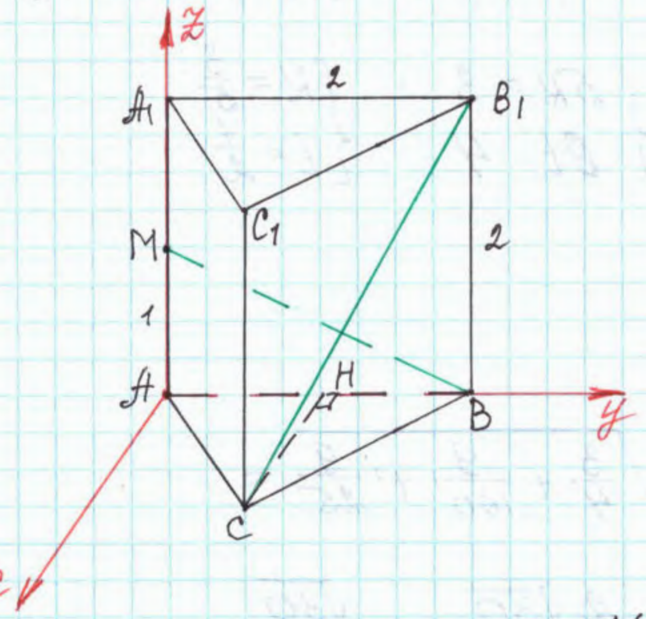
$V_{MKLNP} = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{15}{4} = 5\sqrt{3}$

$\boxed{V = 5\sqrt{3}}$

Ответ: б) $5\sqrt{3}$

14.3. Треугольные призмы

3) ЕГЭ – 2018



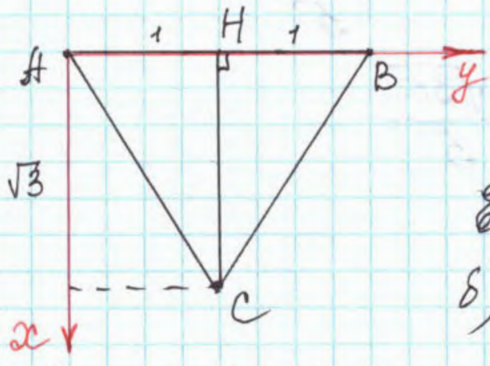
Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма

$AB = AA_1 = 2$

M – середина AA_1

а) Док-ть: $MB \perp B_1C$

б) Найти: $\rho(MB; B_1C)$



а) Введём систему координат как показано на рисунке.

$CH \perp AB$, $CH = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

$M(0;0;1)$, $B(0;2;0) \Rightarrow \overrightarrow{MB}\{0;2;-1\}$

$B_1(0;2;2)$, $C(\sqrt{3};1;0) \Rightarrow \overrightarrow{B_1C}\{\sqrt{3};-1;-2\}$.

$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{B_1C} = 0 \cdot \sqrt{3} + 2(-1) + (-1)\cdot(-2) = -2+2 = 0$

Если $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{B_1C} = 0$, то $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{B_1C}$, $\Rightarrow MB \perp B_1C$.

б) Метод „плавающих" точек.

Пусть $Q \in MB$, тогда $\overrightarrow{MQ} = k \cdot \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MQ}\{0; 2k; -k\}$.

$M(0;0;1)$, $Q(x_1; y_1; z_1) \Rightarrow \overrightarrow{MQ}\{x_1 - 0; y_1 - 0; z_1 - 1\}$

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 2k \\ z_1 - 1 = -k \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 2k \\ z_1 = 1-k \end{cases}$ $Q(0; 2k; 1-k)$.

Пусть $P \in B_1C$, тогда $\overrightarrow{B_1P} = t \cdot \overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{B_1P}\{\sqrt{3}t; -t; -2t\}$

$B_1(0;2;2)$, $P(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \overrightarrow{B_1P}\{x_2 - 0; y_2 - 2; z_2 - 2\}$

$\begin{cases} x_2 = \sqrt{3}t \\ y_2 - 2 = -t \\ z_2 - 2 = -2t \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \sqrt{3}t \\ y_2 = 2-t \\ z_2 = 2-2t \end{cases}$ $P(\sqrt{3}t; 2-t; 2-2t)$.

$\overrightarrow{QP}\{\sqrt{3}t - 0; 2-t-2k; 2-2t-1+k\}$

$\overrightarrow{QP}\{\sqrt{3}t; 2-t-2k; 1-2t+k\}$.

Потребуем, чтобы $\overrightarrow{QP} \perp \overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{QP} \perp \overrightarrow{B_1C}$

$\overline{QP} \cdot \overline{MB} = 0$; $\sqrt{3}t \cdot 0 + (2-t-2k) \cdot 2 + (1-2t+k) \cdot (-1) = 0$

$\overline{QP} \cdot \overline{B_1C} = 0$; $\sqrt{3}t \cdot \sqrt{3} + (2-t-2k) \cdot (-1) + (1-2t+k) \cdot (-2) = 0$

$$\begin{cases} 4-2t-4k-1+2t-k=0 \\ 3t-2+t+2k-2+4t-2k=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5k=3 \\ 8t=4 \end{cases} \quad \begin{cases} k=\frac{3}{5} \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\overline{QP}\left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}; 2-\frac{1}{2}-\frac{6}{5}; 1-1+\frac{3}{5} \right\}$

$\overline{QP}\left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{10}; \frac{3}{5} \right\}$.

$$|\overline{QP}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{100} + \frac{9}{25}} =$$

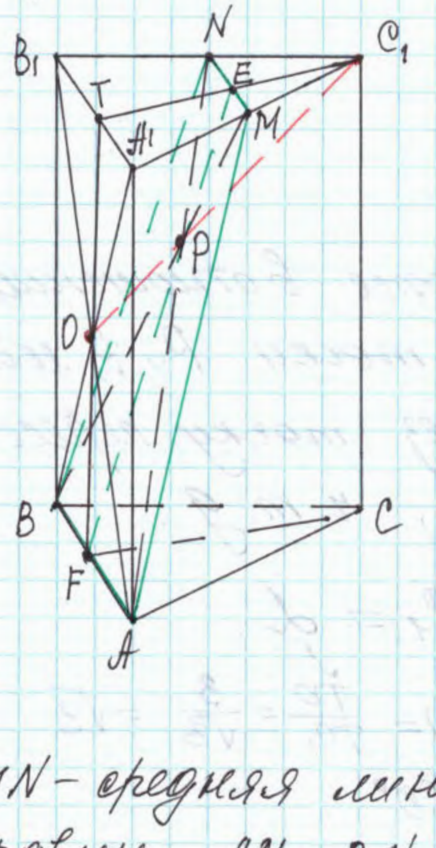
$$= \sqrt{\frac{75+9+36}{100}} = \sqrt{\frac{120}{100}} = \frac{2\sqrt{30}}{10} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

$$|\overline{QP}| = QP = \rho(MB, B_1C) = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{30}}{5}$

14.3. Треугольные призмы

4) ЕГЭ-2019



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма
$AB=2$, $AA_1=6$
M — середина A_1C_1
$AB_1 \cap A_1B = O$
α — плоскость сечения
$\alpha = (ABM)$

а) Док-ть: P — точка пересечения диагоналей четырехуг-ка, $OC_1 \cap \alpha = P$.

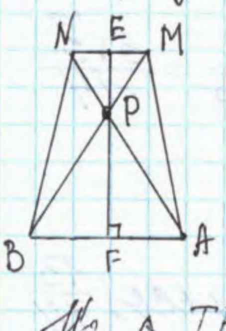
б) Найти: $(OC_1 ; \widehat{\ } (ABM))$

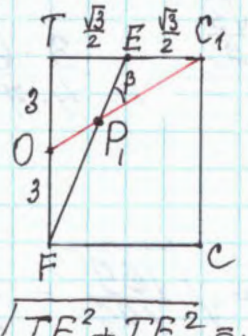
а) Строим сечение:

AB; AM; $MN \parallel AB$, $N \in B_1C_1$, N-сер. B_1C_1.

$AMNB$ — искомое сечение.

MN — средняя линия $\triangle A_1B_1C_1$, боковые грани призмы равны, $AM=BN$, значит трапеция $AMNB$ — равнобедренная. $AN \cap BM = P$, P лежит на высоте, проведенной через середины двух оснований трапеции.





$C_1T \perp A_1B_1$, $CF \perp AB$, $O \in TF$

O — середина TF, E — середина C_1T.

$AB=2$, $MN=1$, $C_1T = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$TE = \frac{1}{2} C_1T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $TF=6$.

Из $\triangle TEF$: $EF = \sqrt{TF^2+TE^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{36+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{147}{4}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

Пусть $PE = x$, тогда $PF = \frac{7\sqrt{3}}{2} - x$.

$\triangle MNP \sim \triangle BAP$ по двум углам, $\frac{MN}{AB} = \frac{PE}{PF} = \frac{1}{2}$

$2x = \frac{7\sqrt{3}}{2} - x$, $3x = \frac{7\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{7\sqrt{3}}{6}$ $\quad \boxed{PE = \frac{7\sqrt{3}}{6}}$

Точка P делит высоту трапеции EF в отношении $1:2$, начиная с верхнего основания.

Допустим, что OC_1 и EF пересекаются в какой-то другой точке P_1. Найдем отношение $\frac{P_1E}{P_1F}$.

Для $\triangle TEF$ и прямой OC_1 по теореме Менелая:

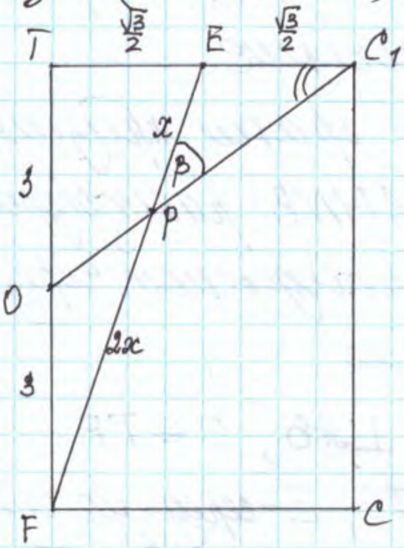
$$\frac{TC_1}{C_1E}\cdot\frac{EP_1}{P_1F}\cdot\frac{FO}{OT}=1;$$

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{P_1E}{P_1F}\cdot\frac{1}{1}=1;$$

$$\frac{P_1E}{P_1F}=\frac{1}{2}$$

Точка P_1 делит отрезок EF тоже в отношении 1:2, начиная от точки E, значит точки P и P_1 совпадают, т.е. прямая OC_1 проходит через точку пересечения диагоналей трапеции $AMNB$, ч. т. д.

б) $(OC_1;\widehat{(ABM)})=(OC_1;\widehat{EF})=\angle EPC_1=\beta$.



$\triangle TOC_1$: $tg\angle TC_1O=\frac{TO}{TC_1}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

значит $\angle TC_1O=60°$

$\triangle PEC_1$ по теореме синусов:

$$\frac{EC_1}{\sin\beta}=\frac{PE}{\sin 60°};\quad \sin\beta=\frac{EC_1\cdot\sin 60°}{PE}$$

$$\sin\beta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{7\sqrt{3}}{6}}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 7\sqrt{3}}=\frac{9}{14\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$\beta=\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

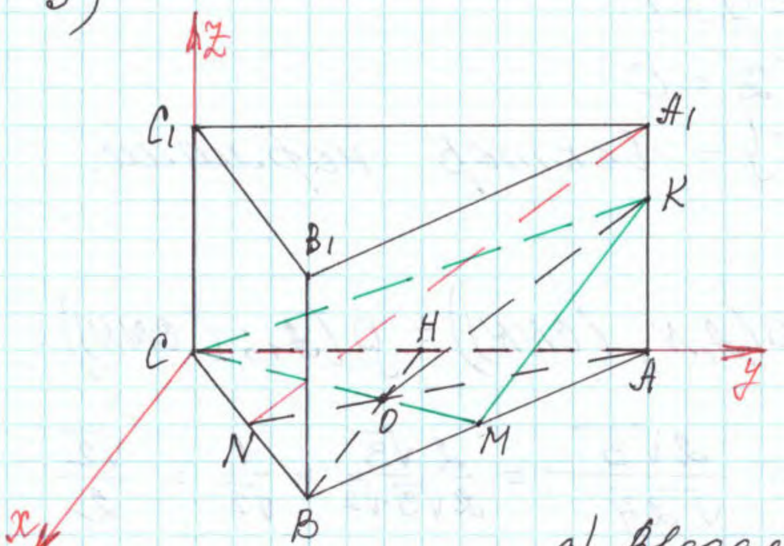
$$\cos\beta=+\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\frac{27}{196}}=\sqrt{\frac{169}{196}}=\frac{13}{14},\ \beta=\arccos\frac{13}{14}$$

$$tg\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{3\sqrt{3}\cdot 14}{14\cdot 13}=\frac{3\sqrt{3}}{13},\ \beta=arctg\frac{3\sqrt{3}}{13}$$

Ответ: б) $\arccos\frac{13}{14}$

14.3. Треугольные призмы.

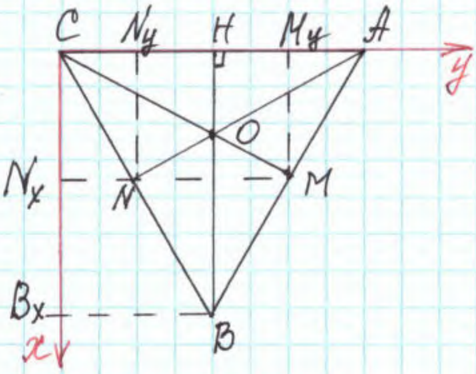
5)



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма
M – середина AB
N – середина BC
$K \in AA_1$; $AK : KA_1 = 2 : 1$

а) Док-ть: $A_1N \parallel (CMK)$

б) Найти: $\rho(A_1N; (CMK))$, если $AB = 4$, $AA_1 = 3$.



а) Введем систему координат как показано на рисунке.

Пусть $AB = a$, тогда $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$CN_x = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $CH = \frac{a}{2}$, $CN_y = \frac{a}{4}$, $CM_y = \frac{3a}{4}$

$C(0;0;0)$; $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{3a}{4}; 0\right)$

Пусть $CC_1 = b$, тогда $AK = \frac{2b}{3}$; $K\left(0; a; \frac{2b}{3}\right)$

Составим уравнение плоскости (CMK) в виде $Ax + By + Cz + D = 0$.

$C: \; 0 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C + D = 0 \Rightarrow D = 0$

$M: \; \frac{a\sqrt{3}}{4}A + \frac{3a}{4}B + 0 \cdot C + 0 = 0 \Rightarrow \sqrt{3}A + 3B = 0 \Rightarrow B = -\frac{\sqrt{3}}{3}A$

$K: \; 0 \cdot A + a \cdot B + \frac{2b}{3}C + 0 = 0 \Rightarrow 3aB + 2bC = 0 \Rightarrow B = -\frac{2b}{3a}C$

тогда $\frac{\sqrt{3}}{3}A = \frac{2b}{3a}C \Rightarrow C = \frac{a\sqrt{3}}{2b}A$

Пусть $A = 1$, тогда $B = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $C = \frac{a\sqrt{3}}{2b}$, $D = 0$.

$(CMK): \; x - \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{a\sqrt{3}}{2b}z = 0$, $\bar{n}\left\{1; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{a\sqrt{3}}{2b}\right\}$ – вектор нормали

$A_1(0; a; b)$; $N\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a}{4}; 0\right) \Rightarrow \overline{A_1N}\left\{\frac{a\sqrt{3}}{4}; -\frac{3a}{4}; -b\right\}$

$\overline{A_1N} \cdot \bar{n} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot 1 + \left(-\frac{3a}{4}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + (-b) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2b} = \frac{a\sqrt{3}}{4} + \frac{a\sqrt{3}}{4} - \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0.$

$\overline{A_1N} \cdot \bar{n} = 0 \Rightarrow \overline{A_1N} \perp \bar{n} \Rightarrow A_1N \parallel (CMK)$, ч. т. д.

б) $AB = a = 4$; $AA_1 = b = 3$.

$(CMK): x - \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{2\sqrt{3}}{3}z = 0$

$3x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3}z = 0$

$\overline{m}\{3; -\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\}$ – вектор нормали.

$A_1(0; 4; 3)$

т.к. $A_1N \parallel (CMK)$, то $\rho(A_1N; (CMK)) = \rho(A_1; (CMK)) =$

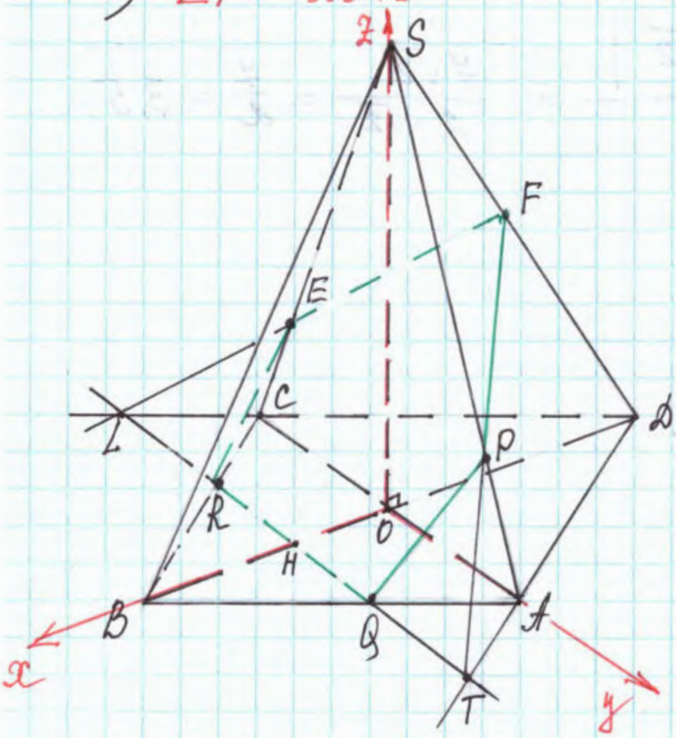
$$= \frac{0\cdot 3 - 4\cdot\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\cdot 3}{\sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{24}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rho(A_1N; (CMK)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

<u>Ответ:</u> б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

14.4. Четырёхугольные пирамиды

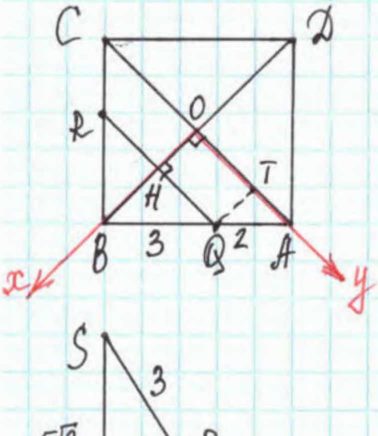
1) ЕГЭ-2015



Дано: $SABCD$ – правильная пирамида
$AB = SA = 5$
$P \in SA$; $Q \in AB$; $R \in BC$
$PA = AQ = RS = 2$

а) Док-ть: $(PQR) \perp SD$
б) Найти: $\rho(D; (PQR))$.

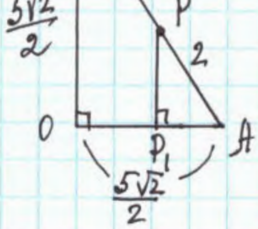
а) Строим сечение:
$QR \cap AD = T$, $TP \cap SD = F$
$QR \cap CD = L$, $LF \cap SC = E$
$PQREF$ – искомое сечение.
Введём систему координат как показано на рисунке



$AB = 5$, $AQ = 2$, $BQ = 3$, $AC = BD = 5\sqrt{2}$, $OA = OB = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$OH = \frac{2}{5} \cdot OB = \frac{2 \cdot 5\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = \sqrt{2}$, $OT = \frac{3}{5} \cdot OA = \frac{3 \cdot 5\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$Q\left(\sqrt{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}; 0\right)$; $R\left(\sqrt{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $P\left(0; \frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$



$OP_1 = \frac{3}{5} \cdot OA = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P_1$ совпадает с точкой T.

$SO = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - \frac{25}{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $\boxed{SO = OA}$

$PP_1 = PT = \frac{2}{5} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Составим уравнение плоскости (PQR) в виде $Ax + By + Cz + D = 0$

P: $0 \cdot A + \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot B + \sqrt{2} \cdot C + D = 0$
Q: $\sqrt{2} \cdot A + \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot B + 0 \cdot C + D = 0$
R: $\sqrt{2} A - \frac{3\sqrt{2}}{2} B + 0 \cdot C + D = 0$

$B = 0$
$D = -\sqrt{2} C$
$\sqrt{2} A - \sqrt{2} C = 0$

$B = 0$
$D = -\sqrt{2} C$
$A = C$

Пусть
$C = 1$
$A = 1$
$B = 0$
$D = -\sqrt{2}$

(PQR): $x + z - \sqrt{2} = 0$. $\bar{n}\{1; 0; 1\}$ – вектор нормали.

$S\left(0; 0; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$; $D\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right) \Rightarrow \overline{SD}\left\{-\frac{5\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right\}$

$\bar{m}\{1; 0; 1\}$ – направляющий вектор прямой SD.

Векторы $\bar{m}$ и $\bar{n}$ равны (могли быть коллинеарны), значит $(PQR) \perp SD$.

б) $(PQR):\ x+z-\sqrt{2}=0$

$D\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};0;0\right)$

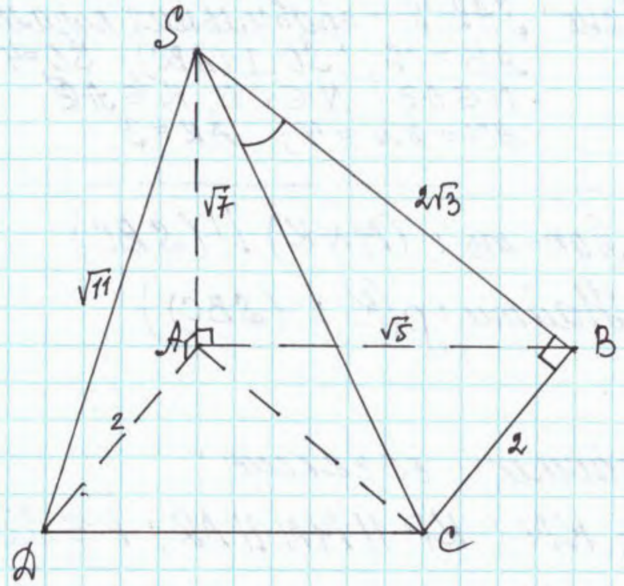
$$\rho(D;(PQR))=\frac{\left|-\frac{5\sqrt{2}}{2}+0-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}}=\frac{7}{2}=3{,}5$$

$$\boxed{\rho(D;(PQR))=3{,}5}$$

__Ответ:__ б) 3,5

14.4. Четырёхугольные пирамиды

2) ЕГЭ – 2015



Дано: $SABCD$ – пирамида
$ABCD$ – прямоугольник
$AB = \sqrt{5}$; $BC = 2$.
$SA = \sqrt{7}$; $SB = 2\sqrt{3}$; $SD = \sqrt{11}$

а) Док-ть: SA – высота
б) Найти: $(SC; \widehat{(ASB)})$

а) В треугольнике SAB найдем $\cos\angle SAB$ по теореме косинусов: $\cos\angle SAB = \dfrac{SA^2 + AB^2 - SB^2}{2\cdot SA\cdot AB}$

$$\cos\angle SAB = \frac{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}} = \frac{7+5-12}{2\sqrt{35}} = 0 \Rightarrow \angle SAB = 90^\circ.$$

Аналогично найдем $\cos\angle SAD = \dfrac{SA^2 + AD^2 - SD^2}{2\cdot SA\cdot AD}$

$$\cos\angle SAD = \frac{(\sqrt{7})^2 + 2^2 - (\sqrt{11})^2}{2\cdot\sqrt{7}\cdot 2} = \frac{7+4-11}{4\sqrt{7}} = 0 \Rightarrow \angle SAD = 90^\circ.$$

$SA \perp AB$ и $SA \perp AD$, значит $SA \perp (ABD)$, т.е. SA – высота.

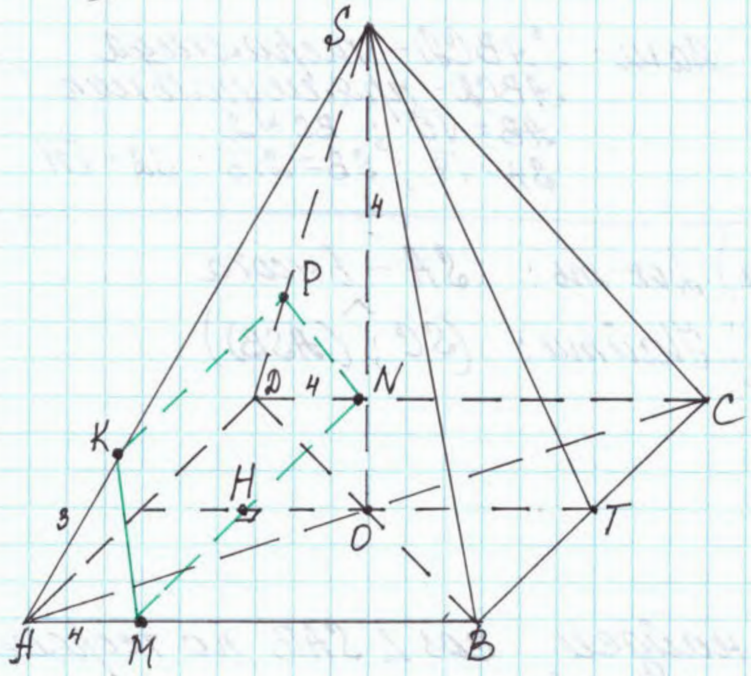
б). $(SAB) \perp (ABC) \Rightarrow CB \perp SB$, $\angle SBC = 90^\circ$.
$(SC; \widehat{(ASB)}) = (SC; SB) = \angle BSC$.
Из $\triangle BSC$: $tg\angle BSC = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle BSC = 30^\circ$.

$$(SC; \widehat{(ASB)}) = 30^\circ.$$

Ответ: б) 30°.

14.4. Четырехугольные пирамиды

3) ЕГЭ - 2016

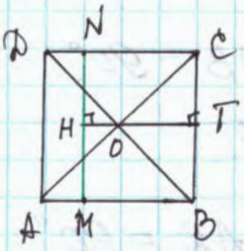


Дано: $SABCD$ – правильная пирамида
$AB = 16$, $SO \perp (ABC)$, $SO = 4$
$M \in AB$; $N \in CD$, $K \in AS$
$AM = DN = 4$; $AK = 3$.

а) Док-ть: $(MNK) \parallel (SBC)$

б) Найти: $\rho(K; (SBC))$

а) Строим сечение:
MN; KM; $KP \parallel MN \parallel AD$; $P \in SD$
KP; PN.
$KPNM$ – искомое сечение.



$AM = DN = 4 \Rightarrow MN \parallel AD \parallel BC$.

$AC = 16\sqrt{2}$, $AO = 8\sqrt{2}$; $SO = 4 \Rightarrow AS = \sqrt{4^2 + (8\sqrt{2})^2} = \sqrt{144} = 12$

$AK = 3$, $SK = 12 - 3 = 9$.

В $\triangle SAB$: $SA = SB$; $\frac{AM}{AB} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$; $\frac{AK}{AS} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

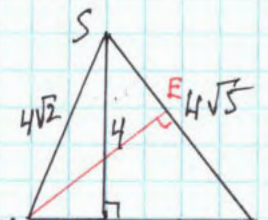
$\triangle AMK \sim \triangle ABS$ по двум пропорциональным сторонам и равному углу между ними, значит $KM \parallel SB$.

В плоскостях (MNK) и (SBC): $KM \parallel SB$ и $MN \parallel BC$, поэтому $(MNK) \parallel (SBC)$.

б) $\rho(K; (SBC)) = \rho(MN; (SBC)) = \rho(H; (SBC))$, где $OH \perp MN$

$OH = 4$, $OT = 8 \Rightarrow HT = 12$.

$\triangle SOT$: $ST = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.



$SH = 4\sqrt{2}$, $S_{SHT} = \frac{SO \cdot HT}{2} = \frac{ST \cdot HE}{2}$; $HE = \frac{SO \cdot HT}{ST}$

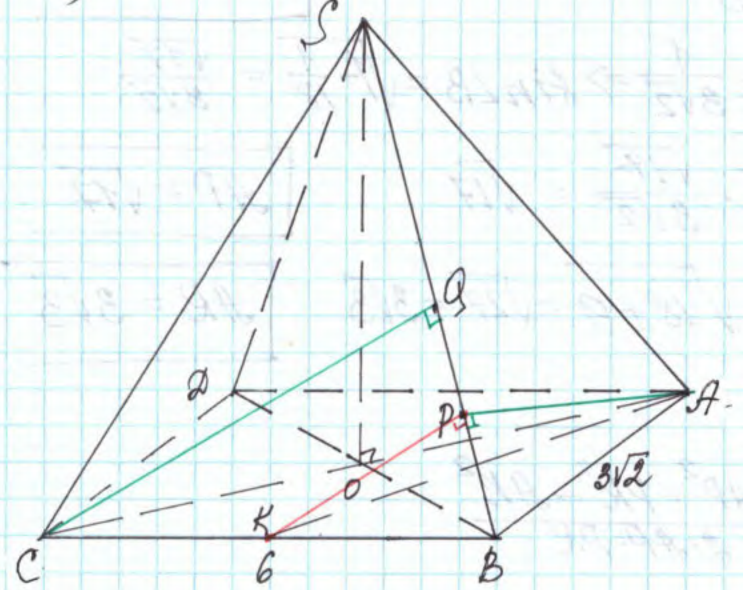
$HE = \frac{4 \cdot 12}{4\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

HE – искомое расстояние. $\rho(K; (SBC)) = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

14.4. Четырехугольные пирамиды

4) ЕГЭ - 2017

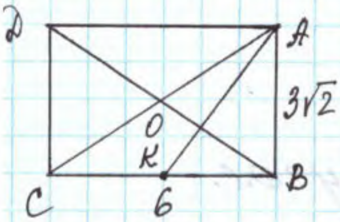


Дано: $SABCD$ - пирамида
$ABCD$ - прямоугольник
$AC \cap BD = O$, $SO \perp (ABC)$
$AB = 3\sqrt{2}$; $BC = 6$
$AP \perp SB$; $CQ \perp SB$

а) Док-ть: P - середина BQ

б) Найти: $\widehat{((SBA);(SBC))}$, если $SD = 9$.

угол между гранями SBA и SBC.



а) $AO = BO = CO = AO$, SO - высота $\Rightarrow SA = SB = SC = SD$.

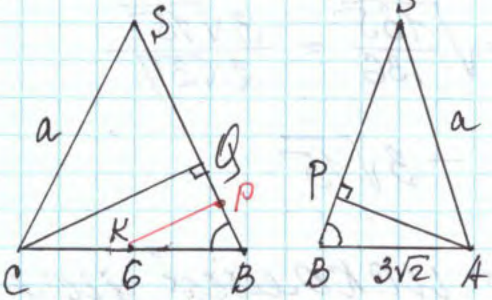
Пусть боковые ребра равны a.

$\triangle SBC$: $SC = SB = a$, $BC = 6$

по теореме косинусов

$$\cos\angle SBC = \frac{SB^2 + BC^2 - SC^2}{2 \cdot SB \cdot BC} = \frac{a^2 + 36 - a^2}{2 \cdot a \cdot 6} = \frac{3}{a}$$

$\triangle BCQ$: $\cos\angle QBC = \dfrac{BQ}{BC} \Rightarrow BQ = 6 \cdot \dfrac{3}{a} = \dfrac{18}{a}$



$\triangle SAB$: $\cos\angle SBA = \dfrac{a^2 + (3\sqrt{2})^2 - a^2}{2 \cdot a \cdot 3\sqrt{2}} = \dfrac{3}{a\sqrt{2}}$;

$\triangle ABP$: $\cos\angle PBA = \dfrac{BP}{AB} \Rightarrow BP = 3\sqrt{2} \cdot \dfrac{3}{a\sqrt{2}} = \dfrac{9}{a}$

$BQ = \dfrac{18}{a}$, $BP = \dfrac{9}{a} \Rightarrow BQ = 2BP$, P - середина BQ.

б) $(SBA) \cap (SBC) = SB$, SB - ребро двугранного угла.

$PK \perp SB$, P - середина $BQ \Rightarrow K$ - середина BC.

$\angle APK$ - линейный угол между плоскостями, если он будет не больше $90°$. Если этот угол окажется тупым, то возьмем ему смежный угол.

По заданию надо найти угол между гранями, а не между плоскостями, значит это $\angle APK$. (он может быть и тупым)

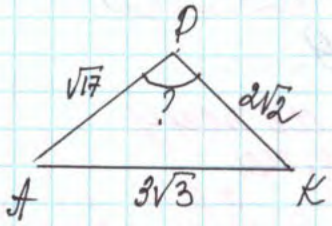
$\triangle SBC$: $\cos\angle B = \frac{3}{a} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\angle B = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$KP = BK \cdot \sin\angle B = 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$ $\boxed{KP = 2\sqrt{2}}$

$\triangle SBA$: $\cos\angle B = \frac{3}{a\sqrt{2}} = \frac{3}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\angle B = \sqrt{1-\frac{1}{18}} = \frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}$

$AP = AB \cdot \sin\angle B = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}} = \sqrt{17}$ $\boxed{AP = \sqrt{17}}$

$\triangle ABK$: $AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \sqrt{18+9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ $\boxed{AK = 3\sqrt{3}}$



$\triangle APK$:

$$\cos\angle APK = \frac{AP^2 + PK^2 - AK^2}{2 \cdot AP \cdot PK}$$

$$\cos\angle APK = \frac{17+8-27}{2\cdot\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{-2}{4\sqrt{34}} = \frac{-1}{2\sqrt{34}}$$

$\angle APK = \arccos\left(\frac{-1}{2\sqrt{34}}\right)$ – тупой угол.

$$\sin\angle APK = \sqrt{1-\left(\frac{-1}{2\sqrt{34}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{136}} = \sqrt{\frac{135}{136}} = \frac{3\sqrt{15}}{2\sqrt{34}}$$

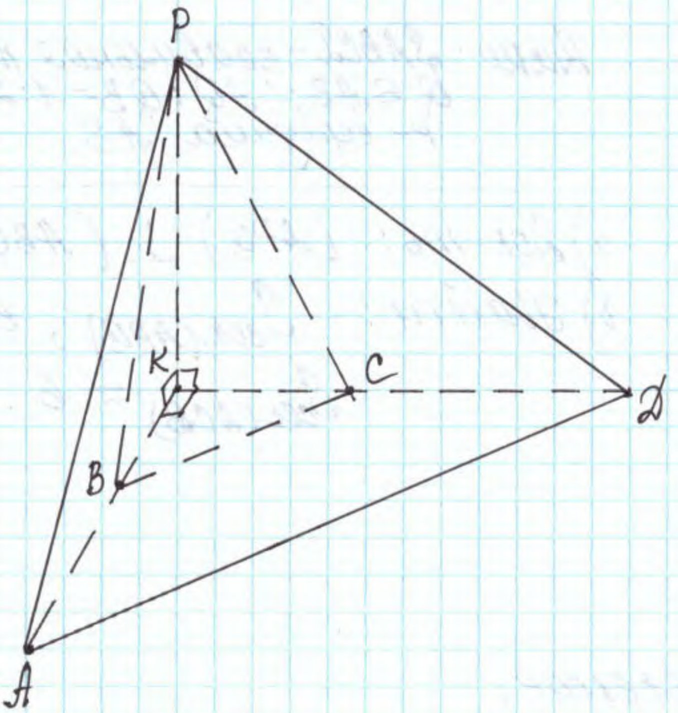
$$\operatorname{tg}\angle APK = \frac{\sin\angle APK}{\cos\angle APK} = \frac{3\sqrt{15}}{-1} = -3\sqrt{15}$$

$\operatorname{arctg}(-3\sqrt{15}) = \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{34}}\right)$ – искомый угол.

<u>Ответ</u>: б) $\operatorname{arctg}(-3\sqrt{15})$.

14.4. Четырехугольные пирамиды

5) ЕГЭ – 2017

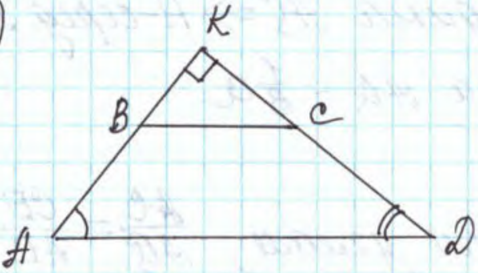


Дано: $PABCD$ – пирамида
$ABCD$ – трапеция
$BC \parallel AD$, $AD > BC$
$\angle BAD + \angle ADC = 90°$
$(PAB) \perp (ABC)$
$(PCD) \perp (ABC)$
$AB \cap CD = K$

а) Док-ть: $(PAB) \perp (PCD)$

б) Найти: V_{PKBC}, если $AB = BC = CD = 3$, высота пирамиды 8

а)



Если $\angle BAD + \angle ADC = 90°$, то $\angle AKD = 90°$.

$(PAB) \cap (PCD) = PK$, но эти пл-ти перпендикулярны основанию, значит $KP \perp (ABC)$, т.е. $PK = 8$ – высота.

$AK \perp KD$ и $AK \perp KP \Rightarrow AK \perp (PCD) \Rightarrow (PAB) \perp (PCD)$

б) $AB = BC = CD = 3$; $PK = 8$.

$ABCD$ – равнобедренная трапеция, $\angle A = \angle D$, но тогда $\angle KBC = \angle KCB = 45° \Rightarrow BK = KC = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$$S_{KBC} = \frac{BK \cdot KC}{2} = \frac{3 \cdot 3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2} = \frac{9}{4}$$

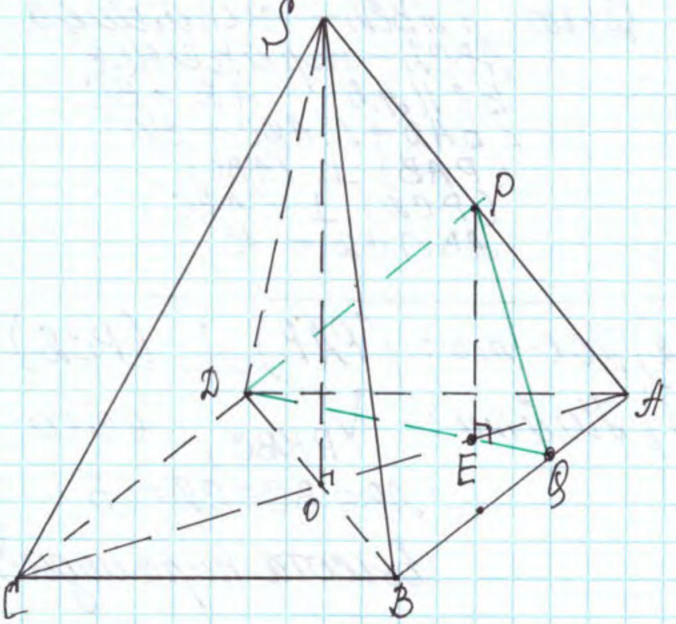
$$V_{PKBC} = \frac{1}{3} S_{KBC} \cdot PK = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} \cdot 8 = 6.$$

$\boxed{V_{PKBC} = 6}$

Ответ: б) 6

14.4. Четырехугольные пирамиды

в) ЕГЭ – 2018

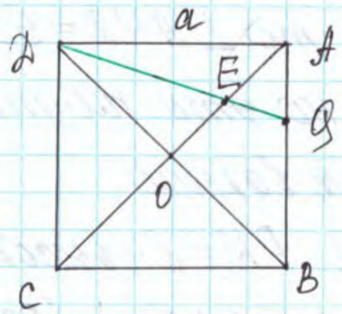


Дано: $SABCD$ – правильная пирамида
$Q \in AB$; $AQ : QB = 1:2$
P – середина AS

а) Док-ть: $(DPQ) \perp (ABC)$

б) Найти: $S_{сеч.(DPQ)}$, если $S_{сеч.(DCB)} = 6$.

а) $\triangle DPQ$ – искомое сечение.



$PH \perp AC$, P – середина $AS \Rightarrow H$ – серед. AO.

Пусть $AB = a$, тогда $AQ = \frac{1}{3}a$

$DQ \cap AC = E$

$\triangle DCE \sim \triangle QAE$ по двум углам, $\frac{DC}{AQ} = \frac{CE}{AE}$

$\frac{a \cdot 3}{a} = \frac{CE}{AE}$, $\frac{CE}{AE} = \frac{3}{1}$, $CE = 3AE$, $AE = OE$

т.е. E – середина AO, поэтому точки H и E совпадут.

$PE \perp (ABC)$ и $PE \subset (DPQ) \Rightarrow \underline{(DPQ) \perp (ABC)}$.

б) $S_{DCB} = \frac{DB \cdot SO}{2} = \frac{a\sqrt{2} \cdot SO}{2}$; $\frac{a\sqrt{2} \cdot SO}{2} = 6$; $a\sqrt{2} \cdot SO = 12$

$SO = \frac{12}{a\sqrt{2}}$; $PE = \frac{1}{2}SO = \frac{6}{a\sqrt{2}}$

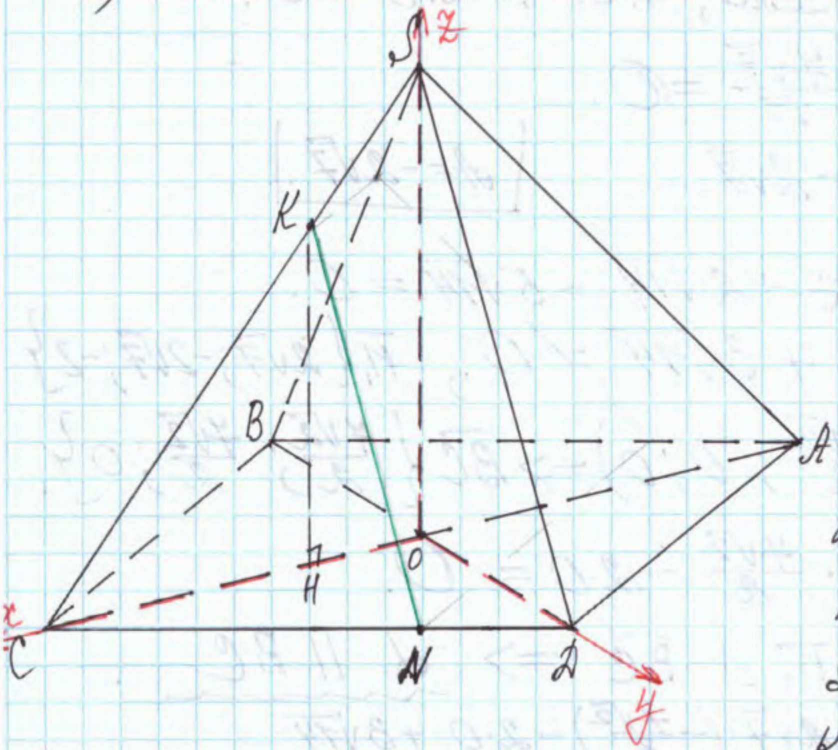
$DQ = \sqrt{AD^2 + AQ^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = a\sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$

$S_{DPQ} = \frac{DQ \cdot PE}{2} = \frac{a\sqrt{10} \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot a\sqrt{2}} = \sqrt{5}$, $\boxed{S_{DPQ} = \sqrt{5}}$

Ответ: б) $\sqrt{5}$

14.4. Четырехугольные пирамиды

7) ЕГЭ - 2019



Дано: SABCD - правильная пирамида
$AB=7$, $SA=14$.
$N \in CD$, $K \in SC$
$DN:NC = SK:KC = 2:5$
α - пл-ть сечения
$NK \subset \alpha$, $\alpha \parallel SA$

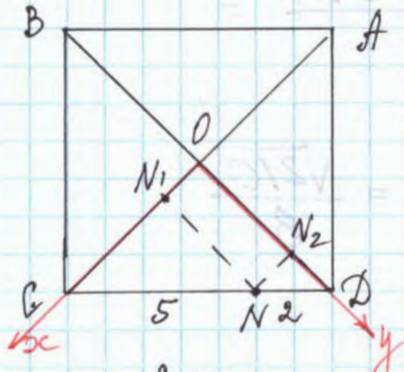
а) Док-ть: $\alpha \parallel BC$

б) Найти: $\rho(B;\alpha)$.

а) Введем систему координат как показано на рисунке.

$SO \perp (ABC)$, $O(0;0;0)$

$KH \perp (ABC)$, $OH:HC = 2:5$

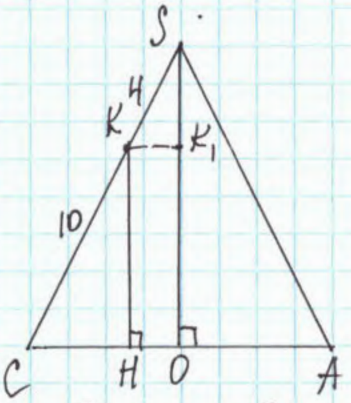


$AB=7$, $DN=2$, $CN=5$, $AC=7\sqrt{2}$, $AO=OC=\frac{7\sqrt{2}}{2}$

$ON_1 : N_1C = 2:5 \Rightarrow$ точки N_1 и H совпадут

$OH = \frac{2}{7}OC = \frac{2}{7}\cdot\frac{7\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$ON_2 = \frac{5}{7}\cdot OD = \frac{5\cdot 7\sqrt{2}}{7\cdot 2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ | $N\left(\sqrt{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}; 0\right)$



$SC=14$, $SK=4$, $CK=10$.

$\triangle SCO$: $SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = \sqrt{14^2 - \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{196 - \frac{49}{2}} = \frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

$K_1O = \frac{5}{7}\cdot SO = \frac{5}{7}\cdot\frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; $K\left(\sqrt{2}; 0; \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)$.

$A\left(-\frac{7\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $S\left(0; 0; \frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)$

$\overline{AS}\left\{\frac{7\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right\}$

Составим уравнение плоскости α в виде
$Ax + By + Cz + D = 0$.

$N \in \alpha$: $\sqrt{2}A + \frac{5\sqrt{2}}{2}B + 0\cdot C + D = 0$ $\quad \frac{5\sqrt{2}}{2}B - \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}C = 0$

$K \in \alpha$: $\sqrt{2}A + 0\cdot B + \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}C + D = 0$ $\quad B = \sqrt{7}C$

$\sqrt{2}\cdot A + \frac{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}}{2}C + D = 0$ $\quad D = -\sqrt{2}A - \frac{5\sqrt{14}}{2}C$

Пусть $C=2$, тогда $B = 2\sqrt{7}$; $D = -\sqrt{2}A - 5\sqrt{14}$

α: $Ax + 2\sqrt{7}y + 2z - \sqrt{2}A - 5\sqrt{14} = 0$, $\overline{n}\{A; 2\sqrt{7}; 2\}$

$S\left(0;0;\frac{7\sqrt7}{\sqrt2}\right)$, $A\left(-\frac{7\sqrt2}{2};0;0\right) \Rightarrow \overline{AS}\left\{\frac{7\sqrt2}{2};0;\frac{7\sqrt7}{\sqrt2}\right\}$

Если $\alpha \parallel AS$, то $\overline{n} \perp \overline{AS}$, т.е. $\overline{n}\cdot\overline{AS}=0$.

$$A\cdot\frac{7\sqrt2}{2}+2\sqrt7\cdot0+2\cdot\frac{7\sqrt7}{\sqrt2}=0.$$

$$A=-\frac{2\cdot7\sqrt7\cdot2}{\sqrt2\cdot7\sqrt2}=-2\sqrt7. \qquad \boxed{A=-2\sqrt7}$$

$\alpha: -2\sqrt7x+2\sqrt7y+2z+2\sqrt{14}-5\sqrt{14}=0.$

$\alpha: 2\sqrt7x-2\sqrt7y-2z+3\sqrt{14}=0.$, $\overline{n_1}\{2\sqrt7;-2\sqrt7;-2\}$

$B\left(0;\frac{-7\sqrt2}{2};0\right)$, $C\left(\frac{7\sqrt2}{2};0;0\right) \Rightarrow \overline{BC}\left\{\frac{7\sqrt2}{2};\frac{7\sqrt2}{2};0\right\}$.

$$\overline{n_1}\cdot\overline{BC}=2\sqrt7\cdot\frac{7\sqrt2}{2}-2\sqrt7\cdot\frac{7\sqrt2}{2}-2\cdot0=0.$$

т.к. $\overline{n_1}\cdot\overline{BC}=0$, то $\overline{n_1}\perp\overline{BC} \Rightarrow \alpha\parallel BC$.

б) $$\rho(B;\alpha)=\frac{2\sqrt7\cdot0-2\sqrt7\cdot\left(-\frac{7\sqrt2}{2}\right)-2\cdot0+3\sqrt{14}}{\sqrt{(2\sqrt7)^2+(-2\sqrt7)^2+(-2)^2}}=$$

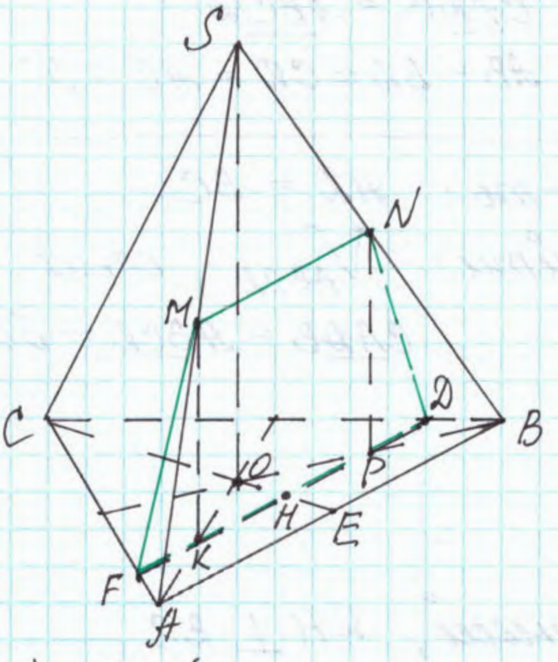
$$=\frac{7\sqrt{14}+3\sqrt{14}}{\sqrt{28+28+4}}=\frac{10\sqrt{14}}{2\sqrt{15}}=\frac{5\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{15}}{15}=\frac{\sqrt{210}}{3}$$

$$\rho(B;\alpha)=\frac{\sqrt{210}}{3}$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{210}}{3}$

14.5. Треугольные пирамиды.

1) ЕГЭ-2015

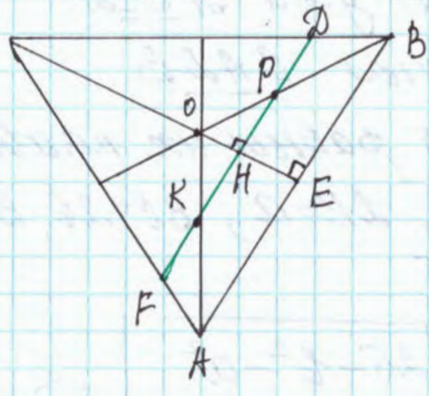


Дано: SABC - правильная пирамида
$AB = 30$; $SA = 28$.
M - середина SA
N - середина SB
α - плоскость сечения
$MN \subset \alpha$, $\alpha \perp (ABC)$
CE - медиана $\triangle ABC$

а) Док-ть: $CH : HE = 5 : 1$, где $H = CE \cap \alpha$.

б) Найти: объем пирамиды, с вершиной C и основанием - сечение.

а) Строим сечение: $MK \perp (ABC)$; $NP \perp (ABC)$;
$KP \cap AC = F$; $KP \cap BC = D$; MN; MF; ND; FD.
MNDF - искомое сечение (равнобедренная трапеция).



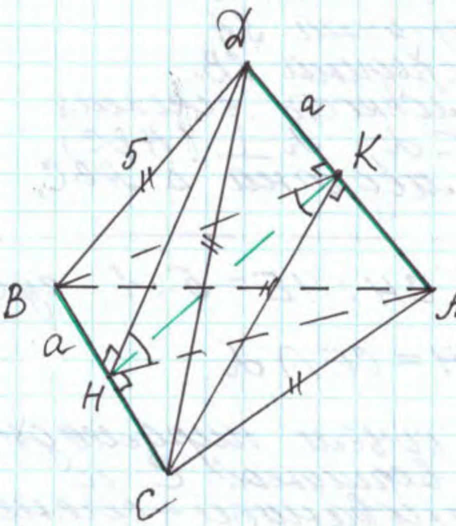
N - середина SB, $PN \perp BO \Rightarrow$ P - середина BO.
M - середина SA, $MK \perp AO \Rightarrow$ K - середина AO.
KP - средняя линия $\triangle AOB \Rightarrow KP \parallel AB$.
$OH = HE$, $HE = \frac{1}{2} OE = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} CE = \frac{1}{6} CE$.
$CH = CE - \frac{1}{6} CE = \frac{5}{6} CE$.
$CH : HE = \frac{5}{6} : \frac{1}{6} = 5 : 1$, ч.т.д.

б) Пирамида CMNDF: C - вершина, CH - высота, MNDF - основание. $V_{CMNDF} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNDF} \cdot CH$.
$AB = 30$, $MN = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$; $FD = \frac{5}{6} \cdot AB = \frac{5}{6} \cdot 30 = 25$.
MK - высота трапеции, $MK = \frac{1}{2} SO$.
$AO = \frac{2}{3} \cdot AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}$; $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{28^2 - (10\sqrt{3})^2} = 22$
$MK = \frac{1}{2} \cdot 22 = 11$. $S_{MNDF} = \frac{MN + FD}{2} \cdot MK = \frac{15 + 25}{2} \cdot 11 = 220$
$CH = \frac{5}{6} \cdot \frac{30\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$.
$V = \frac{1}{3} \cdot 220 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{2} = \frac{2750\sqrt{3}}{3}$

Ответ: б) $\frac{2750\sqrt{3}}{3}$

14.5. Треугольные пирамиды.

2) ЕГЭ – 2016



Дано: $ABCD$ – пирамида
$C\underline{AD}B = A\underline{BC}D$
$AB = BD = CD = AC = 5$

а) Док-ть: $AD = BC$
б) Найти: V_{ABCD}, если
$C\underline{AD}B = A\underline{BC}D = 60°$

а) $BD = CD$, $\triangle BCD$ – равнобедренный, $DH \perp BC$,
DH – медиана и биссектриса, H – середина BC.
$AB = AC$, $\triangle BCA$ – равнобедренный, H – середина BC,
$AH \perp BC$. Тогда $\angle DHA$ – линейный угол $A\underline{BC}D$.
Аналогично: $\angle CKB$ – линейный угол $C\underline{AD}B$.
По условию $\angle DHA = \angle CKB$, значит равны их половины.
Поэтому, $\triangle BKH = \triangle DHK$ по катету HK и
прилежащему острому углу. Значит $BH = DK$,
$BC = AD$.

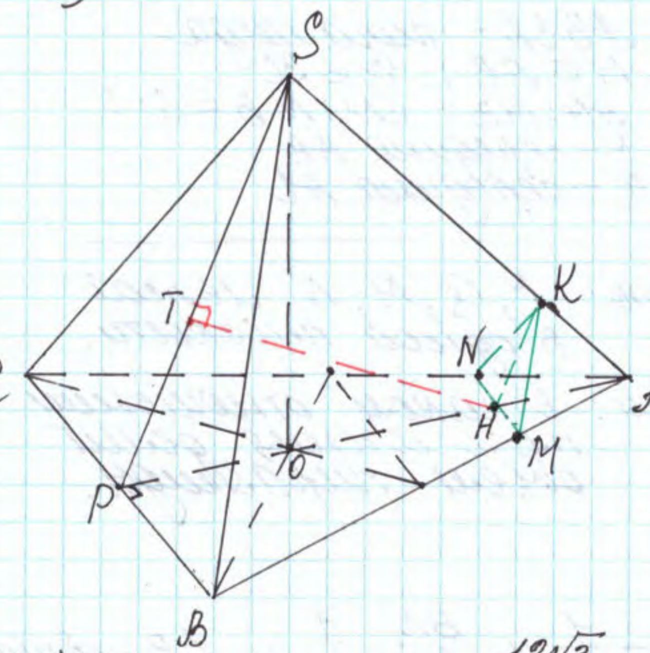
б) Пусть $DK = BH = a$, $\angle BKC = 60°$ (по условию)
$\angle BKH = 30°$; $BK = 2a$
Из $\triangle BKD$: $BK = \sqrt{5^2 - a^2} = \sqrt{25 - a^2}$ $\Rightarrow$
$2a = \sqrt{25 - a^2}$; $4a^2 = 25 - a^2$; $5a^2 = 25$; $a^2 = 5$; $a = \sqrt{5}$.
$AD = BC = 2\sqrt{5}$; $BK = \sqrt{25 - 5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
Разобьем пирамиду $ABCD$ на две равные пирамиды: $DBKC$ и $ABKC$. $V_{ABCD} = 2V_{DBKC} = 2 \cdot \frac{1}{3} S_{BKC} \cdot DK$

$$V_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(2\sqrt{5})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{5} = \frac{10\sqrt{15}}{3}$$

Ответ: б) $\frac{10\sqrt{15}}{3}$

14.5. Треугольные пирамиды

3) ЕГЭ – 2016



Дано: $SABC$ – правильная пирамида

$AB = 12$; $SO \perp (ABC)$; $SO = 1$

$M \in AB$; $N \in AC$; $K \in AS$

$AM = AN = 3$

$AK = 7/4$

а) Док-ть: $(MNK) \parallel (SBC)$

б) Найти: $\rho(K; (SBC))$

а) $AB = 12$; $AP = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, $AO = \frac{2}{3} \cdot AP = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$\triangle SOA$: $SO = 1$; $AO = 4\sqrt{3} \Rightarrow SA = \sqrt{1^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+48} = 7$.

$AK = \frac{7}{4}$; $SA = 7 \Rightarrow SK = 7 - \frac{7}{4} = \frac{21}{4}$, $\frac{AK}{SK} = \frac{7}{4} : \frac{21}{4} = \frac{1}{3}$

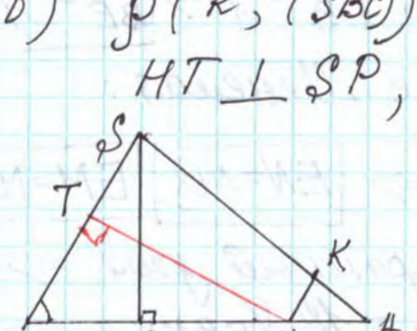
т.е. $AK = \frac{1}{4} AS$.

$\triangle ABC$: $AB = 12$, $AM = 3 \Rightarrow AM = \frac{1}{4} AB$ и $AN = \frac{1}{4} AB$.

$\triangle AMK \sim \triangle ABS$ по двум пропорциональным сторонам и равному углу; значит $KM \parallel SB$. Аналогично, $KN \parallel SC$ и $MN \parallel BC$, поэтому $(MNK) \parallel (SBC)$.

б) $\rho(K; (SBC)) = \rho(H; (SBC)) = HT$, где $H = AP \cap (MNK)$,

$HT \perp SP$, $KH \parallel SP$, $AH = \frac{1}{4} AP = \frac{1}{4} \cdot 6\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$



$PH = \frac{3}{4} \cdot 6\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$, $OP = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$SP = \sqrt{SO^2 + OP^2} = \sqrt{1 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$

$\cos\angle SPA = \frac{SP^2 + AP^2 - SA^2}{2 \cdot SP \cdot AP} = \frac{13 + 108 - 49}{2\sqrt{13} \cdot 6\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{39}}$

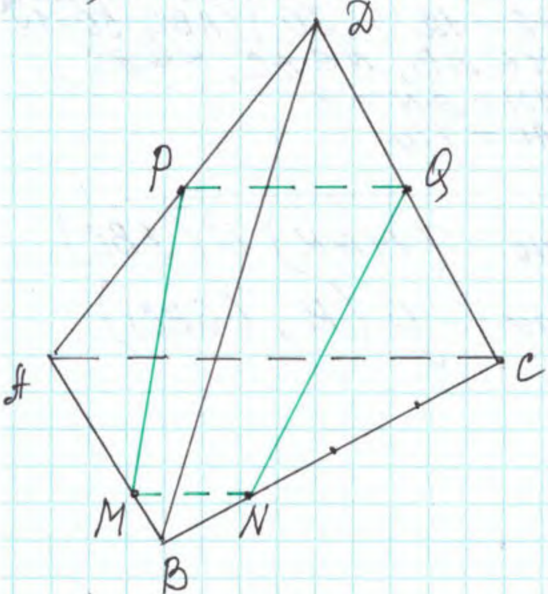
$\sin\angle SPA = \sqrt{1 - \frac{36}{39}} = \sqrt{\frac{3}{39}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \sin\angle TPH$.

$\triangle PHT$: $HT = PH \cdot \sin\angle TPH = \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{39}}{26}$

Ответ: б) $\frac{9\sqrt{39}}{26}$

14.5. Треугольные пирамиды

4) ЕГЭ-2017



Дано: $ABCD$ – пирамида
$M \in AB$; $N \in BC$
$AM : MB = CN : NB = 3 : 1$
P – середина DA
Q – середина DC

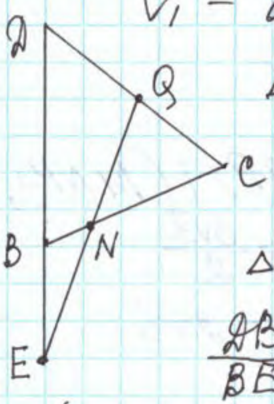
а) Док-ть: P, Q, M, N лежат в одной плоскости.

б) Найти: в каком отношении пл-ть сечения делит объем пирамиды.

а) $\triangle BMN \sim \triangle BAC$, т.к. $\frac{BM}{BA} = \frac{1}{4}$ и $\frac{BN}{BC} = \frac{1}{4}$ и $\angle B$ – общий.
Значит $MN \parallel AC$.
PQ – средняя линия $\triangle ADC$, значит $PQ \parallel AC$.

$$\left.\begin{matrix} MN \parallel AC \\ PQ \parallel AC \end{matrix}\right| \Rightarrow MN \parallel PQ \Rightarrow$$ P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

б) $PQNM$ – сечение пирамиды.
Пусть V – объем пирамиды
V_1 – объем верхней части; V_2 – объем нижней части



$\triangle DBC$ и прямая QN ($QN \cap DE = E$) по теореме Менелая:

$$\frac{DE}{EB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CQ}{QD} = 1; \quad \frac{DE}{EB} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = 1; \quad \frac{DE}{EB} = \frac{3}{1} \Rightarrow \boxed{\frac{DB}{BE} = \frac{2}{1}}$$

$\triangle DEQ$ и прямая BC по теореме Менелая:

$$\frac{DB}{BE} \cdot \frac{EN}{NQ} \cdot \frac{QC}{CD} = 1; \quad \frac{2}{1} \cdot \frac{EN}{NQ} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{EN = NQ} \quad \boxed{EM = MP}$$

Пирамиды $EMNB$ и $EPQD$ имеют общий трехгранный угол $\Rightarrow$

$$V_{EBMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} V_{EPQD} = \frac{1}{12} V_{EPQD} \Rightarrow V_{EPQD} = 12 V_{EBMN}$$

Пирамиды $DABC$ и $DPEQ$ тоже имеют общий трехгр. угол $\Rightarrow$

$$V_{DPEQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} V_{DABC} = \frac{3}{8} V_{DABC} = \frac{3}{8} V; \quad 12 V_{EBMN} = \frac{3}{8} V \Rightarrow V_{EBMN} = \frac{1}{32} V$$

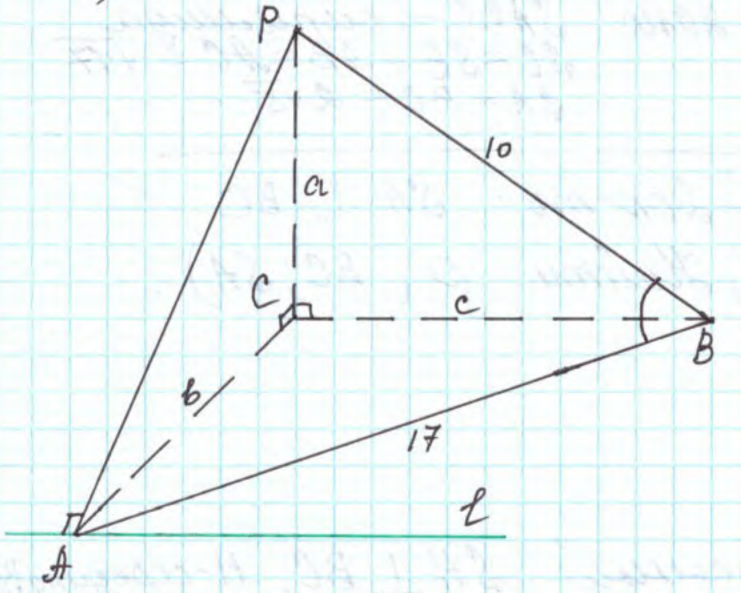
Значит $V_1 = \frac{3}{8} V - \frac{1}{32} V = \frac{11}{32} V$, $V_2 = V - \frac{11}{32} V = \frac{21}{32} V$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{11 \cdot 32}{32 \cdot 21} = \frac{11}{21}.$$

Ответ: б) $\frac{11}{21}$

14.5. Треугольные пирамиды

5) ЕГЭ-2017



Дано: $PABC$ – пирамида
$\triangle ABC$ – основание
$AB = 17$, $PB = 10$
$\cos\angle PBA = \frac{32}{85}$
PC – высота пирамиды
$PA \perp BC$

а) Док-ть: $\triangle ABC$ – прямоугольный
б) Найти: V_{PABC}

а) PC – высота пирамиды, значит $PC \perp BC$ и $PC \perp AC$
Проведем через точку A прямую l: $l \parallel BC$.
$PA \perp BC$, $BC \parallel l \Rightarrow PA \perp l$.
По теореме о трех перпендикулярах $l \parallel AC \Rightarrow BC \perp AC$,
т.е. $\angle BCA = 90°$, $\triangle ABC$ – прямоугольный.

б) $\triangle ABP$: $AP = \sqrt{AB^2 + PB^2 - 2 \cdot AB \cdot PB \cdot \cos\angle PBA}$ по теореме косинусов

$$AP = \sqrt{17^2 + 10^2 - 2 \cdot 17 \cdot 10 \cdot \frac{32}{85}} = \sqrt{289 + 100 - 128} = \sqrt{261}$$

Пусть $PC = a$, $AC = b$, $BC = c$, тогда

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 100 \\ b^2 + c^2 = 289 \\ a^2 + b^2 = 261 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(a^2 + b^2 + c^2) = 650 \\ b^2 + c^2 = 289 \\ a^2 + b^2 = 261 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 325 \\ b^2 + c^2 = 289 \\ a^2 + b^2 = 261 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 36 \\ b^2 = 225 \\ c^2 = 64 \end{cases}$$

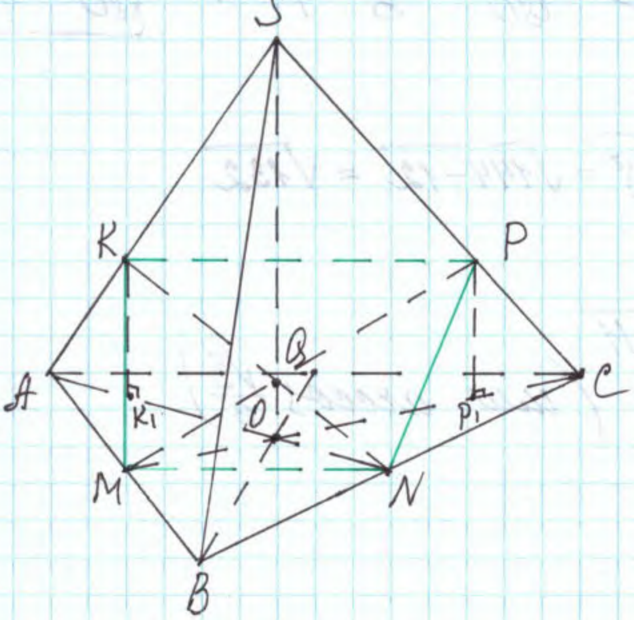
$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 15 \\ c = 8 \end{cases} \qquad V_{PABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot PC = \frac{1}{3} \cdot \frac{b \cdot c}{2} \cdot a = \frac{6 \cdot 15 \cdot 8}{6} = 120$$

$$\boxed{V_{PABC} = 120}$$

Ответ: б) 120

14.5. Треугольные пирамиды

б) ЕГЭ-2018



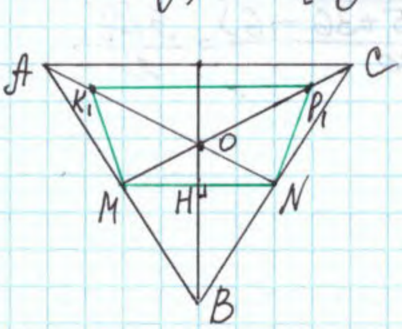
Дано: $SABC$ — правильная пирамида
S — вершина, SO — высота
M — середина AB
N — середина BC
$K \in SA$
$(MNK) \cap SC = P$
$KN \cap MP = Q$

а) Док-ть: $Q \in SO$

б₁) Найти: $\left((MNK), \widehat{\ }(ABC)\right)$, если $AB = 6$, $SA = 12$, $SK = 6$

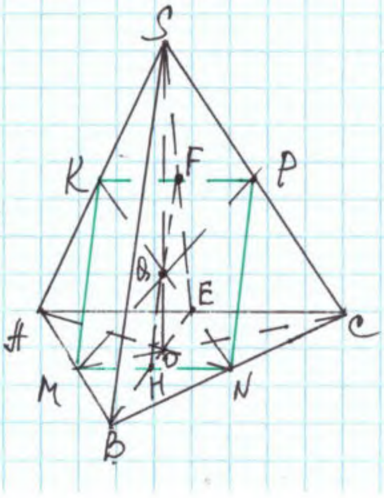
б₂) Найти: $S_{\text{сеч}(MNK)}$, если $AB = 12$, $SA = 15$, $SK = 6$.

а) MN — средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel AC$.
$K \in SA$, $(MNK) \cap (SAC) = KP$, где $KP \parallel MN \parallel AC$.
$\triangle SBC = \triangle SBA \Rightarrow KM = PN$ в силу симметрии отн. (SBO).
Поэтому $KMNP$ — четырехугольник, у которого равны диагонали $MP = KN$. Это может быть равнобедренная трапеция, прямоугольник, квадрат (зависит от положения точки K на SA).

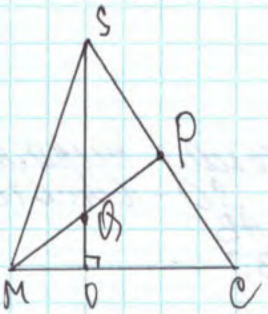


$PP_1 \perp (ABC)$, $KK_1 \perp (ABC)$
K_1MNP_1 — проекция $KMNP$ на основание.
$MP_1 \cap NK_1 = O \Rightarrow MP \cap KN = Q$ и $Q \in SO$.

б₁)



$AB = 6$, $MN = \frac{1}{2}AC = 3$, $SA = 12$, $SK = 6$, K — серед. SA.
KP — средняя линия $\triangle SAC$, $KP = \frac{1}{2}AC = 3$.
$KP = MN$, $KP \parallel MN$ и $KN = MP \Rightarrow KMNP$ — прям-к.
$BO \cap AC = E$, $MN \cap BE = H$
$\left((MNK), \widehat{\ }(ABC)\right) = \angle QHO$.
$BE = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, $BO = 2\sqrt{3}$; $OE = \sqrt{3}$
$BH = EH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; $OH = 2\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Для $\triangle SOC$ и прямой MP по теореме Менелая:

$$\frac{SQ}{QO}\cdot\frac{OM}{MC}\cdot\frac{CP}{PS}=1;\quad \frac{SQ}{QO}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{SQ}{QO}=\frac{3}{1}}$$

$$SC=12,\ CO=2\sqrt{3} \Rightarrow SO=\sqrt{12^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{144-12}=\sqrt{132}$$

$$OQ=\frac{1}{4}SO=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{132}=\frac{2\sqrt{33}}{4}=\frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$tg\angle QHO=\frac{QO}{OH}=\frac{\sqrt{33}\cdot 2}{2\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{33}{3}}=\sqrt{11}$$

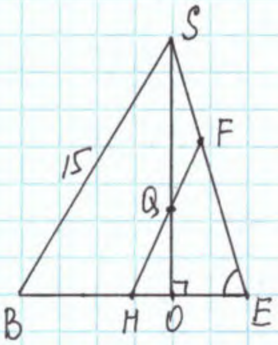
$$\left((MNK);\widehat{\ }(ABC)\right)=arctg\sqrt{11}\quad \left(или\ \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

б$_2$) $AB=12$; $SA=15$; $KS=6$.

$$MN=\frac{1}{2}\cdot 12=6.$$

$$\frac{KP}{AC}=\frac{SK}{SA};\quad \frac{KP}{12}=\frac{6}{15} \Rightarrow KP=4{,}8$$

$HQ\cap SE=F$, FH высота трапеции $KMNP$.



$$BE=\frac{12\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3},\quad BH=HE=3\sqrt{3}$$

$$OE=\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}=2\sqrt{3};\quad BO=4\sqrt{3}$$

$$SO=\sqrt{15^2-(4\sqrt{3})^2}=\sqrt{225-48}=\sqrt{177}$$

$$SE=\sqrt{177+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{177+12}=\sqrt{189}=3\sqrt{21}.$$

$$\frac{SF}{SE}=\frac{SK}{SA};\quad \frac{SF}{SE}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5};\quad SF=\frac{2}{5}SE,\quad FE=\frac{3}{5}SE=\frac{3\cdot 3\sqrt{21}}{5}=\frac{9\sqrt{21}}{5}$$

$$\cos\angle E=\frac{OE}{SE}=\frac{2\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{21}}=\frac{2}{3\sqrt{7}}$$

$\triangle HFE$: по теореме косинусов $HF=\sqrt{HE^2+FE^2-2\cdot HE\cdot FE\cdot\cos\angle E}$

$$HF=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+\left(\frac{9\sqrt{21}}{5}\right)^2-2\cdot\frac{3\sqrt{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\cdot 2}{5\cdot 3\sqrt{7}}}=\sqrt{27+\frac{81\cdot 21}{25}-\frac{2\cdot 9\cdot 3\cdot 2}{5}}=$$

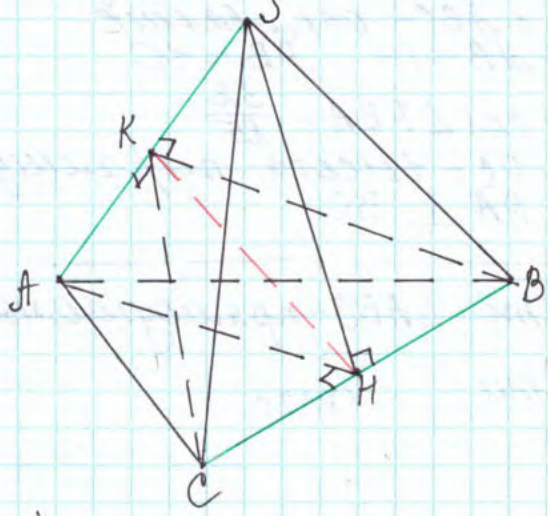
$$=\sqrt{\frac{27\cdot 25+81\cdot 21-20\cdot 27}{25}}=\sqrt{\frac{27(25+63-20)}{25}}=\sqrt{\frac{27\cdot 68}{25}}=\frac{6\sqrt{51}}{5}.$$

$$S_{KMNP}=\frac{MN+KP}{2}\cdot HF=\frac{6+4{,}8}{2}\cdot\frac{6\sqrt{51}}{5}=\frac{10{,}8\cdot 3\sqrt{51}}{5}=\frac{162\sqrt{51}}{25}$$

<u>Ответ</u>: б$_1$) $arctg\sqrt{11}$ $\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ б$_2$) $\frac{162\sqrt{51}}{25}$

14.5. Треугольные пирамиды

7) ЕГЭ - 2019



Дано: $SABC$ – пирамида

$SC = SB = AB = AC = \sqrt{17}$

$SA = BC = 2\sqrt{5}$

а) Док-ть: $SA \perp BC$

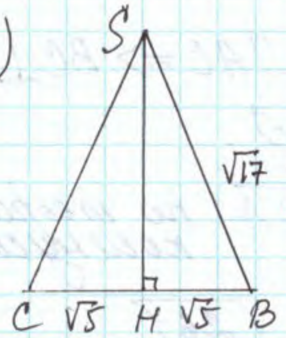
б) Найти: $\rho(BC; SA)$.

а) $SC = SB$, $\triangle SBC$ – равнобедренный, $SH \perp BC$, H – середина BC.

$AC = AB$, $\triangle ABC$ – равнобедренный, AH – медиана, $AH \perp BC$.

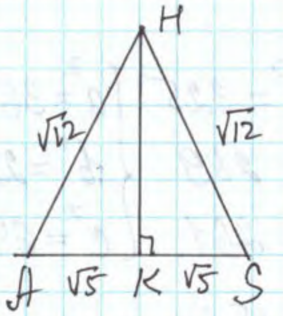
$BC \perp SH$ и $BC \perp AH \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SA$.

б)



$SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{17 - 5} = \sqrt{12}$.

$AH = SH = \sqrt{12}$.



$HK = \sqrt{SH^2 - SK^2} = \sqrt{12 - 5} = \sqrt{7}$.

$\rho(BC; SA) = HK$, т.к.

$BC \perp (SAH)$, $KH \subset (SAH) \Rightarrow BC \perp KH$.

$SA \perp KH$, HK – высота $\triangle ASH$.

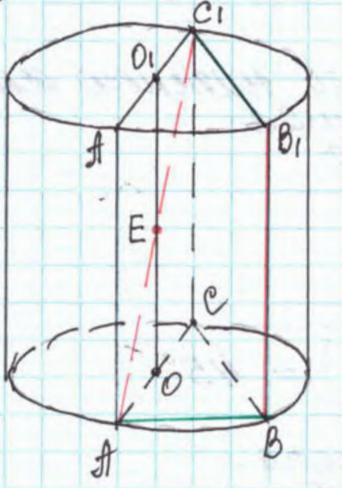
HK – общий перпендикуляр BC и SA.

$\rho(BC; SA) = \sqrt{7}$.

Ответ: б) $\sqrt{7}$.

$\boxed{14.6.}$ Тела вращения

1) ЕГЭ – 2018

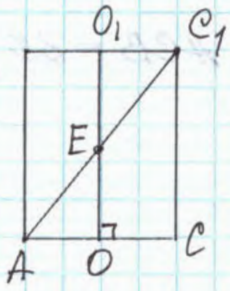


Дано: цилиндр OO_1 – ось
A и B на окр-ти нижнего основ.
BB_1 – образующая
$AC_1 \cap OO_1 = E$
B_1 и C_1 на окр-ти верхнего основ.

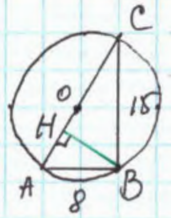
а) Док-ть: $AB \perp B_1C_1$

б) Найти: $\rho(AC_1; BB_1)$, если $AB = 8$; $B_1C_1 = 15$.

а)



AC_1 пересекает ось цилиндра и C_1 лежит на окружности верхнего основания, то C_1 и A симметричны относительно середины OO_1 точки E.



Из точки C_1 опустим перпендикуляр на основание, CC_1 – образующая, AC – диаметр $BC \parallel B_1C_1$ и $BC = B_1C_1$.

$\angle ABC$ – вписанный, опирается на диаметр, значит $\angle ABC = 90°$, поэтому $AB \perp BC \Rightarrow \underline{AB \perp B_1C_1}$.

б) $AB = 8$, $B_1C_1 = 15$, $BC = 15$

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$.

$BB_1 \parallel (ACC_1)$, т.к. $BB_1 \parallel OO_1$ и $OO_1 \subset (ACC_1)$, поэтому

$\rho(AC_1; BB_1) = \rho(BB_1; (ACC_1)) = \rho(B; (ACC_1)) = \rho(B; AC) = BH$,

где $BH \perp AC$.

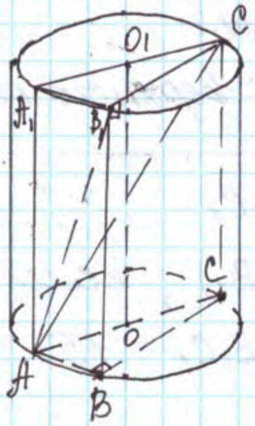
$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{AC \cdot BH}{2} \Rightarrow BH = \frac{AB \cdot BC}{AC}$$

$$BH = \frac{8 \cdot 15}{17} = \frac{120}{17} \qquad \rho(AC_1; BB_1) = \frac{120}{17}$$

<u>Ответ</u>: б) $\frac{120}{17}$

14.6. Тела вращения

2) ЕГЭ-2018

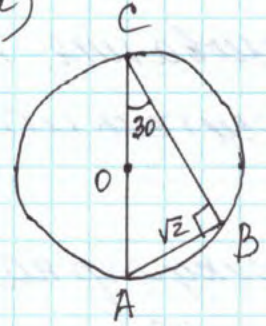


Дано: цилиндр
A, B, C – на окр-ти нижнего основ.
CC_1 – образующая
AC – диаметр
$\angle ACB = 30°$
$AB = \sqrt{2}$
$CC_1 = 2$

а) Док-ть: $(\widehat{AC_1; BC}) = 45°$

б) Найти: $V_{цилиндра}$.

а)



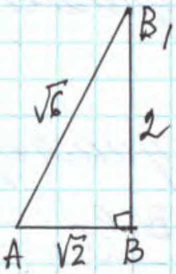
AC – диаметр, $\angle ABC = 90°$; $\angle ACB = 30°$.

$AB = \sqrt{2}$, $AC = 2 \cdot AB = 2\sqrt{2}$.

$BC = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{8-2} = \sqrt{6}$.

$\triangle ACC_1$: $AC = 2\sqrt{2}$; $CC_1 = 2$

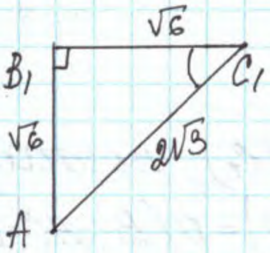
$AC_1 = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{8+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.



$(\widehat{AC_1; BC}) = (\widehat{AC_1; B_1C_1}) = \angle AC_1B_1$

$\triangle ABB_1$: $AB_1 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$

$\triangle AB_1C_1$: $B_1C_1 = \sqrt{6}$; $AB_1 = \sqrt{6}$, $AC_1 = 2\sqrt{3}$



Проверим: $AC_1^2 = B_1C_1^2 + AB_1^2$?

$AC_1^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$; $B_1C_1^2 + AB_1^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6})^2 = 12$

Равенство выполняется, значит $\angle AB_1C_1 = 90°$, а катеты равны, поэтому $\underline{\angle AC_1B_1 = 45°}$.

б) $V = S_{осн.} \cdot h = \pi R^2 \cdot CC_1$

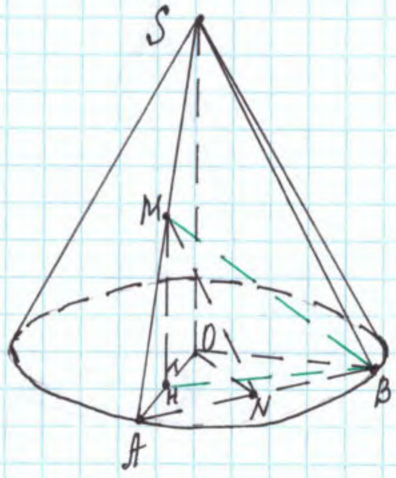
$AC = 2\sqrt{2} = 2R \Rightarrow R = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$.

$V = \pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot 2 = 4\pi$

<u>Ответ</u>: б) 4π

14.6 Тела вращения

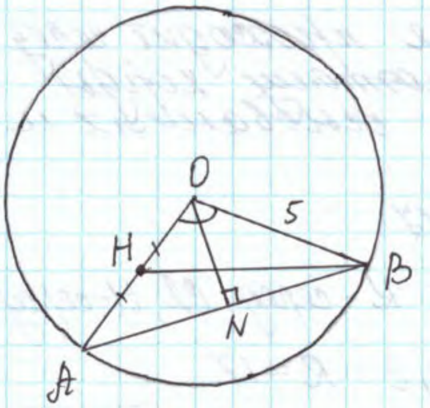
3) ЕГЭ-2019



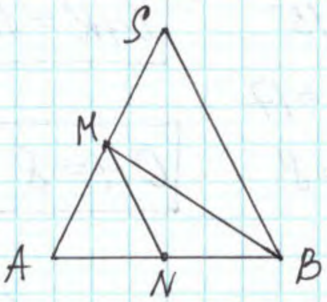
Дано: Конус, S-вершина
SO-высота, $SO=\sqrt{51}$
R-радиус основания, $R=5$
SA, SB-образующие
N лежит в нижнем основ.
M-середина SA
$MN \parallel SB$.

а) Док-ть: $\angle ANO = 90°$.

б) Найти: $(\widehat{BM; (AOB)})$, если $AB=8$.



а) $SA=SB$, образующие конуса равны
M-середина SA, $MN \parallel SB$, значит
MN-средняя линия $\triangle ASB$,
N-середина AB.
$\triangle AOB$ равнобедренный, $AO=OB=R$
ON-медиана $\Rightarrow$ ON-высота, т.е.
$\angle ANO = 90°$.



б) $MH \perp (AOB)$; $MH \perp AO$, H-середина AO

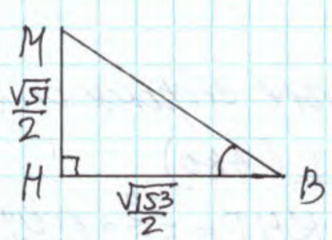
$MH = \frac{1}{2} SO = \frac{\sqrt{51}}{2}$

$\triangle AOB$: $\cos \angle O = \dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB}$

$$\cos \angle O = \frac{25+25-64}{2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{-14}{2 \cdot 25} = \frac{-7}{25}$$

$\triangle OBH$: $BH = \sqrt{OB^2+OH^2-2 \cdot OB \cdot OH \cdot \cos \angle O}$

$$BH = \sqrt{25+\frac{25}{4}+2 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{25}} = \sqrt{\frac{125}{4}+7} = \frac{\sqrt{153}}{2}$$



$(\widehat{BM; (AOB)}) = (\widehat{BM; BH}) = \angle MBH$.

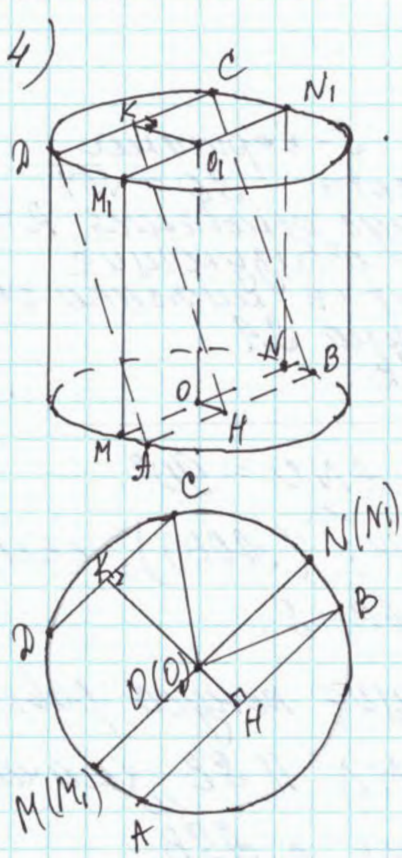
$$tg \angle MBH = \frac{MH}{BH} = \frac{\sqrt{51} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{153}} = \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{51} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\angle MBH = 30°$

Ответ: б) $30°$

14.6. Тела вращения

4)



Дано: цилиндр
MN - диаметр $MN = 34$
MM_1 - образующая, $MM_1 = 4\sqrt{6}$
$AB = 30$, $CD = 16$
α - плоскость сечения
$AB \subset \alpha$, $CD \subset \alpha$
O и O_1 - центры оснований
$\rho(AB; CD) = 25$

а) Док-ть: O и O_1 по разные стороны от α.

б) Найти: $(\alpha; \widehat{(ABO)})$

а) Плоскость сечения проходит через хорды AB и CD, поэтому хорды лежат в разных основаниях и $AB \parallel CD$.

$MN = 34$, $MO = R = 17$.

$O_1K \perp CD$; $OH \perp AB$; K - серед. CD, H - серед. AB

$\triangle O_1KC$: $KC = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$; $O_1C = R = 17$

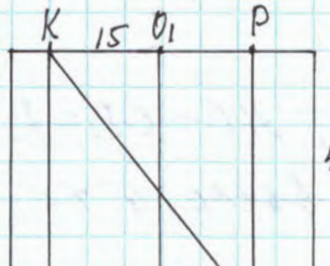
$O_1K = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{9 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15$ $\boxed{O_1K = 15}$

$\triangle OHB$: $BH = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$; $OB = R = 17$

$OH = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8$ $\boxed{OH = 8}$

$\rho(AB; CD) = KH = 25$.

1)

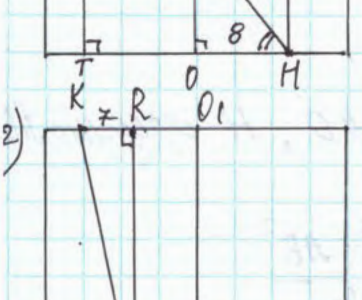


1) Если O и O_1 по разные стороны от α:

$\triangle KPH$: $KP = 15 + 8$; $PH = 4\sqrt{6}$; $KH = 25$

$23^2 + (4\sqrt{6})^2 = 25^2$; $529 + 96 = 625$ верно.

2)



2) Если O и O_1 по одну сторону от α:

$\triangle KRH$: $KR = 15 - 8 = 7$; $KH = 25$; $RH = 4\sqrt{6}$

$7^2 + (4\sqrt{6})^2 = 25^2$; $49 + 96 = 625$ неверно.

Значит точки O и O_1 находятся по разные стороны от α.

б) $(\alpha; \widehat{(ABO)}) = (KH; \widehat{(ABO)}) = \angle KHT$, где $KT \perp (ABO)$.

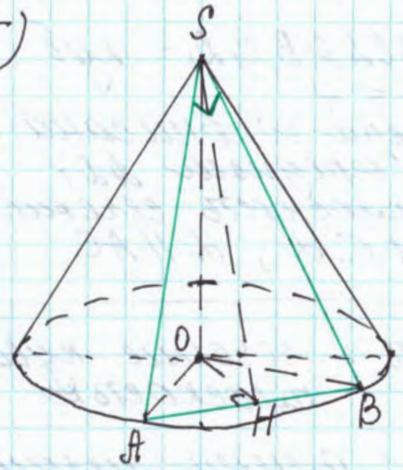
$\triangle KTH$: $KT = 4\sqrt{6}$; $KH = 15 + 8 = 23$; $KH = 25$; $\cos\angle KHT = \frac{23}{25} = 0{,}92$.

$(\alpha; \widehat{(ABO)}) = \arccos 0{,}92$

Ответ: б) $\arccos 0{,}92$

14.6. Тела вращения

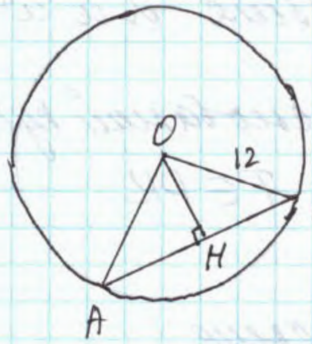
5)



Дано: конус, S – вершина
$R=12$, R – радиус основания
$SO=5$, SO – высота
SA и SB – образующие
$SA \perp SB$

а) Построить: сечение α конуса, проходящее через S и SA, SB.

б) Найти: $\rho(O;\alpha)$.

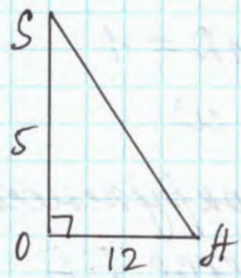


а) б) AB – хорда, $OA=OB=R=12$, $OH \perp AB$

$\triangle SOA$: $SO=5$, $OA=12$

$$SA=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$$

$SA=SB=13$.

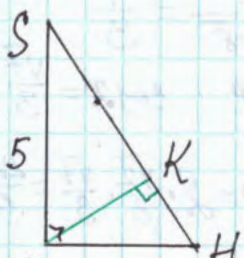


$\triangle SAB$ – прямоугольный и равнобедренный.

$$AB=13\sqrt{2}, \quad AH=BH=\frac{13\sqrt{2}}{2}$$

$\triangle OHB$: $OH=\sqrt{OB^2-HB^2}$

$$OH=\sqrt{12^2-\left(\frac{13\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{144-\frac{169}{2}}=\sqrt{\frac{119}{2}}=\frac{\sqrt{119}}{\sqrt{2}}$$



$\triangle SOH$: $SH=\sqrt{SO^2+OH^2}$

$$SH=\sqrt{5^2+\left(\frac{\sqrt{119}}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{25+\frac{119}{2}}=\sqrt{\frac{169}{2}}=\frac{13}{\sqrt{2}}$$

$OK \perp SH$.

$\rho(O;\alpha)=\rho(O;(SAB))=OK$ – искомое расстояние

$$S_{OHS}=\frac{SO\cdot OH}{2}=\frac{SH\cdot OK}{2} \Rightarrow OK=\frac{SO\cdot OH}{SH}$$

$$OK=\frac{5\cdot\sqrt{119}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot 13}=\frac{5\sqrt{119}}{13}$$

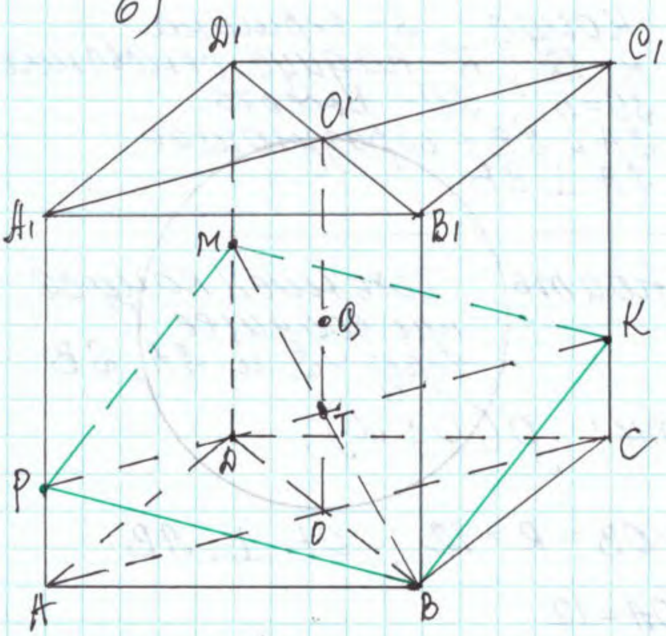
$$\boxed{\rho(O;\alpha)=\frac{5\sqrt{119}}{13}}$$

$\triangle SAB$ – искомое сечение конуса плоскостью α, т.к. проходит через S и через две взаимно перпендикулярные образующие SA и SB.

Ответ: б) $\dfrac{5\sqrt{119}}{13}$

14.6. Тела вращения

б)



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб
$AB = 4$
Сфера ω вписана в куб
M – середина DD_1
α – плоскость сечения
$BM \subset \alpha$, $\alpha \parallel AC$

а) Построить: сечение куба плоскостью α

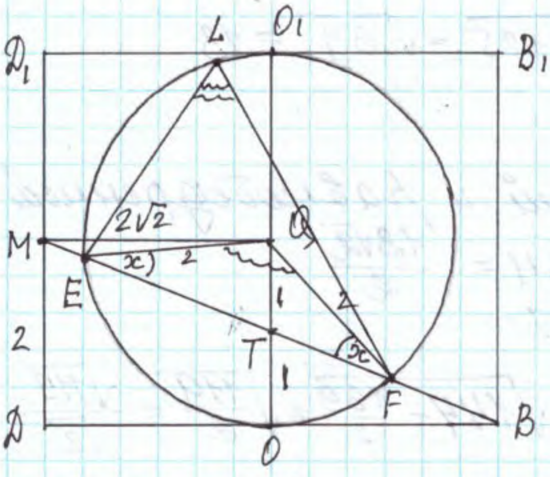
б) Найти: длину линии пересечения α и ω

а). O и O_1 – центры оснований куба

$MB \cap OO_1 = T$, $PK \parallel AC$, $T \in PK$

$K \in CC_1$, $P \in AA_1$

$MKBP$ – искомое сечение.



б) $DD_1 = 4$, $MD = 2$, $OT = \frac{1}{2}MD = 1$

$R = \frac{1}{2}OO_1 = 2$, Q – центр ω.

α и ω пересекаются по окружности, диаметром которой является EF.

$DB = 4\sqrt{2}$; $OD = QM = 2\sqrt{2}$, $QT = 1$. $\sin\angle QMT = \frac{QT}{MT} = \frac{1}{\sqrt{1+8}} = \frac{1}{3}$

$\triangle MEQ$: $\frac{2}{\sin\angle QME} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin\angle MEQ}$; $\sin\angle MEQ = \frac{\sqrt{2}}{3} = \sin x$; $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\angle EQF$ – центральный, $\angle EQF = 180° - 2x$.

$\angle ELF$ – вписанный, $\angle ELF = \frac{1}{2}\angle EQF = 90° - x$.

Вместо L можно взять O_1

$\triangle ELF$ – вписан в окружность, значит

$\frac{EF}{\sin\angle ELF} = 2R$; $EF = 2R\cdot\sin(90° - x) = 2R\cdot\cos x =$

$= 2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{4\sqrt{7}}{3}$, $\boxed{EF = \frac{4\sqrt{7}}{3}}$

$C = \pi d$

$C = \frac{4\sqrt{7}\pi}{3}$ длина линии пересечения α и ω.

<u>Ответ</u>: б) $\frac{4\sqrt{7}\cdot\pi}{3}$